

Преобразование Бианки катушки Миндинга в E^3

Чешкова М.А.

*Алтайский государственный университет, г. Барнаул
ста41@yandex.ru*

Аннотация

The work is devoted to the construction of the Bianchi transform for surfaces of revolution of constant negative Gaussian curvature. The surfaces of revolution of constant negative Gaussian curvature are the Minging top, Minging coil, pseudosphere (Beltrami surface). Constructed Bianchi transform for Minding coil. The surfaces under study are described using elliptic integrals. Using the math package, the Minging coil and its Bianchi transform are built. The surfaces under study are described using elliptic integrals.

Ключевые слова: Bianchi transform, Minging coil, Gaussian curvature, elliptic integrals.

1. Введение

Изучение псевдосферических поверхностей имеет большое значение для интерпретаций планиметрии Лобачевского. Установлена связь геометрических характеристик псевдосферических поверхностей с нелинейными дифференциальными уравнениями и уравнениями \sin -Гордона.

Уравнение \sin -Гордона играет важную роль в современной физике [1].

Преобразования Бианки позволяют по данной псевдосферической поверхности получить новые псевдосферические поверхности.

Теория преобразования Бианки в трехмерном пространстве E^3 и теория n -мерных многообразий в E^{2n-1} излагается работе Аминова Ю.А. [2] и Tonenblat К. [3].

Преобразованию Бианки посвящены работы [4, 5].

Данная работа посвящена изучению преобразования Бианки поверхностей вращения постоянной отрицательной гауссовой кривизны.

В [6, с. 100], [7, с. 175] описаны поверхности вращения постоянной гауссовой кривизны.

Поверхности постоянной отрицательной гауссовой кривизны – это волчок Миндинга, катушка Миндинга, псевдосфера.

Построено преобразование Бианки для катушки Миндинга.

Используя математический пакет строится трехмерная модель катушки Миндинга и её преобразование Бианки.

2. Основные формулы

В евклидовом пространстве E^3 рассмотрим поверхность вращения M , полученную вращением плоской кривой вокруг оси.

Обозначим через $k = (0, 0, 1)$ – орт оси, а через $e = (\cos v, \sin v, 0)$ – радиус-вектор единичной окружности, расположенной в плоскости, ортогональной оси.

Тогда поверхность вращения M можно задать в виде

$$r = ue(v) + f(u)k, \quad (1)$$

где $f = f(u)$ – дифференцируемая функция, u, v – параметры.

Имеем

$$\begin{aligned} r_1 = r_u &= e(v) + f'(u)k, & r_2 = r_v &= ue'(v), \\ r_{11} = r_{uu} &= f''(u)k, & r_{12} = r_{uv} &= e'(v), \\ r_{22} = r_{vv} &= -ue(v), & g_{11} = (r_1, r_1) &= (f'(u))^2 + 1, \\ g_{12} = (r_1, r_2) &= 0, & g_{22} = (r_2, r_2) &= u^2. \end{aligned}$$

Обозначим через n – орт нормали к поверхности M . Тогда

$$n = \frac{f'(u)e(v) - k}{\sqrt{(f'(u))^2 + 1}}.$$

Главные кривизны k_1, k_2 поверхности M имеют вид

$$k_1 = -\frac{f''(u)}{\sqrt{(f'(u))^2 + 1}^3}, \quad k_2 = -\frac{f'(u)}{u\sqrt{(f'(u))^2 + 1}}. \quad (2)$$

Имеем дифференциальное уравнение поверхности вращения постоянной гауссовой кривизны K

$$\frac{f'(u)f''(u)}{u((f'(u))^2 + 1)^2} = K. \quad (3)$$

Замечаем, что

$$\left(\frac{1}{(f'(u))^2 + 1} \right)' = -\frac{2f'(u)f''(u)}{((f'(u))^2 + 1)^2}.$$

Требую $K = const$, получим решения

$$f(u) = \pm \int \sqrt{\frac{Ku^2 - (c-1)}{c - Ku^2}} du. \quad (4)$$

Поверхности вращения положительной отрицательной гауссовой кривизны – это волчок Миндинга $0 < c < 1$, катушка Миндинга $c < 0$, псевдосфера $c = 0$ [6, с. 100], [7, с. 175].

3. Преобразование Бианки.

