УДК 514.765

О полусимметрических связностях трехмерных метрических групп Ли с симметрическим тензором Риччи

Калугина С.С., Хромова О.П.
Алтайский государственный университет, г. Барнаул
lana.kalugina.97@mail.ru, khromova.olesya@gmail.com

Аннотация

В работе исследуются полусимметрические связности трехмерных групп Ли с левоинвариантными (псевдо)римановыми метриками и симметрическим тензором Риччи. Получена полная классификация таких полусимметрических связностей на трехмерных метрических группах Ли.

Ключевые слова: полусимметрические связности, группы Ли, тензор Риччи.

1. Общие сведения

Пусть M – (псевдо)риманово многообразие размерности n. Определим на M полусимметрическую связность формулой (см. подробнее [1–5]):

$$\nabla_X Y = \nabla^g_X Y + g(X,Y)V - g(V,Y)X,$$

где ∇^g – связность Леви-Чивиты, X и Y – произвольные векторные поля, V – некоторое фиксированное левоинвариантное векторное поле.

Связность ∇ является одной из основных связностей изучаемых Э.Картаном [3], и называется полусимметрической связностью или связностью с векторным кручением (с точностью до направления).

Используя полусимметрическую связность, определим тензор кривизны R и тензор Риччи $ricc$ (псевдо)риманова многообразия (M,g) формулами:

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z,$$

$$ricc(X,Y) = tr(U \to R(X,U)Y),$$

где $[\cdot;\cdot]$ – скобка Ли векторных полей.

Пусть далее $M = G$ – трехмерная группа с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой Ли; $L(G)$ – алгебра Ли группы Ли G. Зафиксируем базис $\{e_1, \dots, e_n\}$ в алгебре $L(G)$ и положим $[e_i, e_j] = c^k_{ij} e_k$, где c^k_{ij} – структурные константы алгебры Ли. Тогда символы Кристоффеля связности Леви-Чивиты ∇^g выражаются через структурные константы и компоненты метрического тензора:

$$(\Gamma^g)_{ij,k} = \frac{1}{2}(c_{ijk} - c_{jki} + c_{kij}), \quad (\Gamma^g)^s_{ij} = \Gamma_{ij,k} g^{ks},$$

где $\|g^{ks}\|$ есть матрица, обратная к $\|g_{ks}\|$.

Пусть $V \in L(G)$, тогда символы Кристоффеля полусимметрической ∇ задаются равенством:

$$\Gamma^k_{ij} = (\Gamma^g)^k_{ij} + g_{ij} V^k - V^s g_{sj} \delta^k.$$

Компоненты тензора кривизны R и тензора Риччи $ricc$ можно вычислить с помощью формул:

$$R_{ijks} = (\Gamma^l_{ij}\Gamma^p_{jl} - \Gamma^l_{jk}\Gamma^p_{il} + c^l_{ij}\Gamma^p_{lk})g_{ps}.$$

$$ricc_{ij} = R_{ijks}g^{js}.$$

Отметим, что тензор Риччи полусимметрическои? связности, вообще говоря, не является симметрическим, и его симметричность равносильна условию $ricc_{[ij]} = 0$. Исследуем условие симметричности тензора Риччи на трехмерных группах Ли с левоинваринтной (псевдо)римановой метрикой.

Теорема 1. *[6] Пусть G – трехмерная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой. Тогда*
1) Если G унимодулярная, то в алгебре группы G существует ортонормированный базис $\{e_1, e_2, e_3\}$ такой, что метрическая алгебра Ли группы G имеет вид:

$$[e_1, e_2] = \lambda_3 e_3, \quad [e_1, e_3] = -\lambda_2 e_2, \quad [e_2, e_3] = \lambda_1 e_1.$$

2) Если G неунимодярная, то в алгебре Ли группы G существует ортонормированный $\{e_1, e_2, e_3\}$ такой, что метрическая алгебра Ли группы G имеет вид:

$$[e_1, e_2] = \alpha e_2 + \beta e_3, \quad [e_1, e_3] = \nu e_2 + \mu e_3, \quad [e_2, e_3] = 0, \quad \alpha + \mu = 2.$$

Теорема 2. *[7] Пусть G – трехмерная группа Ли с левоинвариантной лоренцовой метрикой. Тогда*

• *Если G унимодулярная, то в алгебре Ли группы G существует псевдоортонормированный базис $\{e_1, e_2, e_3\}$ такой, что метрическая алгебра Ли группы G содержится в следующем списке:*

1) Случай A_1:

$$[e_1, e_2] = \lambda_3 e_3, \quad [e_1, e_3] = -\lambda_2 e_2, \quad [e_2, e_3] = \lambda_1 e_1,$$

с времениподобным e_1;

2) Случай A_2:

$$[e_1, e_2] = (1 - \lambda_2)e_3 - e_2, \quad [e_1, e_3] = \lambda_3 - (1 + \lambda_2)e_2, \quad [e_2, e_3] = \lambda_1 e_1,$$

с времениподобным e_3;

3) Случай A_3:

$$[e_1, e_2] = e_1 - \lambda_1 e_3, \quad [e_1, e_3] = -\lambda_2 e_2 - e_1, \quad [e_2, e_3] = \lambda_1 e_1 + e_2 + e_3,$$

4) Случай A_4:

$$[e_1, e_2] = \lambda_3 e_2, \quad [e_1, e_3] = -\lambda_2 e_1 - \lambda_1 e_2, \quad [e_2, e_3] = -\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2,$$

с времениподобным e_1 и $\lambda_2 neq 0$.

