УДК 514.01

О существовании меры длины отрезка

Поликанова И.В.
Алтайский государственный педагогический университет, г. Барнаул
anirix1@yandex.ru

Аннотация

В статье предлагается строгий вариант известного конструктивного доказательства теоремы существования меры длины отрезка путем последовательной укладки эталона и его двоичных частей.

Ключевые слова: мера длины отрезка, укладка эталона, двоичная часть эталона.

1. Введение

В математической литературе нам встретились два подхода к обоснованию существования меры длины отрезка в абсолютной геометрии по схеме Гильберта. Один реализован в учебниках [1,2], другой — в [3–5]. В [1] мера длины отрезка определяется через отношение двух отрезков, вводимого посредством дедекиндова сечения в множестве рациональных чисел Q. Именно, для всякой упорядоченной пары отрезков $[a]$, $[e]$ рассматривается разбиение множества Q на 2 класса: к 1-ому классу отнесены все отрицательные рациональные числа, ноль и положительные рациональные числа $\frac{m}{n}$, такие, что $m[e] \leq n[a]$, а ко 2-ому классу отнесены положительные рациональные числа $\frac{m}{n}$, такие, что $m[e] > n[a]$ (для отрезков определены операции "сложения" и "умножения на целое число"). Такое разбиение множества Q представляет собой дедекиндово сечение в Q и определяет действительное число, называемое "отношением отрезка $[a]$ к $[e]$" и обозначаемое $\frac{[a]}{[e]}$, оно же принимается за меру отрезка $[a]$ при выбранном эталоне $[e]$. При таком подходе достаточно просто обосновывается, что определённая на множестве всех отрезков функция $l[a] = \frac{[a]}{[e]}$ при фиксированном отрезке $[e]$ удовлетворяет аксиомам меры. В [2] эта же идея реализована в модели действительного числа, рассматриваемого как предел фундаментальных последовательностей рациональных чисел: всякому отрезку сопоставляется в качестве меры длины предел последовательности её приближённых рациональных значений, определяемых "зажимающими" измеряющий отрезок сверху и снизу последовательностями отрезков, соизмеримых с эталоном. Однако данный подход не конструктивен, так как не указывает способ нахождения меры длины конкретного отрезка, а лишь констатирует её существование.

При втором подходе мера длины отрезка определяется как действительнозначная функция, значение которой на отрезке рассматривается не как общее предельное значение для всевозможных сходящихся последовательностей рациональных приближений, а как предел одной единственной последовательности двоично-рациональных приближений, получаемой в процессе измерения одного отрезка другим. Строгое обоснование того, что измеряющая функция является мерой, объёмно, поэтому доказательство представлено на идейном уровне. Преодоление бесконечности осуществляется рассмотрением первых двух-трёх шагов и завершается словами "и т.д."

Цель нашей работы — путём формализации процесса измерения одного отрезка другим дать полное конструктивное доказательство теоремы существования меры длины отрезка.

Предлагаемый метод в каком-то смысле интегрирует оба подхода: от рассмотрения соизмеримых отрезков $[a]$ и $[p]$, для которых существует отрезок $[q]$ и натуральные числа m и n, такие, что $[a] = m[q]$, $[p] = n[q]$, осуществлён переход к *рациональным частям* отрезка: $[a] = \frac{m}{n}[p]$.

Отслеживание всех тонкостей рассуждений позволяет выявить взаимосвязь геометрических фактов, их роль и необходимость. Так, при проверке единственности меры длины отрезка в абсолютной геометрии выяснилась избыточность требования существования отрезка единичной длины [6]. Как оказалось, однозначная определённость меры своим значением на одном единственном отрезке вытекает из пропорциональности всяких двух мер.

2. Необходимые сведения из евклидовой геометрии

Теория измерения отрезка в евклидовом пространстве обосновывается первыми четырьмя группами системы аксиом Гильберта [7]. Причём, из двух аксиом 4-ой группы для доказательства теорем существования и единственности меры достаточно (вкупе с аксиомами первых трёх групп) аксиомы Архимеда. Ниже приведём список используемых аксиом, утверждений и понятий, не придерживаясь буквы какого-либо одного источника, а передавая их суть в удобной символике. Ссылки преимущественно будем делать на наиболее полный, на наш взгляд, труд [4]. Точки будем обозначать заглавными буквами латинского алфавита. Равенство точек понимается как их совпадение. Через $\mathbb{N}$ будем обозначать множество натуральных чисел и 0.

Асиомы II-ой группы определяют отношение, обозначаемое $A - B - C$ и произносимое *"точка B лежит между точками A и C."* На его основе формулируются производные понятия ([4], §9):

отрезок $[AB]$ — множество точек, состоящее из точек A, B и всех точек, лежащих между ними;

луч $[AB)$ *с вершиной* A — множество точек, состоящее из точек: A и всех точек M, для которых неверно, что $M - A - B$; не зависит от выбора точки B на нём ([4], теор. 9.12);

одинаково ориентированные лучи $[AB)$ *и* $[A'B')$ — лучи одной прямой такие, что все точки одного из них принадлежат другому, обозначение: $[AB) \uparrow\uparrow [A'B')$.

Предложение 1. *([4], теор. 9.3, 9.4; [6], предл. 5; [5], теор. 8б.)*

1). $(A - B - C) \wedge (B - C - D) \quad\Rightarrow\quad (A - B - D) \wedge (A - C - D)$.

2). $(A - B - C) \wedge (A - C - D) \quad\Rightarrow\quad (A - B - D) \wedge (B - C - D)$.

3). $(A - B - C) \wedge (B - D - C) \quad\Rightarrow\quad (A - B - D) \wedge (A - D - C)$.

4). $(A - C - B) \wedge (A - D - B) \wedge (D \neq C) \quad\Rightarrow$

$\Rightarrow\quad (A - D - C) \wedge \overline{(C - D - B)} \vee (C - D - B) \wedge \overline{(A - D - C)}$.

(Черта сверху означает отрицание.)

Предложение 2. *([4], §9; [6], предл. 13, 14.)*

1). Одинаковая ориентированность лучей одной прямой является отношением эквивалентности.

2). $A - B - C \quad\Rightarrow\quad [AB) \uparrow\uparrow [AC)$.

3). $A - B - C \quad\Leftrightarrow\quad [AB) \uparrow\uparrow [BC)$.