Классическая теорема Беклунда утверждает, что фокальные поверхности псевдосферической конгруэнции в E^3 имеют одинаковую постоянную отрицательную кривизну. В этом случае касательные плоскости к фокальным поверхностям пересекаются под постоянным углом θ и расстояние между фокальными точками постоянно.

Если угол θ прямой, то преобразование Беклунда называется преобразованием Бианки.

Рассмотрим две гладкие поверхности M, \bar{M} и диффеоморфизм $f : M \rightarrow \bar{M}$. Касательные плоскости в соответствующих точках $p \in M, f(p) \in \bar{M}$ пересекаются по прямой $(p, f(p))$, образуя прямой двугранный угол, причем вектор $\overrightarrow{pf(p)} = \rho V_p$, где V_p – орт, $\rho = const$. Обозначим через n – орт нормали к поверхности M в точке $p \in M$. Тогда касательная плоскость к поверхности \bar{M} в точке $f(p) \in \bar{M}$ имеет вид $T_{f(p)}\bar{M} = \{f(p), n, V\}$.

Теорема Бианки утверждает, что если поверхность M имеет гауссову кривизну $K = -\frac{1}{\rho^2}$, то и поверхность \bar{M} имеет ту же кривизну.

Обозначим через r – радиус-вектор поверхности M , а через R – радиус-вектор поаерхности \bar{M} . Полагаем $K = -1$ и рассмотрим отображение [8], [9, с. 489].

Имеем

$$R = r - V. \quad (5)$$

Из условия $\langle R_i, [n, V] \rangle = 0$ получим

$$r_i - \partial_i V = \omega(r_i)V + \alpha(r_i)n.$$

Так как $\langle V, V \rangle = 1$, $\langle \partial_i V, V \rangle = 0$, то

$$\omega(r_i) = \langle r_i, V \rangle, \quad \nabla_i V = r_i - \omega(r_i)V.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \nabla_1 V^1 &= 1 - g_{11}(V^1)^2, \quad \nabla_1 V^2 = -g_{11}V^1V^2, \\ \nabla_2 V^1 &= -g_{22}V^1V^2, \quad \nabla_2 V^2 = 1 - g_{22}(V^2)^2. \end{aligned} \quad (6)$$

4. Катушка Миндинга

Будем строить преобразование Бианки катушки Миндинга.

При $c < 0$ имеем катушку Миндинга [6, с. 100], [7, с. 175]. Следуя Миндингу, полагаем $c = -a^2$, $u = a \operatorname{ch} t$.

Имеем

$$f(t) = \pm \int \sqrt{1 - a^2 \operatorname{sh}^2(t)} dt.$$

Полагая $a = 1$, получим

$$f(t) = \pm \int \sqrt{1 - \operatorname{sh}^2 t} dt, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} f(t) &= \pm 2(\operatorname{Elliptic}F(\operatorname{sh} t, I) - \operatorname{Elliptic}E(\operatorname{sh} t, I)) + C, \\ C &= \operatorname{const}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\operatorname{Elliptic}F(\operatorname{sh} t, I)$, $\operatorname{Elliptic}E(\operatorname{sh} t, I)$ эллиптические интегралы первого и второго рода, соответственно [10, с. 92].

При $1 - \operatorname{sh}^2 t > 0$ имеем $t \in [-\ln(1 + \sqrt{2}), \ln(1 + \sqrt{2})]$.

Полагаем $C = 0$, $f(t) = 2(\operatorname{Elliptic}F(\operatorname{sh} t, I) - \operatorname{Elliptic}E(\operatorname{sh} t, I))$ и рассмотрим катушку Миндинга

$$M : r(t, v) = \operatorname{ch} t e(v) + f(t)k,$$

$t \in [-\ln(1 + \sqrt{2}), \ln(1 + \sqrt{2})]$, $v \in [-\pi, \pi]$.

Построим катушку Миндинга (рис. 1).

Положим $C = f(\ln(1 + \sqrt{2}))$ и определим еще две секции катушки Миндинга

$$M1 : r(t, v) = \operatorname{ch} t e(v) + (f(t) + 2C)k,$$

$t \in [-\ln(1 + \sqrt{2}), \ln(1 + \sqrt{2})]$, $v \in [-\pi, \pi]$.

$$M2 : r(t, v) = \operatorname{ch} t e(v) + (f(t) + 4C)k,$$

$t \in [-\ln(1 + \sqrt{2}), \ln(1 + \sqrt{2})]$, $v \in [-\pi, \pi]$.