• *Если G неунимодулярная, то в алгебре Ли группы G существует псевдоортонормированный базис $\{e_1, e_2, e_3\}$ такой, что метрическая алгебра Ли группы G содержится в следующем списке:*

1) Случай A:

$$[e_1, e_2] = 0, \quad [e_1, e_3] = \lambda \sin x e_1 - \mu \cos x e_2, \quad [e_2, e_3] = \lambda \cos x e_1 + \mu \sin x e_2,$$

с времениподобным e_3 и $\sin x \neq 0$, $\lambda + \mu \neq 0$, $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$.

2) Случай B:

$$[e_1, e_2] = 0, \quad [e_1, e_3] = \lambda_3 e_1 - \lambda_4 e_2, \quad [e_2, e_3] = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2,$$

с ненулевыми $\langle e_1, e_3 \rangle = -\langle e_1, e_3 \rangle = 1$ *и* $\lambda_2 \neq \lambda_3$.

3) Случай C_1*:*

$$[e_1, e_2] = 0, \quad [e_1, e_3] = \lambda_3 e_1 + \lambda_1 e_2, \quad [e_2, e_3] = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2,$$

с времениподобным e_2 *и* $\lambda_2 \neq \lambda_3$.

4) Случай C_2*:*

$$[e_1, e_2] = 0, \quad [e_1, e_3] = \lambda_2 e_1 - \lambda_3 e_2, \quad [e_2, e_3] = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2,$$

с времениподобным e_2 *и* $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_1 + \lambda_3 \neq 0$.

2. Риманов случай

Пусть G – трехмерная унимодулярная группа Ли с левоинваринтной римановой метрикой. Фиксируем базис теоремы 1 с помощью формул, описанных выше, вычислим компоненты тензора Риччи.

$$ricc_{11} = -\frac{\lambda_3^2}{2} + \lambda_2\lambda_3 - v_3^2 - \frac{\lambda_2^2}{2} - v_2^2 + \frac{\lambda_1^2}{2};$$

$$ricc_{12} = -\frac{v_3\lambda_3}{2} - \frac{\lambda_2 v_3}{2} + \frac{\lambda_1 v_3}{2} + v_1 v_2;$$

$$ricc_{13} = \frac{v_2\lambda_3}{2} + v_1 v_3 + \frac{v_2\lambda_2}{2} - \frac{\lambda_1 v_2}{2};$$

$$ricc_{21} = \frac{v_3\lambda_3}{2} - \frac{\lambda_2 v_3}{2} + \frac{\lambda_1 v_3}{2} + v_1 v_2;$$

$$ricc_{22} = -\frac{\lambda_3^2}{2} + \lambda_1\lambda_3 - v_3^2 + \frac{\lambda_2^2}{2} - \frac{\lambda_1^2}{2} - v_1^2;$$

$$ricc_{23} = -\frac{v_1\lambda_3}{2} + v_2 v_3 + \frac{v_1\lambda_2}{2} - \frac{v_1\lambda_1}{2};$$

$$ricc_{31} = \frac{v_1\lambda_3}{2} + v_1 v_3 - \frac{v_2\lambda_2}{2} - \frac{\lambda_1 v_2}{2};$$

$$ricc_{32} = -\frac{v_1\lambda_3}{2} + v_2 v_3 + \frac{v_1\lambda_2}{2} + \frac{v_1\lambda_1}{2};$$

$$ricc_{33} = \frac{\lambda_3^2}{2} = \frac{\lambda_2^2}{2} + \lambda_1\lambda_2 - v_2^2 - \frac{\lambda_1^2}{2} - v_1^2.$$

Запишем условие симметричности тензора Риччи $ricc_{[ij]} = 0$, которое в рассматриваемом случае примет вид

$$\begin{cases} -v_3\lambda_3 = 0, \\ v_2\lambda_2 = 0, \\ -v_1\lambda_1 = 0. \end{cases}$$

Очевидными решениями данной системы являются:

1) $V = (0, 0, 0)$, $\lambda_i \in R$;

2) $V=(v_1,0,0)$, $\lambda_1=0$, $\lambda_2,\lambda_3\in R$;
3) $V=(0,v_2,0)$, $\lambda_2=0$, $\lambda_1,\lambda_3\in R$;
4) $V=(0,0,v_3)$, $\lambda_3=0$, $\lambda_1,\lambda_2\in R$;
5) $V=(v_1,v_2,0)$, $\lambda_1=\lambda_2=0$, $\lambda_3\in R$;
6) $V=(v_1,0,v_3)$, $\lambda_1=\lambda_3=0$, $\lambda_2\in R$;
7) $V=(0,v_2,v_3)$, $\lambda_2=\lambda_3=0$, $\lambda_1\in R$;
8) $V=(v_1,v_2,v_3)$, $\lambda_i=0$, $i=1,2,3$.

