УДК 519.3

О комбинированных штрафных функциях в решении задач выпуклого программирования

Плотникова Е.А., Саженков А.Н., Саженкова Т.В.
Новосибирский государственный университет, г. Новосибирск
Алтайский государственный университет, г. Барнаул
pselena@gmail.com, sazhenkov_ an@mail.ru

Аннотация

При ограничениях определенного вида в исходной экстремальной задаче методы внутренних и внешних штрафных функций логично комбинировать. Это комбинирование обуславливается достаточно конкретным видом ограничений, но, как оказывается, сохраняет теоретическую сходимость при тех же условиях, что и для “чистых” методов.

Ключевые слова: экстремальные задачи выпуклого программирования, внутренние, внешние и комбинированные штрафные функции.

В работе рассматриваются вопросы сходимости методов комбинирования внешних и внутренних (барьерных) штрафных функций в применении к задаче минимизации выпуклой функции f на компакте $K \subset \mathbb{R}^n$, задаваемом системой неравенств$g_j(x) \leq 0$, $j = 1, 2, ..., m$, с выпуклыми функциями g_j, в предположении, что существует точка x_0, в которой $g_j(x_0) < 0$ для всех j (не пустая внутренность K).

При этом рассматриваются выпуклые, при указанных условиях на функции, задающие ограничения, штрафные функции: показательная (бесконечный штраф), обратная и штрафные функции Каплана А.А.

$$\Phi_k(x) = \sum_{j=1}^{m} e^{A_k g_j(x)};$$

$$\Phi_k(x) = \frac{1}{A_k} \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{-g_j(x)}$$

и

$$\Phi_k^{(t)}(x) = A_k \sum_{j=1}^{m} \left(g_j(x) + \sqrt{g_j^2(x) + A_k^{-2-t}} \right), \quad t \geq 0 - \text{ константа.}$$

Здесь последовательность A_k такая, что $A_k > 0$, $A_k \to +\infty$.

В работах [1–3] Полака Э., Сеа Ж., Фиакко А, Мак-Кормика Г. представлены исследования вопросов сходимости методов внешних (бесконечный штраф) и внутренних (обратный) штрафных функций

В работах [4,5] представлено исследование штрафов А.А. Каплана, являющихся внешними штрафами. В указанных условиях, начиная с некоторого номера, функции $F_k(x) = f(x) + \Phi_k(x)$ достигают своего безусловного минимума, последовательность $\{x^k\}$ точек минимума функций F_k ограничена, любая ее предельная точка принадлежит множеству K и доставляет минимум f на K.

Процесс численного решения экстремальной задачи методом штрафных функций – это двухступенчатый итерационный процесс. При отыскании решения задачи на безусловный экстремум применяются, как правило, итерационные градиентные методы. Поэтому скорость сходимости композиции методов оценивается числом больших шагов (методом штрафов), каждый из которых состоит из отыскания точки x_ε^k – точки минимума функции $F_k(x) = f(x) + \Phi_k(x)$, полученной градиентным методом с заданной точностью ε.

Следующая теорема, фрагменты обоснования которой представлены в работах [5–7], дает оценки скорости сходимости методов штрафных функций.

Теорема 1. *Пусть функции $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$, $g_j \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $j = 1, 2, ..., m$ – выпуклые, $(f''(x)\varepsilon, \varepsilon) \geq \gamma \|\varepsilon\|^2$ при некотором $\gamma > 0$ и любых x и ε. Тогда для $0 < \tau < 1$ при применении метода штрафов с использованием штрафных функций Каплана с градиентным критерием останова $\lim\limits_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$ справедливо неравенство:*

$$\left\|x^k - x^*\right\|^2 \leq \frac{1}{4\gamma}\left(\frac{A_k^{\tau-1}}{\sigma}\left(f\left(x^0\right) - f\left(x^*\right)\right) + \frac{m}{2}A_k^{-\tau}\right) + \frac{\varepsilon_k^2}{32\gamma^2},$$

начиная с некоторого номера k ($x*$ – точное решение исходной задачи, x^0 – из внутренности множества K). Для функций бесконечного штрафа справедливо:

$$\left\|x^k - x^*\right\|^2 \leq \frac{1}{\gamma}\left(\frac{A_k^{-1}\ln A_k}{\sigma}\left(f\left(x^0\right) - f\left(x^*\right)\right) + mA_k^{-1}\right) + \frac{\varepsilon_k^2}{8\gamma^2},$$

а для обратного штрафа:

$$\left\|x^k - x^*\right\|^2 \leq \frac{1}{\gamma}\left(\frac{A_k^{\tau-1}}{\sigma}\left(f\left(x^0\right) - f\left(x^*\right)\right) + mA_k^{-\tau}\right) + \frac{\varepsilon_k^2}{8\gamma^2},$$

где $0 < \tau < 1$.

При ограничениях определенного вида в исходной экстремальной задаче осуществляется комбинирование внешних и внутренних штрафных функций. Это комбинирование обуславливается достаточно конкретным видом ограничений, обсуждение которых приведено, например, в [3,5]. Что касается вопросов сходимости для комбинированных штрафов с использованием выше приведённых результатов, устанавливается справедливость утверждения следующей теоремы, представленной ранее в [8].