Построим три секции катушки Миндинга (рис. 2).

Определим преобразование Бианки катушки Миндинга.

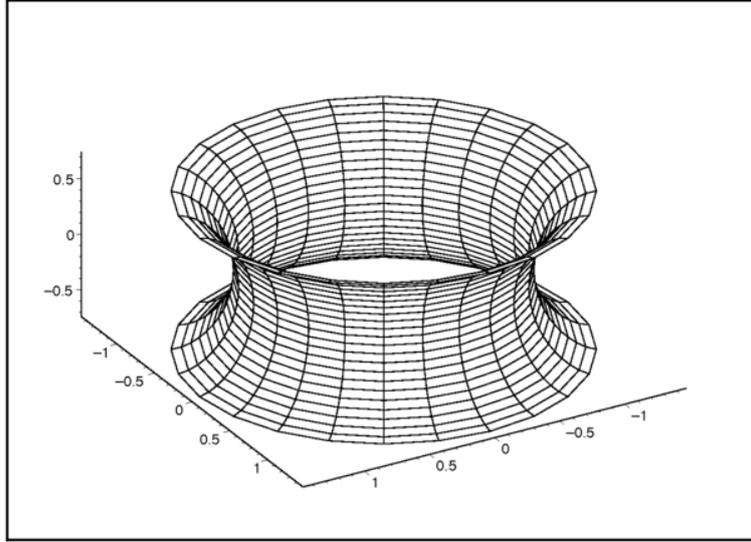
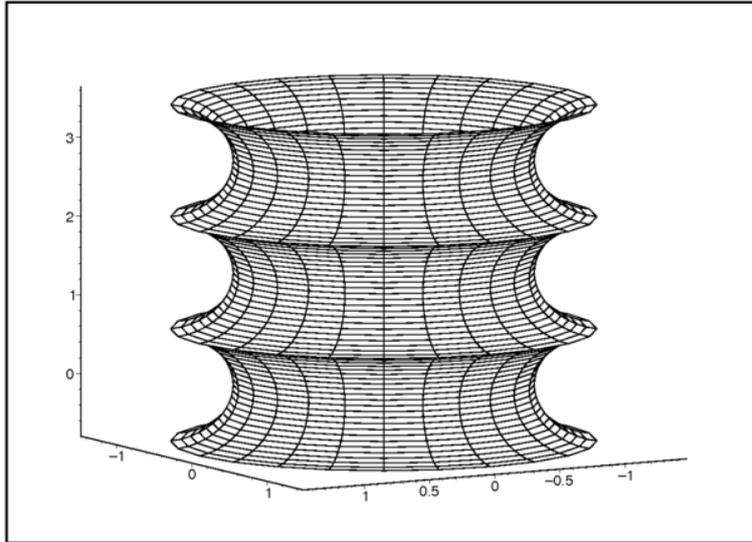
Имеем

$$r_1 = r_t = \operatorname{sh} t e(v) + f'(t)k, \quad r_2 = r_v = \operatorname{ch} t e'(v), \quad (9)$$

$$r_{11} = r_{tt} = \operatorname{ch} t e(v) + f''(t)k, \quad r_{12} = r_{tv} = \operatorname{sh} t e'(v),$$

$$r_{22} = r_{vv} = \operatorname{ch} t e''(v) = -\operatorname{ch} t e(v),$$

$$f'(t) = \sqrt{1 - \operatorname{sh}^2 t}, \quad f''(t) = -\frac{\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t}{\sqrt{1 - \operatorname{sh}^2 t}}, \quad (10)$$

Рисунок 1. Катушка Миндинга M Рисунок 2. Три секции катушки Миндинга M

$$g_{11} = (r_1, r_1) = 1, \quad g_{12} = (r_1, r_2) = 0, \quad g_{22} = (r_2, r_2) = \text{ch}^2 t, \quad (11)$$

$ds^2 = dt^2 + \text{ch}^2(t)dv^2$. Координатная система полугеодезическая.

Определим символы Кристоффеля Γ_{ij}^k из условия $(r_{ij}, r_k) = \Gamma_{ij}^s (r_s, r_k)$.

Итак,

$$\Gamma_{22}^1 = -\text{sh } t \text{ ch } t, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \text{th } t, \quad \text{th } t = \frac{\text{sh } t}{\text{ch } t}. \quad (12)$$

Остальные Γ_{ij}^k равны нулю.