В силу пункта 1) этого предложения, если лучи $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$ попарно одинаково ориентированы, то допустимо обозначение $\hat{a} \uparrow\uparrow \hat{b} \uparrow\uparrow \hat{c}$.

Аксиомы III-ей группы выражают свойства отношения *“конгруэнтности” отрезков* (и углов), конгруэнтность обозначается знаком “=”.

Аксиома III_0. $[AB] = [BA]$. (Традиционно включается в III_2.)

Содержание аксиом III_1, III_2 усилено в следующих предложениях:

Предложение 3. *([4], теор. 16.2.-16.4.) Отношение конгруэнтности отрезков является эквивалентностью.*

Предложение 4. *([4], теор. 16.5.) Для любого отрезка $[AB]$ и любого луча с вершиной A' существует единственная точка B', принадлежащая этому лучу, такая, что $[AB] = [A'B']$. (В этом случае говорят об откладывании отрезка $[AB]$ от точки A на заданном луче.)*

Конгруэнтность отрезков, будучи эквивалентностью, разбивает всё множество отрезков на непересекающиеся классы сущностей. В этом плане их уникальность, определяемая их местоположением в пространстве путём фиксации концов, уступает место общности и обезличиванию, что сказывается и в обозначении. В тех ситуациях, где отрезок может быть заменён конгруэнтным ему отрезком, предпочтительнее более краткое обозначение, например $[a]$, непривязанное к местоположению отрезка.

Производные понятия:

– *середина отрезка* $[AB]$ — лежащая на прямой AB точка O, для которой выполняется: $[AO] = [OB]$; каждый из отрезков $[AO]$, $[OB]$ будем называть *половиной отрезка* $[AB]$;

– *отрезок* $[a]$ *больше отрезка* $[b]$ или, что то же самое, *отрезок* $[b]$ *меньше отрезка* $[a]$, если на какой-либо прямой существует тройка точек $O - A - B$ такая, что $[OA] = [a]$ и $[OB] = [b]$; соответствующие обозначения: $[a] > [b]$ и $[b] < [a]$.

В [4] предпочтение отдаётся знаку $>$, мы же утверждения из [4] переформулируем с заменой знака $>$ на знак $<$.

Предложение 5. *([4], теор. 19.3., 19.1.) У всякого отрезка $[AB]$ существует единственная середина O, причём, $A - O - B$.*

Предложение 6. *([4], §17.)*

1). $([AB] = [A'B']) \wedge ([CD] = [C'D']) \wedge ([AB] < [CD]) \;\Rightarrow\; ([A'B'] < [C'D'])$.

2). Для любых двух отрезков $[a]$ и $[b]$ всегда справедливо одно из соотношений

$$[a] = [b] \quad \text{\textit{или}} \quad [a] < [b] \quad \text{\textit{или}} \quad [a] > [b].$$

3). $([a] < [b]) \wedge ([b] < [c]) \;\Rightarrow\; ([a] < [c])$.

4). $(A - C - B) \wedge (A - D - B) \wedge (C \neq D) \;\Rightarrow\; ([CD] < [AB])$.

Предложение 7. $(A - P - Q) \wedge (P - R - Q) \;\Leftrightarrow\; [AP] < [AR] < [AQ]$.

Доказательство. По предл. 1(3,2), 6(3) выполняется: $(A - P - Q) \wedge (P - R - Q) \;\Leftrightarrow\; (A - P - R) \wedge (A - R - Q) \;\Leftrightarrow\; ([AP] < [AR]) \wedge ([AR] < [AQ]) \;\Leftrightarrow\; [AP] < [AR] < [AQ]$. □

Для отрезков определяются операции сложения и умножения на натуральное число:

– *сумма отрезков* $[a]$ *и* $[b]$ – любой отрезок $[c]$, конгруэнтный какому-либо отрезку $[AC]$, для которого существует точка B, такая, что $A - B - C$ и $[AB] = [a]$, $[BC] = [b]$; обозначается $[a] + [b]$;

– *произведение отрезка* $[a]$ *на натуральное число* m определяется рекуррентно: $1 \cdot [a] = [a]$; $m \cdot [a] = (m-1) \cdot [a] + [a]$. В следующем пункте определим умножение отрезка на рациональное число. (Во всех произведениях точку можно опускать).

Данные операции а также сравнение отрезков определены для классов конгруэнтных отрезков. Поэтому предварительно проверяется корректность определений: соотношения

$[a] < [b]$, $[c] = [a] + [b]$ и $[a] = m[p]$ должны выполняться для любых представителей данных классов. Корректность сравнения отрезков обосновывается предл. 6(1). Корректность сложения вытекает из предл. 8(3). Для умножения отрезка проверка корректности осуществлена в [6]. Для единообразия изложения удобно расширить понятие отрезка, включив в него и нулевые отрезки с совпадающими концами – одноточечные множества вида $[AA]$. Класс конгруэнтных между собой нулевых отрезков будем обозначать $[o]$. Для любого отрезка $[a]$ и любого рационального числа r будем полагать:

$$[o] \leq [a] \text{ и } [o] < [a] \text{ при } [a] \neq [o], \qquad [o] + [a] = [a], \qquad 0 \cdot [a] = [o], \qquad r \cdot [o] = [o].$$

Предложение 8. *([4], §21.) Для любых отрезков* $[a], [b], [c], [d], [a'], [b']$ *справедливо:*
1. $[a] + [b] = [b] + [a]$.
2. $([a] + [b]) + [c] = [a] + ([b] + [c])$.
3. *Если* $[a] = [a']$ *и* $[b] = [b']$, *то* $[a] + [b] = [a'] + [b']$.
4. *Если* $[a] = [a']$ *и* $[b] < [b']$, *то* $[a] + [b] < [a'] + [b']$.
5. *Если* $[a] < [a']$ *и* $[b] < [b']$, *то* $[a] + [b] < [a'] + [b']$.

Предложение 9. *([6], теор. 2.) На всяком луче* $[AB)$ *для любого ненулевого отрезка* $[p]$ *существует единственная бесконечная последовательность точек*

$$A = A_0, A_1, ..., A_n, ..., \tag{1}$$

удовлетворяющая условиям:

Ad_1) $[A_{i-1}A_i) \uparrow\uparrow [AB)$, Ad_2) $[A_{i-1}A_i] = [p]$ *при всех* $i = 1, 2, ...$ *При этом* $[A_0A_n] = n[p]$.

Следующее предложение представляет собой следствие из аксиомы Архимеда.