Пусть теперь G – трехмерная неунимодулярная группа Ли с левоинваринтной римановой метрикой. Фиксируем базис теоремы 1 с помощью формул, описанных выше, определим компоненты тензора Риччи.

$$ricc_{11}=-\frac{\nu^2}{2}-\beta\nu-\mu^2-v_1\mu-\frac{\beta^2}{2}-\alpha^2-v_1\alpha-v_3^2-v_2^2;$$

$$ricc_{12}=\frac{v_3\nu}{2}-\frac{v_3\beta}{2}+v_1v_2;$$

$$ricc_{13}=-\frac{v_2\nu}{2}+\frac{v_2\beta}{2}+v_1v_3;$$

$$ricc_{21}=\frac{v_3\nu}{2}+\frac{v_3\beta}{2}+v_2\alpha+v_1v_2;$$

$$ricc_{22}=\frac{\nu^2}{2}-\alpha\mu-v_1\mu-\frac{\beta^2}{2}-\alpha^2-2v_1\alpha-v_3^2-v_1^2;$$

$$ricc_{23}=-\alpha\nu-\frac{v_1\nu}{2}-\beta\mu-\frac{v_1\beta}{2}+v_2v_3;$$

$$ricc_{31}=\frac{v_2\nu}{2}+v_3\mu+\frac{v_2\beta}{2}+v_1v_3;$$

$$ricc_{32}=-\alpha\nu-\frac{v_1\nu}{2}-\beta\mu-\frac{v_1\beta}{2}+v_2v_3;$$

$$ricc_{33}=-\frac{\nu^2}{2}-\mu^2-\alpha\mu-2v_1\mu+\frac{\beta^2}{2}-v_1\alpha-v_2^2-v_1^2.$$

Запишем условие симметричности тензора Риччи

$$\begin{cases}-v_3\beta-v_2\alpha=0,\\ -v_2\nu-v_3\mu=0,\\ \alpha+\mu=2.\end{cases}\tag{1}$$

Из третьего уравнения системы заключаем, что $\alpha=2-\mu$. Тогда из первого уравнения получаем $\beta=-\dfrac{v_2\alpha}{v_3}=\dfrac{v_2(\mu-2)}{v_3}$, а из второго имеем $\nu=-\dfrac{v_3}{v_2}\mu$, где $v_2v_3\neq 0$.

Предположим теперь, что $v_2=0$. Тогда (1) примет вид

$$\begin{cases}v_3\beta=0,\\ v_3\mu=0,\\ \alpha+\mu=2.\end{cases}$$

Откуда, очевидно следует, что либо $v_3=0$ и $\alpha=2-\mu$, либо $\mu=\beta=0$ и $\alpha=2$.

Будем считать теперь, что $v_3 = 0$, $v_2 \neq 0$. Тогда (1) запишется в виде

$$\begin{cases} \alpha = 0, \\ v_2\nu = 0, \\ \alpha + \mu = 2. \end{cases}$$

Решением данной системы, очевидно является $\alpha = 0$, $\mu = 2$, $\nu = 0$. Таким образом, все решения системы (1) исчерпываются следующим списком:

1) $V = (v_1, v_2, v_3)$, $v_2 v_3 \neq 0$, $\alpha = 2 - \mu$, $\beta = \dfrac{v_2(\mu-2)}{v_3}$, $\nu = -\dfrac{v_3}{v_2}\mu$;
2) $V = (v_1, 0, 0)$, $\lambda = 2 - \mu$;
3) $V = (v_1, v_2, 0)$, $\alpha = 0$, $\mu = 2$, $\nu = 0$, $v_2 \neq 0$;
4) $V = (v_1, 0, v_3)$, $\alpha = 2$, $\mu = 0$, $\beta = 0$, $v_3 \neq 0$.

Таким образом, справедлива

Теорема 3. *Пусть G трехмерная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой g и полусимметрической связностью ∇. Тогда Риччи симметричен на G, если:*

1) G – унимодулярна, ∇ – связность Леви-Чивиты;

2) G – неунимодулярна, структурные константы алгебры Ли группы Ли G и направления V, определяющие полусимметрическую связность,, исчерпываются следующим списком:

- *$V = (v_1, v_2, v_3)$, $v_2 v_3 \neq 0$, $\alpha = 2 - \mu$, $\beta = \dfrac{v_2(\mu-2)}{v_3}$, $\nu = -\dfrac{v_3}{v_2}\mu$;*
- *$V = (v_1, 0, 0)$, $\alpha = 2 - \mu$;*
- *$V = (v_1, v_2, 0)$, $\alpha = 0$, $\mu = 2$, $\nu = 0$, $v_2 \neq 0$;*
- *$V = (v_1, 0, v_3)$, $\alpha = 2$, $\mu = 0$, $\beta = 0$, $v_3 \neq 0$.*

3. Лоренцев случай

Пусть G – трехмерная унимодулярная группа Ли с левоинваринтной лоренцевой метрикой. Фиксируем базис теоремы 2. С помощью формул, описанных в первом разделе, в каждом из случаев найдем компоненты тензора Риччи и исследуем вопрос его симетричности.

Случай A_1. Компоненты тензора Риччи имеют вид.