Формулы (6) примут вид

$$\begin{aligned} \partial_t V^1 &= 1 - (V^1)^2, \quad \partial_t V^2 + \frac{\text{sh } t}{\text{ch } t} V^2 = -V^1 V^2, \\ \partial_v V^1 - \text{ch } t \text{ sh } t V^2 &= -\text{ch}^2 t V^1 V^2, \\ \partial_v V^2 + \frac{\text{sh } t}{\text{ch } t} V^1 &= 1 - \text{ch}^2 t (V^2)^2. \end{aligned} \quad (13)$$

Рассмотрим решение системы (13):

$$V^1 = \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t}, V^2 = \pm \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t}. \quad (14)$$

Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Если поверхность $M : r = r(t, v)$ есть катушка Миндинга и поверхность \bar{M} имеет уравнение

$$\bar{M} : R = r(t, v) - \left(\frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t} r_t \pm \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t} r_v \right),$$

то преобразование $f : M \rightarrow \bar{M}$ есть преобразование Бианки.

Таким образом, поверхность \bar{M} имеет уравнение

$$\bar{M} : R(t, v) = \left(\operatorname{ch} t \cos v, \operatorname{ch} t \sin v, 2(\operatorname{Elliptic}F(\operatorname{sh} t, I) - \operatorname{Elliptic}E(\operatorname{sh} t, I)) - \left(\operatorname{th} t r_t \pm \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t} r_v \right) \right),$$

$$r_t = \operatorname{sh} t e(v) + \sqrt{1 - \operatorname{sh}^2 t k}, r_v = \operatorname{ch} t e'(v).$$

$$t \in [-\ln(1 + \sqrt{2}), \ln(1 + \sqrt{2})], v \in [-\pi, \pi].$$

Построим поверхность \bar{M} , при $V^1 = \operatorname{th} t$, $V^2 = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t}$, $t \in [-\ln(1 + \sqrt{2}), \ln(1 + \sqrt{2})]$, $v \in [-\pi, \pi]$ (рис. 3).

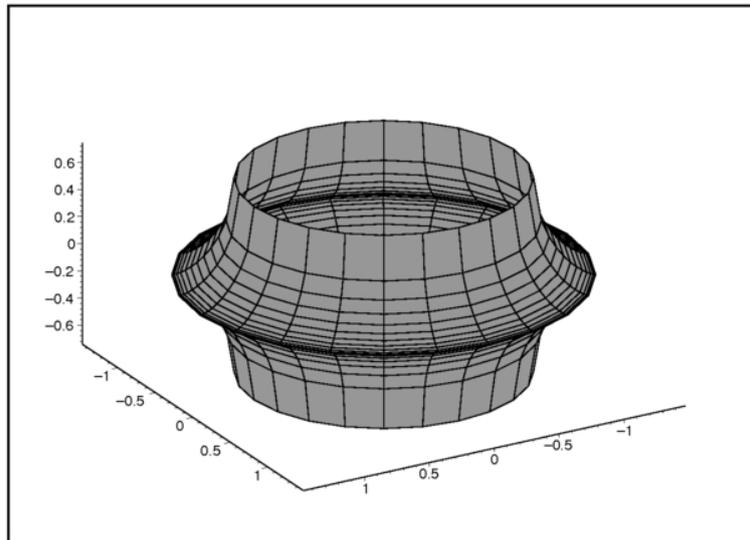


Рисунок 3. Поверхность \bar{M}

Теорема 2. Коэффициенты \bar{g}_{ij} первой квадратичной формы поверхности $\bar{M} : R(t, v) = r(t, v) - (\operatorname{th}(t)r_t + \frac{1}{\operatorname{ch}^2(t)}r_v)$ равны

$$\bar{g}_{11} = \frac{2 \operatorname{th}^2 t}{1 - \operatorname{sh}^2 t}, \bar{g}_{12} = 0, \bar{g}_{22} = \frac{2}{\operatorname{ch}^2 t}. \quad (15)$$

Доказательство. Имеем

$$R_1 = r_1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t} r_1 - \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t} r_{11} + 2 \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^3 t} r_2 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t} r_{21},$$

$$R_2 = r_2 - \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t} r_{12} - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t} r_{22}.$$