Предложение 10. *([6], теор. 5; 5'.) Для всяких отрезков* $[p]$ *и* $[AB]$, $[p] \neq [o]$, *и последовательности точек (1), удовлетворяющей условиям* Ad_1 *и* Ad_2, *существует и притом единственное число* $n \in \mathbb{N}$, *такое, что*

$$B = A_n, \quad \textit{либо} \quad A_n - B - A_{n+1}. \tag{2}$$

Иначе: для всяких отрезков $[a]$ *и* $[p]$, *существует и притом единственное число* $n \in \mathbb{N}$ *такое, что*

$$n[p] \leq [a] < (n+1)[p].$$

В случае, если $[p] < [a]$, *то* $n > 0$.

3. Рациональные части отрезка

В данном разделе на основе установленных в [6] свойств умножения отрезка на натуральное число и целых частей отрезка, введём понятие рациональной части отрезка.

Предложение 11. *([6], теор. 8, следствие 3.) Пусть* $[a]$, $[b]$ *– отрезки,* $[b] \neq [o]$*;* $m, n \in \mathbb{N}$. *Тогда:*

$$\begin{array}{lccc}
1). & n < m & \Leftrightarrow & n[a] < m[a]. \\
2). & [a] < [b] & \Leftrightarrow & n[a] < n[b]. \\
3). & [a] = [b] & \Leftrightarrow & n[a] = n[b]. \\
4). & m(n[a]) & = & (m \cdot n)[a]. \\
5). & (m+n)[a] & = & m[a] + n[b].
\end{array}$$

Знаком плюс мы обозначаем как сложение отрезков, так и сложение рациональных чисел. Надеемся, это не вызовет недоразумений у читателя.

Полагаем: $\frac{1}{n}[a] = [b] \;\Leftrightarrow\; [a] = n[b]$. В частности, $\frac{1}{1}[a] = [a]$.

Предложение 12. *([6], теор. 9, следствие 3.) Пусть $[a]$, $[b]$ – отрезки, $[b] \neq [o]$; $m, n \in \mathbb{N}$. Тогда:*

$$
\begin{array}{lrcl}
1). & \frac{1}{n}\left(n[a]\right) & = & [a]. \\[2ex]
2). & n\left(\frac{1}{n}[a]\right) & = & [a], \textit{ если отрезок } \frac{1}{n}[a] \textit{ существует.} \\[2ex]
3). & [a] < [b] & \Leftrightarrow & \frac{1}{n}[a] < \frac{1}{n}[b], \textit{ если отрезки } \frac{1}{n}[a],\ \frac{1}{n}[b] \textit{ существуют.} \\[2ex]
4). & [a] = [b] & \Leftrightarrow & \frac{1}{n}[a] = \frac{1}{n}[b], \textit{ если отрезки } \frac{1}{n}[a],\ \frac{1}{n}[b] \textit{ существуют.} \\[2ex]
5). & \frac{1}{n}\left(\frac{1}{m}[a]\right) & = & \frac{1}{nm}[a], \textit{ если отрезок } \frac{1}{nm}[a] \textit{ существует.}
\end{array}
$$

Предложение 13. *([6], следствие 4.) Для всякого отрезка $[p]$ и любого числа $n \in \mathbb{N}$ существует отрезок*

$$[a] = \frac{1}{2^n}[p].$$

Предложение 14. *([6], следствие 5.) Для любых ненулевых отрезков $[a]$ и $[b]$ найдётся число $k \in \mathbb{N}$ такое, что*

$$\frac{1}{2^k}[b] < [a].$$

Предложение 15. *Если $A - P - Q$ и R – середина отрезка $[PQ]$, то*

$$[AR] = \frac{1}{2}([AP] + [AQ]). \tag{3}$$

Доказательство. Так как $A - P - Q$, то $[AP] + [PQ] = [AQ]$. Так как R – середина отрезка $[PQ]$, то по предл. 5 $[PQ] = [PR] + [RQ] = 2[PR]$ и $P - R - Q$, откуда, по предл. 1(3), $A - P - R$. Тогда по предл. 8(2) и 11(5)

$$[AP] + [AQ] = [AP] + [AP] + [PQ] = 2[AP] + 2[PR] = 2([AP] + [PR]) = 2[AR].$$

А это влечёт соотношение (3). □

Теорема 1. *Пусть $[a]$ – отрезок; m, n, k – натуральные числа. Тогда:*

1). Если отрезок $\frac{1}{n}[a]$ существует, то существует и отрезок $\frac{1}{n}\left(m[a]\right)$ и

$$m\left(\frac{1}{n}[a]\right) = \frac{1}{n}\left(m[a]\right). \tag{4}$$

2). Если существует отрезок $\frac{1}{k\cdot n}[a]$, то существует и отрезок $\frac{1}{n}[a]$, и

$$m\left(\frac{1}{n}[a]\right) = (k\cdot m)\left(\frac{1}{k\cdot n}[a]\right). \tag{5}$$

Доказательство. 1). Обозначим $m\left(\frac{1}{n}[a]\right) = [b]$. Если существует отрезок $\frac{1}{n}[a]$, то существует и отрезок $[b]$ и равенство можно переписать в виде: $\frac{1}{n}[a] = \frac{1}{m}[b]$. По предл. 11(3, 4) и предл. 12(2) тогда

$$(m\cdot n)\left(\frac{1}{n}[a]\right) = (n\cdot m)\left(\frac{1}{m}[b]\right) \;\Rightarrow\; m\left(n\left(\frac{1}{n}[a]\right)\right) = n\left(m\left(\frac{1}{m}[b]\right)\right) \;\Rightarrow\; m[a] = n[b],$$

что влечёт $[b] = \frac{1}{n}(m[a])$. Приравнивая оба выражения для $[b]$, придём к (4).