$$ricc\_11 = -\frac{\lambda_3^2}{2} + \lambda_2\lambda_3 + v_3^2 - \frac{\lambda_2^2}{2} + v_2^2 + \frac{\lambda_1^2}{2};$$

$$ricc_{12} = -\frac{v_3\lambda_3}{2} - \frac{\lambda_2 v_3}{2} + \frac{\lambda_1 v_3}{2} - v_1 v_2;$$

$$ricc_{13} = \frac{v_2\lambda_3}{2} - v_1 v_3 + \frac{v_2\lambda_2}{2} - \frac{\lambda_1 v_2}{2};$$

$$ricc_{21} = \frac{v_3\lambda_3}{2} - \frac{\lambda_2 v_3}{2} + \frac{\lambda_1 v_3}{2} - v_1 v_2;$$

$$ricc_{22} = \frac{\lambda_3^2}{2} - \lambda_1\lambda_3 - v_3^2 - \frac{\lambda_2^2}{2} + \frac{\lambda_1^2}{2} + v_1^2;$$

$$ricc_{23} = -\frac{v_1\lambda_3}{2} + v_2 v_3 + \frac{v_1\lambda_2}{2} - \frac{v_1\lambda_1}{2};$$

$$ricc_{31} = \frac{v_2\lambda_3}{2} - v_1 v_3 - \frac{v_2\lambda_2}{2} - \frac{\lambda_1 v_2}{2};$$

$$ricc_{32} = -\frac{v_1\lambda_3}{2} + v_2v_3 + \frac{v_1\lambda_2}{2} + \frac{v_1\lambda_1}{2};$$

$$ricc_{33} = -\frac{\lambda_3^2}{2} + \frac{\lambda_2^2}{2} - \lambda_1\lambda_2 - v_2^2 + \frac{\lambda_1^2}{2} + v_1^2.$$

Запишем условие симметричности тензора Риччи $ricc_{ij} = 0$, которое в рассматриваемом случае примет вид:

$$\begin{cases} -v_3\lambda_3 = 0, \\ v_2\lambda_2 = 0, \\ -v_1\lambda_1 = 0. \end{cases}$$

Очевидно, решениями данной системы являются:
1) $V = (0,0,0)$, $\lambda_i \in R$;
2) $V = (v_1,0,0)$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2, \lambda_3 \in R$;
3) $V = (0,v_2,0)$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_1, \lambda_3 \in R$;
4) $V = (0,0,v_3)$, $\lambda_3 = 0$, $\lambda_1, \lambda_2 \in R$;
5) $V = (v_1,v_2,0)$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 \in R$;
6) $V = (v_1,0,v_3)$, $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$, $\lambda_2 \in R$;
7) $V = (0,v_2,v_3)$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, $\lambda_1 \in R$;
8) $V = (v_1,v_2,v_3)$, $\lambda_i = 0$, $i = 1,2,3$.

Случай A_2. Найдем компоненты тензора Риччи

$$ricc_{11} = v_3^2 - v_2^2 - \frac{\lambda_1^2}{2};$$

$$ricc_{12} = -\lambda_2v_3 + \frac{\lambda_1v_3}{2} + v_1v_2;$$

$$ricc_{13} = -v_1v_3 + v_2\lambda_2 - \frac{\lambda_1v_2}{2};$$

$$ricc_{21} = \frac{\lambda_1v_3}{2} - v_3 + v_1v_2 - v_2;$$

$$ricc_{22} = v_3^2 - \lambda_1\lambda_2 - 2\lambda_2 + \frac{\lambda_1^2}{2} + \lambda_1 - v_1^2 + v_1;$$

$$ricc_{23} = -v_2v_3 - 2\lambda_2 - \frac{v_1\lambda_1}{2} + \lambda_1 + v_1;$$

$$ricc_{31} = -v_1v_3 - v_3 - \frac{\lambda_1v_2}{2} - v_2;$$

$$ricc_{32} = -v_2v_3 - 2\lambda_2 + \frac{v_1\lambda_1}{2} + \lambda_1 + v_1;$$

$$ricc_{33} = \lambda_1\lambda_2 - 2\lambda_2 + v_2^2 - \frac{\lambda_1^2}{2} + \lambda_1 + v_1^2 + v_1.$$

Запишем условие симметричности тензора Риччи в рассматриваемом случае

$$\begin{cases} -\lambda_2v_3 + v_3 + v_2 = 0, \\ v_3 + v_2\lambda_2 + v_2 = 0, \\ -v_1\lambda_1 = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Найдем разность второго и первого уравнения системы (2)

$$\lambda_2(v_2 + v_3) = 0.$$

Данное равенство возможно при $\lambda_2 = 0$ или $v_2 + v_3 = 0$.

Если $\lambda_2 = 0$, то из первого уравнения системы (2) заключаем, что $v_2 = -v_3$.

Если же $v_2 + v_3 = 0$, то первое уравнения системы (2) влечет $\lambda_2 v_2 = 0$. Что является истинным при $\left[\begin{array}{l}\lambda_2 = 0,\\ v_2 = 0.\end{array}\right.$

Кроме того, третье равенство системы (2) справедливо при $\lambda_1 = 0$, либо при $v_1 = 0$.

Таким образом, все решения системы (2) исчерпываются следующим списком:
1) $V = (0, -v_3, v_3)$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_1, \lambda_3 \in R$;
2) $V = (v_1, -v_3, v_3)$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 \in R$;
3) $V = (0, 0, 0)$, $\lambda_i \in R$;
4) $V = (v_1, 0, 0)$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2, \lambda_3 \in R$.