Используя формулы (9), (10), получим

$$R_1 = \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2 t} (-e(v) + e'(v) + \frac{2 \operatorname{sh} t}{\sqrt{1 - \operatorname{sh}^2 t}} k),$$

$$R_2 = \frac{1}{\operatorname{ch} t} (e(v) + e'(v)).$$

Откуда следует (15). □

Используя формулу Бриоски-Фробениуса [11, с. 348] для ортогональной параметризации

$$\bar{K} = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(\partial_t \frac{G_t}{\sqrt{EG}} + \partial_v \frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right),$$

где $E = \bar{g}_{11}$, $G = \bar{g}_{22}$, убеждаемся $\bar{K} = -1$.

Построим поверхности M , \bar{M} при $t \in [-\ln(1 + \sqrt{2}), \ln(1 + \sqrt{2})]$, $v \in [-\pi, \pi]$ (рис. 4).

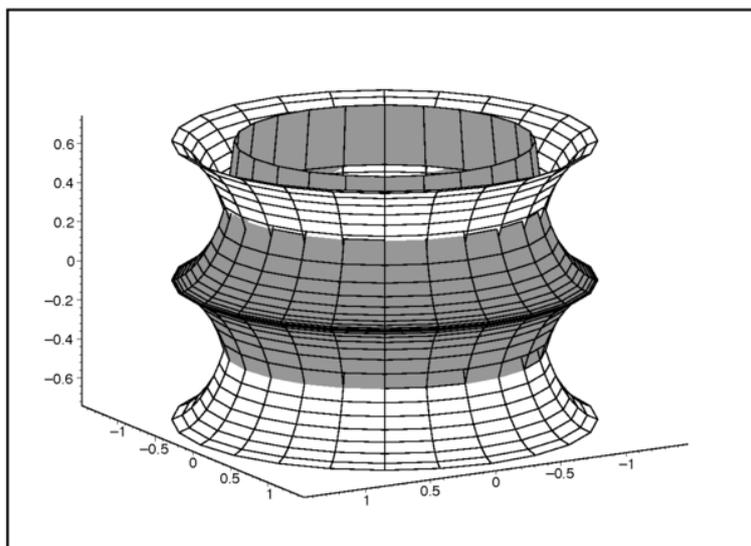


Рисунок 4. Поверхности M , \bar{M}

Замечание 1. Если выбрать $V^1 = \operatorname{th} t$, $V^2 = -\frac{1}{\operatorname{ch}^2 t}$, получим тот же график поверхности \bar{M} и тот же метрический тензор \bar{g}_{ij} .

Поверхность \bar{M} есть поверхность вращения.

Действительно, для поверхности \bar{M} имеем

$$x = \operatorname{ch} t \cos v - \frac{\operatorname{sh}^2 t \cos v}{\operatorname{ch} t} - \frac{\sin v}{\operatorname{ch} t} = \frac{1}{\operatorname{ch} t} (\cos v + \sin v),$$

$$y = \operatorname{ch} t \sin v - \frac{\operatorname{sh}^2 t \cos v}{\operatorname{ch} t} + \frac{\sin v}{\operatorname{ch} t} = \frac{1}{\operatorname{ch} t} (\cos v - \sin v).$$

Так как

$$\cos v + \sin v = \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{2} - v \right), \quad \cos v - \sin v = \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{2} - v \right),$$

получаем уравнение поверхности вращения

$$R(t, v) = \left(\frac{\sqrt{2}}{\operatorname{ch} t} \cos \left(\frac{\pi}{2} - v \right), \frac{\sqrt{2}}{\operatorname{ch} t} \sin \left(\frac{\pi}{2} - v \right), 2\operatorname{Elliptic}F(\operatorname{sh} t, I) - \operatorname{Elliptic}E(\operatorname{sh} t, I) - \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t} \sqrt{1 - \operatorname{sh}^2 t} \right).$$

Чтобы определить к какому классу поверхностей вращения (волчок, катушка, псевдосфера), относится поверхность \bar{M} , построим три сечения поверхности \bar{M} .