2). Существование отрезка $\frac{1}{k\cdot n}[a]$ влечёт по предл. 11(4) и 12(5,2) существование отрезка

$$(k\cdot m)\left(\frac{1}{k\cdot n}[a]\right) = m\left(k\left(\frac{1}{k}\left(\frac{1}{n}[a]\right)\right)\right) = m\left(\frac{1}{n}[a]\right).$$

Пришли к равенству (5). Доказано. □

Определение 1. *Пусть Q^+ – множество положительных рациональных чисел, L – множество отрезков. Определим отображение $Q^+ \times L \to L$ формулой:*

$$\frac{m}{n}[a] = m\left(\frac{1}{n}[a]\right), \tag{6}$$

где $m, n \in \mathbb{N}$, и будем называть его ***произведением рационального числа $\frac{m}{n}$ на отрезок*** *$[a]$ или* ***рациональной частью отрезка*** *$[a]$.*

Замечание 1. *Если мы находимся в рамках пространства, определяемого системой аксиом Гильберта $I{-}III$ и аксиомой Архимеда IV_1, то рациональная часть отрезка определена не всегда. Однако согласно предл. 13 всегда определена двоично-рациональная часть $\frac{m}{2^k}[a]$ отрезка $[a]$. Обозначим множество положительных двоично-рациональных чисел через Q_2^+. Оно образуют полугруппу относительно операции сложения и полугруппу относительно умножения. В пространстве, определяемом системой аксиом Гильберта $I - IV$, для любого отрезка $[a]$ и любого натурального числа n существует отрезок $\frac{1}{n}[a]$ ([2], теор. 6. 8, с. 213). И в силу теор. 1(2) отображение корректно определено формулой (6) в пространстве $I - IV$, а его сужение на $Q_2^+ \times L$ в пространстве $I - IV_1$. В частности, для любого $m \in \mathbb{N}$*

$$\frac{m}{1}[a] = m\left(\frac{1}{1}[a]\right) = m[a].$$

Теорема 2. *Для любых отрезков $[a]$ и $[b]$ и чисел r, r_1, $r_2 \in Q^+$ (пространство $I - IV$) либо r, r_1, $r_2 \in Q_2^+$ (пространство $I - IV_1$) справедливо:*

$$\begin{array}{lccc}
1). & r_1 < r_2 & \Leftrightarrow & r_1[a] < r_2[a]. \\
2). & r_1(r_2[a]) & = & (r_1\cdot r_2)[a]. \\
3). & [a] < [b] & \Leftrightarrow & r[a] < r[b]. \\
4). & r_1[a] + r_2[a] & = & (r_1 + r_2)[a].
\end{array}$$

Доказательство. Пусть

$$r_1 = \frac{m_1}{n_1}, \quad r_2 = \frac{m_2}{n_2}, \quad \text{где} \quad m_1, n_1, m_2, n_2 \in \mathbb{N}.$$

1). По предл. 11(1) и теор. 1(2)

$$r_1 < r_2. \Leftrightarrow m_1\cdot n_2 < m_2\cdot n_1 \Leftrightarrow \frac{m_1}{n_1}[a] = \frac{m_1\cdot n_2}{n_1\cdot n_2}[a] = (m_1\cdot n_2)\left(\frac{1}{n_1\cdot n_2}[a]\right) <$$

$$< (m_2\cdot n_1)\left(\frac{1}{n_1\cdot n_2}[a]\right) = \frac{m_2\cdot n_1}{n_1\cdot n_2}[a] = \frac{m_2}{n_2}[a] \Leftrightarrow r_1[a] < r_2[a].$$

2). Используем теоремы 1(1), предл. 11(4) и 12(5):

$$r_1(r_2[a]) = \frac{m_1}{n_1}\left(\frac{m_2}{n_2}[a]\right) = m_1\left(\frac{1}{n_1}\left(m_2\left(\frac{1}{n_2}[a]\right)\right)\right) = m_1\left(m_2\left(\frac{1}{n_1}\left(\frac{1}{n_2}[a]\right)\right)\right) =$$

$$= (m_1 \cdot m_2)\left(\frac{1}{n_1 \cdot n_2}[a]\right) = \frac{m_1 \cdot m_2}{n_1 \cdot n_2}[a] = (r_1 \cdot r_2)[a].$$

3). Вытекает из предл. 11(2) и 12(3).
4). На основании предл. 11(5).

$$r_1[a] + r_2[a] = \frac{m_1}{n_1}[a] + \frac{m_2}{n_2}[a] = \frac{m_1 \cdot n_2}{n_1 \cdot n_2}[a] + \frac{m_2 \cdot n_1}{n_1 \cdot n_2}[a] =$$

$$(m_1 \cdot n_2)\left(\frac{1}{n_1 \cdot n_2}[a]\right) + (m_2 \cdot n_1)\left(\frac{1}{n_1 \cdot n_2}[a]\right) = (m_1 \cdot n_2 + m_2 \cdot n_1)\left(\frac{1}{n_1 \cdot n_2}[a]\right) =$$

$$= \frac{m_1 \cdot n_2 + m_2 \cdot n_1}{n_1 \cdot n_2}[a] = (r_1 + r_2)[a].$$

□

4. Существование меры длины отрезка

Пусть L множество всех отрезков пространства $I - IV_1$, R множество действительных чисел.

Определение 2. *Говорят, что задана* ***мера длины отрезка****, если определено отображение $l : L \to R$, удовлетворяющее аксиомам:*
M_1) $l[AB] \geq 0$ для всех $[AB] \in L$, причём, $l[AB] = 0 \Leftrightarrow [AB] = [o]$.
M_2) если $[A_1B_1] = [AB]$, то $l[A_1B_1] = l[AB]$,
M_3) если $A - B - C$, то $l[AB] + l[BC] = l[AC]$.

Ввиду включения в множество L нулевых отрезков аксиома M_1) здесь видоизменена: в традиционных изложениях требуется, чтобы $l[AB] > 0$ для всех $[AB] \in L$. Кроме того включают требование:
M_4) существует отрезок $[PQ]$ ***(единичный или эталон)*** *такой, что $l[PQ] = 1$.*

Определение 3. *Будем говорить, что* ***последовательность точек***

$$A = A_0,\ A_1, ...,\ A_n = P_0,\ A_{n+1} = Q_0;\ P_1, Q_1,\ P_2, Q_2, ...,\ P_i, Q_i ... \tag{7}$$

реализует измерение отрезка $[AB]$ ***ненулевым отрезком*** $[p]$ ***с конца*** A, *если*
а) $[A_{i-1}A_i) \uparrow\uparrow [AB) \uparrow\uparrow [P_iQ_i)$, $i = 0, 1, ...$
б) $[A_{i-1}A_i] = [p]$, $i = 1, 2, ...$
в) $[P_iQ_i]$ является половиной отрезка $[P_{i-1}Q_{i-1}]$, $i = 1, 2, ...,$
г) $B = P_i$ либо $P_i - B - Q_i$ при всех $i = 0, 1, 2, ...,$