Теорема 2. *Пусть в ранее оговорённых условиях и условиях теоремы 1 рассматриваются решения x^k задачи минимизации функции $F_k(x) = f(x) + \Phi_k'(x) + \Phi_k''(x)$, где $\Phi_k'(x)$ – внешние штрафные функции для части ограничений, а $\Phi_k''(x)$ – внутренние штрафные функции для остальных ограничений. Для сочетаний следующих штрафных функций в комбинированном методе – бесконечный и обратный штраф, штрафные функции Каплана и обратный штраф, справедлива следующая оценка скорости сходимости метода штрафных функций:*

$$\left\|x^k - x^*\right\|^2 \leq \frac{1}{\gamma}\left(\frac{A_k^{\tau-1}}{\sigma}\left(f\left(x^0\right) - f\left(x^*\right)\right) + mA_k^{-\tau}\right) + \frac{\varepsilon_k^2}{8\gamma^2},$$

где $0 < \tau < 1$.

Доказательство. Введем обозначения:

$$E_i = \frac{A_i^{\tau-1}}{\sigma}(F(x_0) - F(x^*)) + mA_i^(-\tau) + \frac{\varepsilon_i^2}{8\gamma},$$

$$R_i = \frac{A_i^{-1}\ln(\alpha_i)}{\sigma}(F(x_0) - F(x^*)) + mA_i^{(} - 1) + \frac{\varepsilon_i^2}{8\gamma}.$$

Проведём доказательство для комбинации "бесконечный и обратный штраф", для комбинации "штрафные функции Каплана и обратный штраф" доказательство проводится аналогично.

Для комбинированного метода имеет место следующее неравенство:

$$F(x_\varepsilon^i) - F(x^*) < \max(E_i, R_i).$$

Сравним E_i и R_i по каждому из слагаемых в отдельности:

1). $\dfrac{A_i^{\tau-1}}{\sigma}(F(x_0) - F(x^*))$ и $\dfrac{A_i^{-1}\ln(A_i)}{\sigma}(F(x_0) - F(x^*))$.

Сравниваем $A_i^{\tau-1}$ и $A_i^{-1}\ln(A_i)$. Преобразуем: $A_i^{\tau-1} = \dfrac{A_i^\tau}{A_i}$ и $A_i^{-1}\ln(A_i) = \dfrac{\ln(A_i)}{A_i}$. И продолжим сравнивать числители A_i^τ и $\ln(A_i)$. Рассмотрим $\lim\limits_{i\to\infty}\dfrac{\ln(A_i)}{A_i^\tau} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x)}{x^\tau}$. Применив правило Лопиталя, получаем:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\tau x^{\tau-1}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\tau x^\tau} = 0.$$

Следовательно, $A_i^\tau \to +\infty$ быстрее, чем $\ln(A_i)$. Для больших i отсюда получается справедливость:

$$A_i^\tau > \ln(A_i) \Longrightarrow A_i^{\tau-1} > A_i^{-1}\ln(A_i), \text{ то есть } \frac{A_i^{\tau-1}}{\sigma}(F(x_0) - F(x^*)) > \frac{A_i^{-1}\ln(A_i)}{\sigma}(F(x_0) - F(x^*)).$$

2). Сравним $mA_i^{-\tau} = \dfrac{m}{A_i^\tau}$ и $mA_i^{-1} = \dfrac{m}{A_i}$, где $0 < \tau < 1$. Имеем $mA_i^{-\tau} > mA_i^{-1}$.

Пункты 1) и 2) дают значение $\max(E_i, R_i) = E_i$, и, следовательно, следующую оценку скорости сходимости:

$$\left\|x_\varepsilon^i - x^*\right\|^2 \le \frac{1}{\gamma}F(x_\varepsilon^i) - F(x^*) < \frac{1}{\gamma}\left(\frac{A_i^{\tau-1}}{\sigma}(F(x_0) - F(x^*)) + mA_i^{-\tau} + \frac{\varepsilon_i^2}{8\gamma}\right),$$

то есть

$$\left\|x_\varepsilon^i - x^*\right\|^2 \le \frac{1}{\gamma}\left(\frac{A_i^{\tau-1}}{\sigma}(F(x_0) - F(x^*)) + mA_i^{-\tau} + \frac{\varepsilon_i^2}{8\gamma}\right).$$

□

Таким образом, установлено, что при комбинировании обратного и экспоненциального метода штрафных функций получилась оценка, которая совпадает с оценкой обратного штрафа. Из этого следует вывод, что оценка, полученная в теореме 1, не ухудшается при комбинировании методов.

Список литературы

1. Полак Э. Численные методы оптимизации. Единый подход / пер. с англ. — М., 1974.

2. Сеа Ж. Оптимизация. Теория и алгоритмы / пер. с франц. — М., 1973.

3. Фиакко А., Мак-Кормик Г. Нелинейное программирование. Методы последовательной безусловной минимизации / пер. с англ. — М., 1972.

4. Каплан А.А. К вопросу о реализации метода штрафов. — Новосибирск, 1976.

5. Гроссман К., Каплан А.А. Нелинейное программирование на основе безусловной минимизации. — Новосибирск, 1981.

6. Саженков А.Н., Саженкова Т.В., Пронь С.П. Об исследовании одного класса штрафных функций // Труды семинара по геометрии и математическому моделированию: сб. ст. – Вып. 2. / Под ред. Е.Д. Родионова. — Барнаул : Изд-во Алт. ун-та, 2016. — С. 86–88.

7. Саженкова Т.В., Саженков А.Н., Плотникова Е.А. О применении одного класса интегральных штрафных функций при решении вариационных задач // Известия АлтГУ. — 2018. — № 1(99). — С. 123–126.

8. Плотникова Е.А., Саженков А.Н., Саженкова Т.В. О вопросах сходимости комбинированных методов штрафных функций // Сборник трудов всероссийской конференции по математике МАК-2018. — Барнаул : Изд-во Алт. ун-та, 2018. — С. 36–39.