Случай A_3. Запишем компоненты тензора Риччи.

$$ricc_{11} = -\frac{\lambda^2}{2} + v_3^2 - v_3 - v_2^2 + v_2;$$

$$ricc_{12} = -\frac{v_3\lambda}{2} - \lambda + v_1 v_2 - v_1;$$

$$ricc_{13} = \frac{v_2\lambda}{2} + \lambda - v_1 v_3 + v_1;$$

$$ricc_{21} = \frac{v_3\lambda}{2} - \lambda + v_1 v_2;$$

$$ricc_{22} = -\frac{\lambda^2}{2} + v_3^2 + v_3 - v_1^2 - 2;$$

$$ricc_{23} = -\frac{v_1\lambda}{2} - v_2 v_3 - v_2 + 2;$$

$$ricc_{31} = -\frac{v_2\lambda}{2} + \lambda - v_1 v_3;$$

$$ricc_{32} = \frac{v_1\lambda}{2} - v_2 v_3 - v_3 + 2;$$

$$ricc_{33} = \frac{\lambda^2}{2} + v_2^2 + v_2 + v_1^2 - 2.$$

Условие симметричности тензора Риччи в рассматриваемом случае имеет вид:

$$\begin{cases} -v_3\lambda - v_1 = 0,\\ v_2\lambda + v_1 = 0,\\ -v_1\lambda + v_3 - v_2 = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Из второго уравнения системы заключаем, что $v_1 = -v_2\lambda$. Подставляя данное равенство в первое уравнение системы (3) и приводя подобные, получаем $\lambda(v_3 - v_2) = 0$. Что истинно при $\lambda = 0$ или $v_3 - v_2 = 0$.

Если $\lambda = 0$, то из первого равенства (3) следует, что $v_1 = 0$. Тогда из третьего уравнения системы (3) заключаем, что $v_3 = v_2$.

Если $v_3 - v_2 = 0$, $\lambda \neq 0$, то третье равенство системы (3) дает $v_1\lambda = 0$, что равносильно условию $v_1 = 0$.

Таким образом, все решения системы (3) исчерпываются следующим списком:
1) $V = (0, 0, 0)$, $\lambda \neq 0$;
2) $V = (0, v_2, v_2)$, $\lambda = 0$.

Случай A_4. Вычислим компоненты тензора Риччи.

$$ricc_{11} = v_3\beta + \lambda_3\alpha - \frac{\lambda_3^2}{2} + v_3^2 + v_2^2;$$

$$ricc_{12} = 2\alpha\beta - \lambda_3\beta - \frac{v_3\lambda_3}{2} - v_1v_2;$$

$$ricc_{13} = -v_1\beta + \frac{v_2\lambda_3}{2} - v_1v_3;$$

$$ricc_{21} = 2\alpha\beta = \lambda_3\beta + \frac{v_3\lambda_3}{2} - v_1v_2;$$

$$ricc_{22} = v_3\beta - \lambda_3\alpha + \frac{\lambda_3^2}{2} - v_3^2 + v_1^2;$$

$$ricc_{23} = -v_2\beta - \frac{v_1\lambda_3}{2} + v_2v_3;$$

$$ricc_{31} = -v_2\alpha + \frac{v_2\lambda_3}{2} - v_1v_3;$$

$$ricc_{32} = v_1\alpha - \frac{v_1\alpha_3}{2} + v_2v_3;$$

$$ricc_{33} = -2\beta^2 - \frac{\lambda_3^2}{2} - v_2^2 + v_1^2.$$

Условие симметричности тензора Риччи запишется в виде:

$$\begin{cases} v_2\alpha - v_1\beta = 0, \\ v_3\lambda_3 = 0, \\ v_2\beta + v_1\alpha = 0, \\ \beta \neq 0. \end{cases} \tag{4}$$

Домножим первое и третье уравнения данной системы равенств на α и β соответственно и найдем их сумму. Теперь домножим первое и третье уравнения данной системы равенств на β и α соответственно и найдем их разность. Тем самым получим систему вида

$$\begin{cases} v_2(\alpha^2 + \beta^2) = 0, \\ v_1(\alpha^2 + \beta^2) = 0. \end{cases}$$

Поскольку $\beta \neq 0$, то данная система истинна только при $v_2 = v_1 = 0$.

Кроме того, второе уравнение системы (4) влечет, что либо $\lambda_3 = 0$, либо $v_3 = 0$.

Таким образом, все решения системы (4) исчерпываются следующим списком:
1) $V = (0, 0, 0)$, $\alpha, \beta, \lambda_3 \in R$;
2) $V = (0, 0, v_3)$, $\lambda_3 = 0$.

Пусть далее G – трехмерная неунимодулярная группа Ли с левоинваринтной лоренцевой метрикой. Фиксируем базис теоремы 2. С помощью формул, описанных в первом разделе, в каждом из случаев найдем компоненты тензора Риччи и исследуем вопрос его симетричности.

Случай A. Компоненты тензора Риччи имеют вид

$$ricc_{11} = \sin^2 x\lambda^2 - \frac{\cos^2 x\lambda^2}{2} + ?\sin^2 x\lambda + 2v_3 \sin x\lambda + v_3\mu \sin x + \frac{\mu^2\cos^2 x}{2} + v_3^2 - v_2^2;$$

$$ricc_{12}=\cos x\sin x\lambda^2+\frac{v_3\cos x\lambda}{2}-\mu^2\cos x\sin x-\frac{v_3\mu\cos x}{2}+v_1v_2;$$

$$ricc_{13}=-v_1\sin x\lambda-\frac{v_2\cos x\lambda}{2}+\frac{v_2\mu\cos x}{2}-v_1v_3;$$

$$ricc_{21}=\cos x\sin x\lambda^2+\frac{v_3\cos x\lambda}{2}-\mu^2\cos x\sin x-\frac{v_3\mu\cos x}{2}+v_1v_2;$$

$$ricc_{22}=\frac{\cos x^2\lambda^2}{2}+\mu\sin x^2\lambda+v_3\sin x\lambda+\mu^2\sin x^2+2v_3\mu\sin x-\frac{\mu^2\cos x^2}{2}+v_3^2-v_1^2;$$