Теорема 3. *Для любых отрезков $[p]$ и $[AB]$, $[p] \neq [o]$, существует единственная последовательность точек, реализующая измерение отрезка $[AB]$ отрезком $[p]$ с конца A.*

Доказательство. По предл. 9 и 10 существуют единственная последовательность точек (1) на луче $[AB)$, удовлетворяющая условиям Ad_1, Ad_2, и единственное число $n \in \mathbb{N}$, для которого выполнено условие (2). Тем самым определена единственная конечная последовательность точек $A = A_0,\ A_1, ...,\ A_n,\ A_{n+1}$, для которой выполнены условия б) и частично а) определения 3 и $B = A_n$, либо $A_n - B - A_{n+1}$. Полагаем $A_n = P_0$, $A_{n+1} = Q_0$, тогда $B = P_0$ либо $P_0 - B - Q_0$. Допустим, что конечная подпоследовательность последовательности (7)

$$A = A_0,\ A_1, ...,\ A_n,\ A_{n+1};\ P_1, Q_1,\ P_2, Q_2, ...,\ P_i, Q_i$$

определена для номеров $i \geq 0$ так, что выполнены все условия определения 3. По предл. 5 существует единственная середина R_i отрезка $[P_iQ_i]$ и $P_i - R_i - Q_i$. По условию г) и предл. 1(4) для точки B справедлива одна из ситуаций:

1) $B = P_i$ и тогда полагаем: $P_{i+1} = P_i,\ Q_{i+1} = R_i$;
2) $P_i - B - R_i$ и тогда полагаем: $P_{i+1} = P_i,\ Q_{i+1} = R_i$;
3) $B = R_i$ и тогда полагаем: $P_{i+1} = R_i,\ Q_{i+1} = Q_i$;
4) $R_i - B - Q_i$ и тогда полагаем: $P_{i+1} = R_i,\ Q_{i+1} = Q_i$.

Нетрудно убедиться на основании предложений 5 и 2(2,3) что $[P_{i+1}Q_{i+1}) \uparrow\uparrow [P_iQ_i)$, $[P_{i+1}Q_{i+1}]$ – половина отрезка $[P_iQ_i]$. По индукционному предположению имеем: $[P_iQ_i) \uparrow\uparrow [AB)$. По предл. 2(1) $[P_{i+1}Q_{i+1}) \uparrow\uparrow [AB)$. Кроме того, либо $B = P_{i+1}$ (ситуации 1 и 3), либо $P_{i+1} - B - Q_{i+1}$ (ситуации 2 и 4). В силу математической индукции последовательность (7) существует. Единственность подпоследовательности $P_1, Q_1,\ P_2, Q_2, ...,\ P_i, Q_i...$ последовательности (7) вытекает из однозначной определённости точек P_i, Q_i для каждого $i = 0, 1, 2...$ В случае нулевого отрезка $[AA]$ луч $[AB)$ выбирается произвольно. □

Определение 4. ***Измеряющая функция*** *$L \to R$ задаётся для всякого ненулевого отрезка $[p]$ формулой:*

$$\theta_{[p]}(\breve{A}B) = n, j_1 j_2 ... j_k ... = n + \frac{j_1}{2} + \frac{j_2}{2^2} + ... + \frac{j_k}{2^k} + ..., \tag{8}$$

где

$$j_k = \begin{cases} 0, & \text{если } P_k = P_{k-1} \\ 1, & \text{если } Q_k = Q_{k-1} \end{cases} \tag{9}$$

при условии, что последовательность (7) реализует измерение отрезка $[AB]$ отрезком $[p]$ с конца A. Очевидно, что $\theta_{[p]}(\breve{A}A) = 0$.

Итак, значение функции $\theta_{[p]}$ на отрезке представлено разложением в бесконечную двоичную дробь. Заметим, что двоично-рациональные числа (имеющие вид несократимой дроби $\frac{m}{2^k}$) и только они имеют 2 разложения:

$$n, j_1 j_2 ... j_{i-1} 100...0... \quad \text{или} \quad n, j_1 j_2 ... j_{i-1} 011...1...,$$

в которых, начиная с некоторого знака после запятой, идут либо одни нули либо одни единицы. В этом случае будем применять обозначение $n, j_1 j_2 ... j_{i-1} 1$.

Лемма 1. *Если $\theta_{[p]}(\breve{A}B) = n, j_1 j_2 ... j_k ...$, то для последовательности (7), реализующей измерение отрезка $[AB]$ отрезком $[p]$ с конца A, при обозначении*

$$r_i = n, j_1 j_2 ... j_i = n + \frac{j_0}{2^0} + \frac{j_1}{2^1} + ... + \frac{j_i}{2^i} \tag{10}$$

для всех $i = 0, 1, ...$ справедливо:

$$[AP_i] = r_i[p], \quad [AQ_i] = \left(r_i + \frac{1}{2^i}\right)[p], \tag{11}$$

если условиться, что $j_0 = 0$.

Доказательство. – индукцией по i.

$i = 0$. Имеем

$$[AP_0] = [AA_n] = n[p] = r_0[p],$$

$$[AQ_0] = [AA_{n+1}] = (n+1)[p] = \left(n + \frac{1}{2^0}\right)[p] = \left(r_0 + \frac{1}{2^0}\right)[p].$$

Верно.

Пусть утверждение истинно для $i-1$ при $i>0$, т.е.

$$[AP_{i-1}] = r_{i-1}[p], \quad [AQ_{i-1}] = \left(r_{i-1} + \frac{1}{2^{i-1}}\right)[p].$$

Обозначим через R_{i-1} середину отрезка $[P_{i-1}Q_{i-1}]$. По предл. 15 и теор. 2(2,4)

$$[AR_{i-1}] = \frac{1}{2}([AP_{i-1}] + [AQ_{i-1}]) = \frac{1}{2}\left(r_{i-1}[p] + \left(r_{i-1} + \frac{1}{2^{i-1}}\right)[p]\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(r_{i-1} + r_{i-1} + \frac{1}{2^{i-1}}\right)[p]\right) = \left(r_{i-1} + \frac{1}{2^{i}}\right)[p].$$

Заметим, что для всех $i = 1, 2...$

$$r_i = r_{i-1} + \frac{j_i}{2^i}. \tag{12}$$

Если $j_i = 0$, то $r_i = r_{i-1}$, а по формуле (9) $P_i = P_{i-1}$, и, как следует из доказательства теор. 3 (случаи 1 и 2), $Q_i = R_{i-1}$. Поэтому:

$$[AP_i] = [AP_{i-1}] = r_{i-1}[p] = r_i[p],$$

$$[AQ_i] = [AR_{i-1}] = \left(r_{i-1} + \frac{1}{2^i}\right)[p] = \left(r_i + \frac{1}{2^i}\right)[p].$$