Положим $C = f(\ln(1 + \sqrt{2}))$ и определим еще две сечения преобразования Бианки катушки Миндинга

$$\bar{M}1 : R(t, v) = \left(\operatorname{ch} t \cos v, \operatorname{ch} t \sin v, 2C + 2\operatorname{Elliptic}F(\operatorname{sh} t, I) - \operatorname{Elliptic}E(\operatorname{sh} t, I) - \operatorname{th} t r_t \pm \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t} r_v \right),$$

$$r_t = \operatorname{sh} t e(v) + \sqrt{1 - \operatorname{sh}^2 t} k, \quad r_v = \operatorname{ch} t e'(v).$$

$$\bar{M}2 : R(t, v) = \left(\operatorname{ch} t \cos v, \operatorname{ch} t \sin v, 4C + 2\operatorname{Elliptic}F(\operatorname{sh} t, I) - \operatorname{Elliptic}E(\operatorname{sh} t, I) - \operatorname{th} t r_t \pm \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t} r_v \right),$$

$$r_t = \operatorname{sh} t e(v) + \sqrt{1 - \operatorname{sh}^2 t} k, \quad r_v = \operatorname{ch} t e'(v).$$

Построим три сечения преобразования Бианки катушки Миндинга (рис. 5).

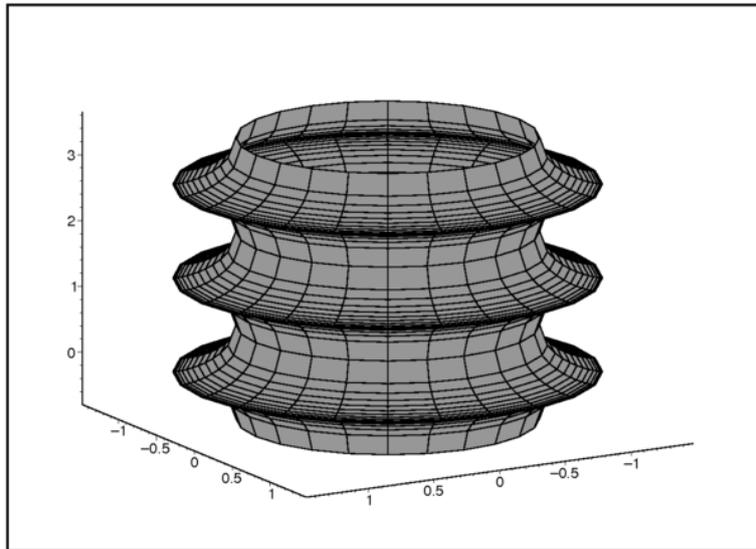


Рисунок 5. Три сечения преобразования Бианки катушки Миндинга M

Сравнивая рис. 2, рис. 5, получаем следующее утверждение.

Утверждение. Преобразование Бианки катушки Миндинга есть катушка.

Список литературы

1. Popov A.G. Pseudospherical surfaces and some problems of matemacal physics // Fundamentalnaya i prikladnaya matematiks. — 2005. — Vol. 11, no. 1. — P. 227–239.
2. Аминов Ю.А. Преобразование Бианки для области многомерного пространства Лобачевского // Украинский геометрический сборник. — 1978. — Т. 21. — С. 3–5.
3. Tenenblat K. Transformations of manifolds and applications to differential equations. Pseudospherical surfaces and some problems of matemacal physics. — London : Logman, 1998.

4. Горькавый В.А., Невмержицкая Е.Н. Аналог преобразования Бианки для двумерных поверхностей в пространстве $S^3 \times R^1$ // Матем. заметки. — 2011. — Т. 89, № 6. — С. 833–845.
5. Масальцев Л.А. Бикасательное преобразование Бианки подмногообразия постоянной отрицательной кривизны H^n евклидова пространства R^{2n} // Изв. вузов. Матем. — 2005. — № 7. — С. 43–48.
6. Каган В.Ф. Основы теории поверхностей в тензорном изложении – т. 2. — М. : ГИИТЛ, 1947.
7. Миндинг Ф. О внутренней геометрии поверхностей // Сборник классических работ по геометрии Лобачевского и развитие её идей / Под ред. Нордена А.П. — М. : ГИИТЛ, 1956. — С. 162–179.
8. Чешкова М.А. Преобразование Бианки n – поверхностей в E^{2n-1} // Изв. вузов. Матем. — 1997. — № 9. — С. 71–74.
9. Шуликовский В.И. Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении. — М. : ГИИФМЛ, 1963.
10. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. — М. : Наука, 1977.
11. Каган В.Ф. Основы теории поверхностей в тензорном изложении – т. 1. — М. : ГИИТЛ, 1947.