$$ricc_{23}=-\frac{v_1\cos x\lambda}{2}-v_2\mu\sin x+\frac{v_1\mu\cos x}{2}-v_2v_3;$$

$$ricc_{31}=-\frac{v_2\cos x\lambda}{2}-\frac{v_2\mu\cos x}{2}-v_1v_3;$$

$$ricc_{32}=\frac{v_1\cos x\mu}{2}+\frac{v_1\lambda\cos x}{2}-v_2v_3;$$

$$ricc_{33}=-\sin x^2\lambda^2-\frac{\cos x^2\lambda^2}{2}-v_3\sin x\lambda+\mu\cos x^2\lambda-\mu^2\sin x^2-v_3\mu\sin x-\frac{\mu^2\cos x^2}{2}+v_2^2+v_1^2.$$

Запишем условие симметричности тензора Риччи в исследуемом случае

$$\begin{cases} v_2\mu\cos x-v_1\sin x\lambda=0,\\ -v_1\cos x\lambda-v_2\mu\sin x=0,\\ x\neq\pi k, k\in Z,\\ \lambda+\mu\neq 0,\\ \lambda\geq 0,\\ \mu\geq 0.\end{cases}\tag{5}$$

Разделим первые два уравнения данной системы на $\sin x$ и получим систему вида

$$\begin{cases} v_2\mu\operatorname{ctg} x-v_1\lambda=0,\\ v_1\lambda\operatorname{ctg} x+v_2\mu=0.\end{cases}$$

Выражая из первого уравнения $v_2\mu$ и подставляя во второе, имеем $v_1\lambda(1+\operatorname{ctg}^2 x)=0$. Ясно, что данное равенство истинно при $\lambda=0$ или $v_1=0$.

Если $\lambda=0$, то $\mu>0$, $V=(v_1,0,v_3)$.

Если $v_1=0$, то (5) преобразуется к виду

$$\begin{cases} v_2\mu\cos x=0,\\ v_2\mu\sin x=0.\end{cases}$$

Поскольку функции $\cos x$ и $\sin x$ не отображается в нуль одновременно, заключаем, что $v_2\mu=0$. При этом либо $v_2=0$ либо $\mu=0$.

Таким образом, все решения системы (5) исчерпываются следующим списком:
1) $V=(v_1,0,v_3)$, $\lambda=0$, $\mu>0$;
2) $V=(0,0,v_3)$, $\lambda\geq 0$, $\mu\geq 0$, $\lambda+\mu\neq 0$;
3) $V=(0,v_1,v_3)$, $\lambda>0$, $\mu=0$.

Случай В. Запишем компоненты тензора Риччи

$$ricc_{11}=v_3^2;$$

$$ricc_{12} = -\frac{v_3\lambda_4}{2} - v_2v_3;$$

$$ricc_{13} = -\frac{\lambda_4^2}{2} + \frac{v_2\lambda_4}{2} - v_3\lambda_3 - \lambda_2v_3 - v_1v_3 + v_2^2;$$

$$ricc_{21} = -\frac{v_3\lambda_4}{2} - v_2v_3;$$

$$ricc_{22} = -\frac{\lambda_4^2}{2} + v_3\lambda_3 + 2\lambda_2v_3 + 2v_1v_3;$$

$$ricc_{23} = \lambda_2\lambda_4 + \frac{v_1\lambda_4}{2} - v_2\lambda_2 - v_1v_2;$$

$$ricc_{31} = -\frac{\lambda_4^2}{2} - \frac{v_2\lambda_4}{2} - 2v_3\lambda_3 - \lambda_2v_3 - v_1v_3 + v_2^2;$$

$$ricc_{32} = \lambda_2\lambda_4 + \frac{v_1\lambda_4}{2} - \lambda_1v_3 - v_1v_2;$$

$$ricc_{33} = \lambda_1\lambda_4 + \lambda_2\lambda_3 + v_1\lambda_3 - \lambda_2^2 + \lambda_1v_2 + v_1^2.$$

Условие симметричности тензора Риччи будет иметь вид

$$\begin{cases} v_2\lambda_4 + v_3\lambda_3 = 0, \\ \lambda_1v_3 - v_2\lambda_3 = 0, \\ \lambda_3 \neq \lambda_2. \end{cases} \tag{6}$$

Возможны два случая: $v_2 = 0$ и $v_2 \neq 0$. Рассмотрим их последовательно. Если $v_2 = 0$, то система (6) примет вид

$$\begin{cases} v_3\lambda_3 = 0, \\ \lambda_1v_3 = 0, \\ \lambda_3 \neq \lambda_2. \end{cases}$$

Очевидно, ее решениями являются $v_3 = 0$, $\lambda_3 \neq \lambda_2$ или $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$.

Если $v_2?0$, то из первого уравнения системы (6) получим $\lambda_4 = -\frac{v_3\lambda_3}{v_2}$, а из второго уравнения найдем $\lambda_3 = \frac{\lambda_2v_3}{v_2}$. Таким образом, все решения системы (6) исчерпываются следующим списком.

1) $V = (v_1, 0, 0)$, $\lambda_3 \neq \lambda_2$, $\lambda_1 \in R$;
2) $V = (v_1, 0, v_3)$, $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$;
3) $V = (v_1, v_2, v_3)$, $\lambda_3 = \frac{\lambda_2v_3}{v_2}$, $\lambda_4 = -\frac{v_3^2\lambda_2}{v_2^2}$, $v_3 \neq v_2$, $v_2 \neq 0$.