Если $j_i = 1$, то по формуле (12) $r_i = r_{i-1} + \frac{1}{2^i}$, а в силу формулы (9) $Q_i = Q_{i-1}$, и, как следует из доказательства теор. 3 (случаи 3 и 4), $P_i = R_{i-1}$. Поэтому:

$$[AP_i] = [AR_{i-1}] = \left(r_{i-1} + \frac{1}{2^i}\right)[p] = r_i[p],$$

$$[AQ_i] = [AQ_{i-1}] = \left(r_{i-1} + \frac{1}{2^{i-1}}\right)[p] = \left(r_{i-1} + \frac{1}{2^i} + \frac{1}{2^i}\right)[p] = \left(r_i + \frac{1}{2^i}\right)[p].$$

В обоих случаях приходим к формулам (11). По принципу математической индукции утверждение справедливо при всех натуральных i. □

Замечание 2. *Здесь даже для ненулевого отрезка $[AB]$ может быть $P_i = P_0$, а, значит, $[AP_i] = [AA]$ ($[AQ_i]$ всегда ненулевой отрезок), что вызвало необходимость расширить класс отрезков, включив в него нулевые отрезки.*

Следствие 1. *Для последовательности (7), реализующей измерение отрезка $[AB]$ отрезком $[p]$ с конца A при всех $i = 0, 1, ...$ справедливо:*

$$r_i[p] = [AP_i] \le [AB] < [AQ_i] = \left(r_i + \frac{1}{2^i}\right)[p]. \tag{13}$$

Доказательство. Действительно, из формул (11) по теор. 2(1) имеем: $[AP_i] < [AQ_i]$, что влечёт $A - P_i - Q_i$. По свойству г) реализующей измерение последовательности должно выполняться $P_i - B - Q_i$ либо $B = P_i$. Применяя предл. 7 и лемму 1, получим формулу (13). □

Лемма 2. *Пусть $\theta_{[p]}(\breve{A}B) = m, s_1 s_2 ... s_k ....$ Если для некоторого $i = 0, 1, ...$*

$$\left(n + \frac{j_0}{2^0} + \frac{j_1}{2^1} + ... + \frac{j_i}{2^i}\right)[p] \le [AB] < \left(n + \frac{j_0}{2^0} + \frac{j_1}{2^1} + ... + \frac{j_i}{2^i} + \frac{1}{2^i}\right)[p], \tag{14}$$

($j_0 = 0$, а j_1, $...j_i$ принимают значения 0 или 1), то

$$m, s_1 s_2 ... s_i = n, j_1 j_2 ... j_i.$$

Доказательство. При $0 \le k < i$ сделаем оценку выражения

$$r_i = n + \frac{j_0}{2^0} + \frac{j_1}{2^1} + ... + \frac{j_i}{2^i}$$

снизу, произведя замену $j_{k+1} = ... = j_i = 0:$

$$r_k = n + \frac{j_0}{2^0} + \frac{j_1}{2^1} + ... + \frac{j_k}{2^k} \le n + \frac{j_0}{2^0} + \frac{j_1}{2^1} + ... + \frac{j_i}{2^i} = r_i.$$

Теперь оценим выражение $r_i + \frac{1}{2^i}$ сверху, произведя замену $j_{k+1} = ... = j_i = 1$ и, применив формулу суммы геометрической прогрессии:

$$r_i + \frac{1}{2^i} \le n + \frac{j_0}{2^0} + \frac{j_1}{2^1} + ... + \frac{j_k}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} + ... + \frac{1}{2^i} + \frac{1}{2^i} =$$

$$= r_k + \frac{1}{2^{k+1}}\left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{2^{i-k-1}}\right) + \frac{1}{2^i} = r_k + \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^i} + \frac{1}{2^i} = r_k + \frac{1}{2^k}.$$

Таким образом,

$$r_k \le r_i; \qquad r_i + \frac{1}{2^i} \le r_k + \frac{1}{2^k}.$$

По теор. 2(1) из (14) выводим для всех $0 \le k \le i:$

$$r_k[p] \le [AB] < \left(r_k + \frac{1}{2^k}\right)[p]. \tag{15}$$

Индукцией по k, $0 \le k \le i$, докажем:

$$m, s_1 s_2 ... s_k = n, j_1 j_2 ... j_k.$$

Пусть (7) – последовательность точек, реализующая измерение отрезка $[AB]$ отрезком $[p]$ с конца A. При $k = 0$ неравенства (15) дают:

$$n[p] \le [AB] < (n+1)[p], \quad \text{т.е. } [AA_n] \le [AB] < [AA_{n+1}]. \ \Rightarrow\ B = A_n \text{ или } A_n - B - A_{n+1}.$$

По предл. 10 и определению $\theta_{[p]}$ должно выполняться: $m = n$. Пусть равенство справедливо для некоторого k, $0 \le k < i$. Обозначим $[AP_k] = [q_k]$. По лемме 1

$$[q_k] = \left(m + \frac{s_0}{2^0} + \frac{s_1}{2^1} + ... + \frac{s_k}{2^k}\right)[p],$$

а ввиду индукционного допущения $[q_k] = r_k[p]$. Формулы (11) с учётом теор. 2(4) дают

$$[AQ_k] = [q_k] + \frac{1}{2^k}[p].$$

Допустим, что $j_{k+1} \ne s_{k+1}$, например, $j_{k+1} = 0$, а $s_{k+1} = 1$. Так как $j_{k+1} = 0$, то $r_{k+1} = r_k$, и неравенства (15) для $k+1$ примут вид:

$$r_k[p] \le [AB] < \left(r_k + \frac{1}{2^{k+1}}\right)[p]$$

или

$$[q_k] \le [AB] < [q_k] + \frac{1}{2^{k+1}}[p]. \tag{16}$$

Формулы (9) при $s_{k+1} = 1$, как явствует из доказательства теор. 3, означают, что $Q_{k+1} = Q_k$, $P_{k+1} = R_k$ – середина отрезка $[P_kQ_k]$. Следовательно,

$$[AQ_{k+1}] = [AQ_k] = [q_k] + \frac{1}{2^k}[p],$$

$$[AP_{k+1}] = [AR_k] = \frac{1}{2}\left([AP_k] + [AQ_k]\right) = \frac{1}{2}\left([q_k] + [q_k] + \frac{1}{2^k}[p]\right) = [q_k] + \frac{1}{2^{k+1}}[p].$$