Случай C_1. Найдем компоненты тензора Риччи

$$ricc_{11} = -\lambda_3^2 + 2v_3\lambda_3 - \lambda_2\lambda_3 - v_3^2 + \lambda_2v_3 + v_2^2;$$

$$ricc_{12} = -\lambda_1\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2 - v_1v_2;$$

$$ricc_{13} = v_1v_3 - v_1\lambda_3;$$

$$ricc_{21} = -\lambda_1\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2 - v_1v_2;$$

$$ricc_{22} = -v_3\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 + v_3^2 - 2\lambda_2v_3 + \lambda_2^2 + v_1^2;$$

$$ricc_{23} = v_2\lambda_2 - v_2v_3;$$

$$ricc_{31} = v_1v_3 - \lambda_1v_2;$$

$$ricc_{32} = v_1\lambda_1 - v_2v_3;$$

$$ricc_{33} = -\lambda_3^2 + v_3\lambda_3 + \lambda_2v_3 - \lambda_2^2 + v_2^2 - v_1^2.$$

Запишем условие симметричности тензора Риччи в изучаемом случае

$$\begin{cases} \lambda_1v_2 - v_1\lambda_3 = 0, \\ v_2\lambda_2 - v_1\lambda_1 = 0, \\ \lambda_3 \neq \lambda_2. \end{cases} \tag{7}$$

Возможны два случая: $v_2 = 0$ и $v_2 \neq 0$. Пусть $v_2 = 0$. Тогда (7) примет вид

$$\begin{cases} v_1\lambda_3 = 0, \\ v_1\lambda_1 = 0. \end{cases}$$

Очевидно, данная система равенств имеет два решения: $v_1 = 0$, то $\lambda_3 \neq \lambda_2$ или $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$. Пусть теперь $v_2 \neq 0$. Тогда из первого и второго уравнений системы (7) соответственно находим $\lambda_1 = \dfrac{v_1\lambda_3}{v_2}$ и $\lambda_2 = \dfrac{v_1\lambda_1}{v_2}$. Таким образом, все решения системы (7) исчерпываются следующим списком.

1) $V = (v_1, v_2, v_3)$, $\lambda_1 = \dfrac{v_1\lambda_3}{v_2}$, $\lambda_2 = \dfrac{v_1^2\lambda_3}{v_2^2} \neq \lambda_3$, $v_2 \neq 0$;
2) $V = (0, 0, v_3)$, $\lambda_1 \in R$, $\lambda_3 \neq \lambda_2$;
3) $V = (v_1, 0, v_3)$, $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$.

Случай C_2. Вычислим компоненты тензора Риччи

$$ricc_{11} = \frac{\lambda_3^2}{2} - v_3^2 + 3\lambda_2v_3 - 2\lambda_2^2 + v_2^2 - \frac{\lambda_1^2}{2};$$

$$ricc_{12} = \frac{v_3\lambda_3}{2} - \lambda_2\lambda_3 + \frac{\lambda_1v_3}{2} - \lambda_1\lambda_2 - v_1v_2;$$

$$ricc_{13} = -\frac{v_2\lambda_3}{2} + v_1v_3 - v_1\lambda_2 - \frac{\lambda_1v_2}{2};$$

$$ricc_{21} = \frac{v_3\lambda_3}{2} - \lambda_2\lambda_3 + \frac{\lambda_1v_3}{2} - \lambda_1\lambda_2 - v_1v_2;$$

$$ricc_{22} = \frac{\lambda_3^2}{2} + v_3^2 - 3\lambda_2v_3 + 2\lambda_2^2 - \frac{\lambda_1^2}{2} + v_1^2;$$

$$ricc_{23} = -\frac{v_1\lambda_3}{2} - v_2v_3 + v_2\lambda_2 - \frac{v_1\lambda_1}{2};$$

$$ricc_{31} = \frac{v_2\lambda_3}{2} + v_1v_3 - \frac{\lambda_1v_2}{2};$$

$$ricc_{32} = -\frac{v_1\lambda_3}{2} - v_2v_3 + \frac{v_1\lambda_1}{2};$$

$$ricc_{33} = \frac{\lambda_3^2}{2} + \lambda_1\lambda_3 + 2\lambda_2v_3 - 2\lambda_2^2 + v_2^2 + \frac{\lambda_1^2}{2} - v_1^2.$$

Запишем условие симметричности тензора Риччи в исследуемом случае

$$\begin{cases} v_2\lambda_3 + v_1\lambda_2 = 0, \\ v_2\lambda_2 - v_1\lambda_1 = 0, \\ \lambda_2 \neq 0, \\ \lambda_1 + \lambda_3 \neq 0. \end{cases} \tag{8}$$

Возможны два случая: $v_2 = 0$ и $v_2 \neq 0$. Пусть $v_2 = 0$. Тогда (8) примет вид

$$\begin{cases} v_1\lambda_2 = 0, \\ v_1\lambda_1 = 0. \end{cases}$$

Поскольку $\lambda_2 \neq 0$, данная система равенств имеет одно решение $v_1 = 0$. Пусть теперь $v_2 \neq 0$. Тогда из первого и второго уравнений системы (8) соответственно получаем $\lambda_2 = \dfrac{v_1\lambda_1}{v_2}$ и $\lambda_3 = -\dfrac{v_1\lambda_2}{v_2}$. Таким образом, все решения системы (8) исчерпываются следующим списком.