Неравенства (13) для $i = k+1$ принимают вид:

$$[q_k] + \frac{1}{2^{k+1}}[p] \leq [AB] < [q_k] + \frac{1}{2^k}[p]. \tag{17}$$

При $j_{k+1} = 1$, $s_{k+1} = 0$ из $j_{k+1} = 1$ вытекает (17), а из $s_{k+1} = 0$ следует (16). В обоих случаях из-за транзитивности отношения "$<$" формулы (16) и (17) приводят к неравенству $[AB] < [AB]$, противоречащему предложениям 6(2) и 3. Допущение было ложным и $j_{k+1} = s_{k+1}$. По принципу математической индукции утверждение истинно. □

Теорема 4. *Если* $[AB] = [A'B']$, *то для любого ненулевого отрезка* $[p]$ *справедливо*

$$\theta_{[p]}(\breve{A}B) = \theta_{[p]}(\breve{A}'B').$$

Доказательство. Пусть

$$\theta_{[p]}(\breve{A}B) = n, j_1j_2...j_k..., \qquad \theta_{[p]}(\breve{A}'B') = m, s_1s_2...s_k....$$

По следствию 1 и предл. 6(1) и 3 конгруэнтность отрезков $[AB] = [A'B']$ влечёт при обозначении (10): $r_i[p] \leq [A'B'] < \left(r_i + \frac{1}{2^i}\right)[p]$ при всех $i = 0, 1, ...$ По лемме 2

$$n, j_1j_2...j_k = m, s_1s_2...s_k$$

при всех $k = 1, 2, ...$, а, значит, и

$$n, j_1j_2...j_k... = m, s_1s_2...s_k...,$$

что и требовалось доказать. □

На основании аксиомы III_0 из теор. 4 выводится:

Следствие 2. *Для любого ненулевого отрезка* $[p]$ *справедливо*

$$\theta_{[p]}(\breve{A}B) = \theta_{[p]}(\breve{B}A).$$

Благодаря этому утверждению мы можем в дальнейшем не помечать, с какого конца начинается измерение отрезка. Кроме того, ввиду теоремы 4 оправдано обозначение $\theta_{[p]}[a] = \theta_{[p]}(\breve{A}B)$ для отрезка $[a] = [AB]$.

Следствие 3. *Если*

$$\theta_{[p]}[AB] = m, s_1s_2...s_k....$$

и выполнены условия (14), то с учётом обозначений (10) имеем:

$$r_i \leq \theta_{[p]}[AB] \leq r_i + \frac{1}{2^i}.$$

Доказательство. Действительно, согласно лемме 2

$$\theta_{[p]}[AB] = n + \frac{j_0}{2^0} + \frac{j_1}{2^1} + ... + \frac{j_i}{2^i} + \frac{s_{i+1}}{2^{i+1}} + \frac{s_{i+2}}{2^{i+2}} + ... = r_i + \frac{s_{i+1}}{2^{i+1}} + \frac{s_{i+2}}{2^{i+2}} + ...$$

Полагая в формуле $s_{i+1} = s_{i+2} = ... = 0$, получим нижнюю оценку числа $\theta_{[p]}[AB]$, а, полагая $s_{i+1} = s_{i+2} = ... = 1$, получим верхнюю оценку. □

Лемма 3. *Для любого отрезка* $[p]$ *и любого двоично-рационального числа* r*:*

$$\theta_{[p]}(r[p]) = r.$$

В частности, $\theta_{[p]}([p]) = \theta_{[p]}(1[p]) = 1, \qquad \theta_{[p]}([o]) = \theta_{[p]}(0[p]) = 0.$

Доказательство. Двоично-рациональное число $\frac{m}{2^i}$, где $m, i \in \mathbb{N}$, представимо формулой (10). Оно является целым числом при $i = 0$ и дробным при $i \neq 0$. По теор. 2(1) для отрезка $[a] = r[p]$ справедливы для всех $k \geq i$ неравенства:

$$r[p] \leq [a] < \left(r + \frac{1}{2^k}\right)[p].$$

По лемме 2 это означает, что $\theta_{[p]}(r[p]) = n, j_1 j_2 ... j_i 00...0...$, где после i-ой цифры после запятой идут одни нули, которые можно отбросить. □

Теорема 5. *Для любых отрезков* $[a]$, $[b]$, $[p]$, $[p] \neq [o]$,

$$[a] < [b] \quad \Rightarrow \quad \theta_{[p]}[a] < \theta_{[p]}[b].$$

Доказательство. Отложим на некотором луче от его вершины O отрезки $[a] = [OA]$ и $[b] = [OB]$. По предл. 14 для отрезков $[AB]$, $[OA]$ и $[p]$ найдётся натуральное число k такое, что $\frac{1}{2^k}[p] < [AB]$ и $\frac{1}{2^k}[p] < [OA]$. По предл. 13 существует отрезок $[q] = \frac{1}{2^{k+1}}[p]$. Тогда $2[q] < [AB]$ и $2[q] < [OA]$. По предл. 9 по отрезку $[q]$ однозначно определяется последовательность точек $O = A_0, A_1, ..., A_i, ...$ луча $[OB)$, для которой выполнены условия Ad_1 и Ad_2. По предл. 10 найдутся единственные натуральные числа m и n такие, что $A_m = A$ либо $A_m - A - A_{m+1}$, и $A_n = B$ либо $A_n - B - A_{n+1}$, что можно записать иначе:

$$[OA_m] = m[q] \leq [a] < (m+1)[q] = [OA_{m+1}], \tag{18}$$

$$[OA_n] = n[q] \leq [b] < (n+1)[q] = [OA_{n+1}]. \tag{19}$$

Так как $[a] < [b]$, то в силу транзитивности отношения $<$ имеем: $m[q] < (n+1)[q]$, откуда следует по предл. 11(1), что $m < n+1$. Тогда $m+1 \leq n+1$. $\Rightarrow$ $m \leq n$. Если бы выполнялось $m = n$, то обе точки A и B принадлежали бы отрезку $[A_m A_{m+1}]$, и по предл. 6(4) имели бы: $[AB] < [A_m A_{m+1}] = [q]$. Но $[q] < 2[q] < [AB]$. Пришли к противоречию: $[AB] < [AB]$. Значит, $m < n \;\Rightarrow\; m+1 \leq n$. Если допустить, что $m+1 = n$, то точки A и B обе принадлежали бы отрезку $[A_m A_{n+1}] = [A_m A_{m+2}]$, и выполнялось бы: $[AB] < [A_m A_{m+2}] = 2[q]$. Но $2[q] < [AB]$. Опять противоречие: $[AB] < [AB]$. Значит, $m+1 < n$. Формулы (18) и (19) можно переписать в виде:

$$\frac{m}{2^{k+1}}[p] \leq [a] < \frac{m+1}{2^{k+1}}[p], \qquad \frac{n}{2^{k+1}}[p] \leq [b] < \frac{n+1}{2^{k+1}}[p].$$

По следствию 3:

$$\theta_{[p]}[a] \leq \frac{m+1}{2^{k+1}}, \qquad \frac{n}{2^{k+1}} \leq \theta_{[p]}[b].$$

Учитывая, что $m+1 < n$, получаем строгое неравенство: $\theta_{[p]}[a] < \theta_{[p]}[b]$. Доказано. □

Теорема 6. *Для любых отрезков* $[a]$, $[b]$, $[p] \neq [o]$ *и* $[c] = [a] + [b]$

$$\theta_{[p]}[a] + \theta_{[p]}[b] = \theta_{[p]}[c]. \tag{20}$$

Доказательство. По предл. 13 для заданного отрезка $[p]$ и любого числа $k \in N$ существует отрезок

$$[q] = \frac{1}{2^k}[p].$$

В силу предл. 14 число k можно считать настолько большим, что $[q] < [a]$ и $[q] < [b]$. По предл. 10 найдутся натуральные числа m и n, зависящие от k, такие, что

$$m[q] \leq [a] < (m+1)[q], \qquad n[q] \leq [b] < (n+1)[q].$$

Эти неравенства можно переписать в виде:

$$\frac{m}{2^k}[p] \leq [a] < \frac{m+1}{2^k}[p], \qquad \frac{n}{2^k}[p] \leq [b] < \frac{n+1}{2^k}[p].$$

По предл. 8(3-5) и теор. 2(4) отсюда следует:

$$\frac{m+n}{2^k}[p] \leq [a] + [b] = [c] < \frac{m+n+2}{2^k}[p].$$

На основании теор. 5 и леммы 3 из всех этих неравенств выводим:

$$\frac{m}{2^k} \leq \theta_{[p]}[a] < \frac{m+1}{2^k}, \qquad \frac{n}{2^k} \leq \theta_{[p]}[b] < \frac{n+1}{2^k}, \qquad \frac{m+n}{2^k} \leq \theta_{[p]}[c] < \frac{m+n+2}{2^k}.$$

Складывая первые два двойных неравенства и вычитая третье двойное неравенство, получим:

$$\left|\theta_{[p]}[a] + \theta_{[p]}[b] - \theta_{[p]}([c])\right| < \frac{2}{2^k} = \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Поскольку неравенство справедливо для всех k, начиная с некоторого номера, то формула (20) доказана. □

Теорема 7. *Для любого ненулевого отрезка* $[p]$ *функция* $\theta_{[p]}$ *удовлетворяет требованиям* $M_1) - M_4)$, *т. е. является мерой длины отрезка.*

Доказательство. Условие $M_1)$ выполнено в силу формул (8), (9) и леммы 3. Причём, если $[AB] \neq 0$, то по предл. 14 найдётся число $k \in \mathbb{N}$, такое, что $\frac{1}{2^k}[p] < [AB]$. Тогда по теор. 5 и лемме 3

$$\theta_{[p]}[AB] > \theta_{[p]}\left(\frac{1}{2^k}[p]\right) = \frac{1}{2^k} > 0.$$

Условие $M_2)$ следует из теор. 4, $M_3)$ – из теор. 6, $M_4)$ из леммы 3. □

5. Заключение

Предложенное конструктивное доказательство существования меры длины отрезка, хотя по своим идеям восходит к представленному в учебниках [3–5], но отличается от них не только подробностью изложения. В указанных источниках проверка выполнения аксиом меры для измеряющей функции на каждом этапе сопровождается воспроизведением процесса последовательного откладывания эталона. У нас же после установления связи между мерой длины отрезка и его сравнениями с двоично-рациональными частями эталона, зажимающими измеряемый отрезок сверху и снизу (леммы 1-3, теор. 5), проверка выполнения аксиом меры для измеряющей функции в дальнейшем осуществляется чисто алгебраически и опирается на свойства сравнения отрезков, сложения их и умножения на двоично-рациональные числа. Алгебраический подход выявил целесообразность расширения класса отрезков за счёт включения в него нулевых отрезков, что привело к незначительному видоизменению понятия меры.

Существенными моментами доказательства является тот факт, что мера отрезка $r[p]$, где r – двоично-рациональное число, равна r, а также возможность приближать отрезок двоично-рациональными частями эталона. Стоит отметить, что построение середины отрезка обеспечивается всем комплексом пространственных аксиом (Паша, конгруэнтности углов и т. д.). Поэтому указанный процесс измерения отрезков на прямой является внешним по отношению к прямой. В [8] представлен внутренний процесс измерения отрезков, основанный на алгоритме Евклида. При этом система аксиом задаёт евклидову прямую как самостоятельную структуру, а не как элемент евклидова пространства.

Список литературы

1. Атанасян Л.С., Гуревич Г.В. Геометрия: в 2 частях. – Ч. 2. — М. : Просвещение, 1976.

2. Трайнин Я.Л. Основания геометрии. — М. : Учпедгиз, 1961.

3. Атанасян Л.С., Базылев В.Т. Геометрия: в 2 частях. – Ч. 2. — М. : КНОРУС, 2015.

4. Бахвалов С.В., Иваницкая В.П. Основания геометрии (главы высшей геометрии). – Ч. 1. — М. : Высшая школа, 1976.

5. Ефимов Н.В. Высшая геометрия. — М. : Наука, 1971.

6. Поликанова И.В. О единственности меры длины отрезка // Труды семинара по геометрии и математическому моделированию. — 2020. — № 6. — С. 56–73.

7. Гильберт Д. Основания геометрии. — М. : Гостехиздат, 1948.

8. Каган В.Ф. Основания геометрии: в 2 частях. – Ч. 2. — М. : Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1956.