1) $V = (v_1, v_2, v_3)$, $v_1 \neq 0$, $v_2 \neq 0$, $\lambda_2 = \dfrac{v_1\lambda_1}{v_2} \neq 0$, $\lambda_3 = -\dfrac{v_1^2\lambda_1}{v_2^2} \neq -\lambda_1$;

2) $V = (0, 0, v_3)$, $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_1 + \lambda_3 \neq 0$.

Таким образом, справедлива

Теорема 4. *Пусть G трехмерная группа Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой g и полусимметрической связностью ∇. Тогда тензор Риччи симметричен на G, если*

1) G – унимодулярна, структурные константы алгебры Ли группы Ли G и направления V, определяющие полусимметрическую связность, исчерпываются следующим списком:

Случай A_1

- $V = (0, 0, 0)$, $\lambda_i \in R$;
- $V = (v_1, 0, 0)$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2, \lambda_3 \in R$;
- $V = (0, v_2, 0)$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_1, \lambda_3 \in R$;
- $V = (0, 0, v_3)$, $\lambda_3 = 0$, $\lambda_1, \lambda_2 \in R$;
- $V = (v_1, v_2, 0)$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 \in R$;
- $V = (v_1, 0, v_3)$, $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$, $\lambda_2 \in R$;
- $V = (0, v_2, v_3)$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, $\lambda_1 \in R$;
- $V = (v_1, v_2, v_3)$, $\lambda_i = 0$, $i = 1, 2, 3$;

Случай A_2

- $V = (0, -v_3, v_3)$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_1, \lambda_3 \in R$;
- $V = (v_1, -v_3, v_3)$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 \in R$;
- $V = (0, 0, 0)$, $\lambda_i \in R$;
- $V = (v_1, 0, 0)$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2, \lambda_3 \in R$;

Случай A_3

- $V = (0, 0, 0)$, $\lambda \neq 0$;
- $V = (0, v_2, v_2)$, $\lambda = 0$;

Случай A_4

- $V = (0, 0, 0)$, $\alpha, \beta, \lambda_3 \in R$;
- $V = (0, 0, v_3)$, $\lambda_3 = 0$.

2) G – неунимодулярна, структурные константы алгебры Ли группы Ли G и направления V, определяющие полусимметрическую связность, исчерпываются следующим списком:

Случай A

- $V = (v_1, 0, v_3)$, $\lambda = 0$, $\mu > 0$;

- $V = (0, 0, v_3)$, $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$, $\lambda + \mu \neq 0$;
- $V = (0, v_1, v_3)$, $\lambda > 0$, $\mu = 0$;

Случай B

- $V = (v_1, 0, 0)$, $\lambda_3 \neq \lambda_2$, $\lambda_1 \in R$;
- $V = (v_1, 0, v_3)$, $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$;
- $V = (v_1, v_2, v_3)$, $\lambda_3 = \dfrac{\lambda_2 v_3}{v_2}$, $\lambda_4 = -\dfrac{v_3^2 \lambda_2}{v_2^2}$, $v_3 \neq v_2$, $v_2 \neq 0$;

Случай C_1

- $V = (v_1, v_2, v_3)$, $\lambda_1 = \dfrac{v_1 \lambda_3}{v_2}$, $\lambda_2 = \dfrac{v_1^2 \lambda_3}{v_2^2} \neq \lambda_3$, $v_2 \neq 0$;
- $V = (0, 0, v_3)$, $\lambda_1 \in R$, $\lambda_3 \neq \lambda_2$;
- $V = (v_1, 0, v_3)$, $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$;

Случай C_2

- $V = (v_1, v_2, v_3)$, $v_1 \neq 0$, $v_2 \neq 0$, $\lambda_2 = \dfrac{v_1 \lambda_1}{v_2} \neq 0$, $\lambda_3 = -\dfrac{v_1^2 \lambda_1}{v_2^2} \neq -\lambda_1$;
- $V = (0, 0, v_3)$, $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_1 + \lambda_3 \neq 0$.

Список литературы

1. Agricola I., Kraus M. Manifolds with vectorial torsion // Differential Geometry and its Applications. — 2016. — Vol. 46. — P. 130–147.

2. Barua B., Ray A. Kr. Some properties of a semi-symmetric metric connection in a Riemannian manifold // Indian J. pure appl. Math. — 1985. — Vol. 16, no. 7. — P. 736–740.

3. Cartan E. Sur les varietes a connexion affine et la theorie de la relativit é généralisée (deuxiéme partie) // Ann. Ecole Norm. Sup. — 1925. — Vol. 42. — P. 17–88.

4. Muniraja G. Manifolds Admitting a Semi-Symmetric Metric Connection and a Generalization of Schur's Theorem // Int. J. Contemp. Math. Sci. — 2008. — Vol. 25, no. 3. — P. 1223–1232.

5. Yano K. On semi-symmetric metric connection // Revue Roumame de Math. Pure et Appliquees. — 1970. — Vol. 15. — P. 1579–1586.

6. Milnor J. Curvature of left invariant metric on Lie groups // Advances in mathematics. — 1976. — Vol. 293. — P. 293–329.

7. Calvaruso G. Homogeneous structures on three-dimensional Lorentzian manifolds // J. Geom. Phys. — 2007. — Vol. 57. — P. 1279–1291.