УДК 372.851

Об одной задаче преобразования плоскости

Плотникова Е.А., Саженкова Е.В.
Новосибирский государственный университет, г. Новосибирск
Новосибирский государственный университет экономики и управления, г. Новосибирск
pselena@gmail.com , sazhenkovs@yandex.ru

Аннотация

В работе проводится обсуждение полного решения одной задачи преобразования плоскости, относящейся как к математическому анализу, так и к аналитической геометрии. Приведено подробное решение задачи, базирующегося на достаточно простых топологических понятиях, при этом демонстрирующее досконально чёткое исследование вопроса.

Ключевые слова: отображение плоскости, выпуклое множество, образ отрезка, внутренние и граничные точки.

В процессе обучения студентов математическом дисциплинам важным аспектом является их подготовка к последующей успешной возможности заниматься самостоятельной научно-исследовательской работой, в воспитании математической культуры, обеспечивающей в дальнейшем квалифицированный выход на исследование нерешённых математических проблем.

Особая роль в решении этих задач принадлежит внимательному и кропотливому сочетанию геометрической (можно сказать – топологической) иллюстрации и аналитических рассуждений. Такой доскональный подход к изучению поставленных перед исследователем вопросов в большой степени позволяет воспитывать в учащихся ответственное отношение к выводам своего научного исследования [1–3].

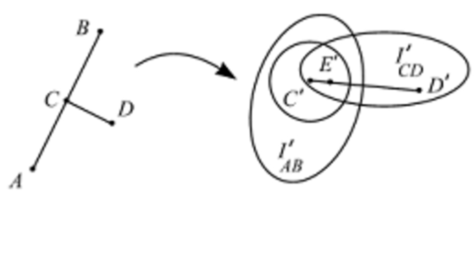
В качестве примера такой работы, остановимся на подробном решении следующей задачи.

Пусть взаимно однозначное отображение плоскости в себя переводит отрезки в выпуклые множества. Требуется доказать, что это отображение прямые переводит в прямые.

Будем обозначать A' – образ точки A при рассматриваемом отображении; l_{AB} и $l_{A'B'}$ – прямые, проходящие через точки A и B, A' и B' соответственно; I_{AB} и $I_{A'B'}$ – отрезки с концами в точках A и B, A' и B' соответственно; l'_{AB} и I'_{AB} образы l_{AB} и I_{AB}; α' – образ всей плоскости при заданном отображении.

Из условия задачи и определения выпуклого множества непосредственно следует, что образ выпуклого множества есть выпуклое множество. В частности, $I_{A'B'} \subset I'_{AB}$, I'_{AB}, l'_{AB} и α' – выпуклые множества.

Лемма 1. *I'_{AB} как множество плоскости не имеет внутренних точек.*



Доказательство. Пусть для некоторой точки C её образ C' является внутренней точкой множества I'_{AB}, то есть круг ненулевого радиуса с центром в точке C' содержится в I'_{AB}. Выберем точку $D \notin l_{AB}$. В силу взаимной однозначности отображения имеет место $D' \notin I'_{AB}$. Поскольку $I_{C'D'} \subset I'_{CD}$, найдётся точка E' внутри круга, отличная от центра круга, принадлежащая $I_{C'D'}$. Это означает, что точка E, отличная от C лежит на обоих отрезках AB и CD. □

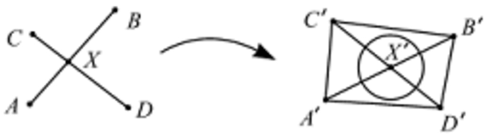
Лемма 2. $I'_{AB} \subset l_{A'B'}$.

Доказательство. В противном случае I'_{AB} имеет внутреннюю точку. □

Лемма 3. $I'_{AB} = I_{A'B'}$

Доказательство. Допустим, точка C при отображении из отрезка I_{AB} попала вне отрезка $I_{A'B'}$. Можно считать, что точка B' лежит между точками A' и C'. Тогда $B \notin I_{AC}$, следовательно $B' \notin I'_{AC}$. Противоречие. □

Лемма 4. $l'_{AB} = l_{A'B'} \cap \alpha'$.

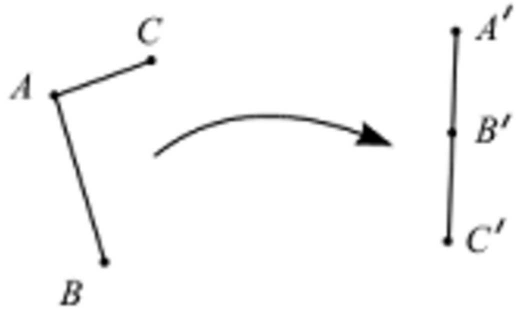


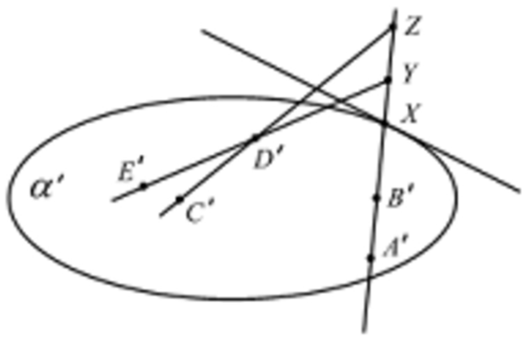
Доказательство. Очевидно, что $l'_{AB} \subset \alpha'$. Включение $l'_{AB} \subset l_{A'B'}$ доказывается аналогично доказательству леммы 3. Итак, $l'_{AB} \subset l_{A'B'} \cap \alpha'$. Пусть теперь $C' \in l_{A'B'} \cap \alpha'$. Если точка C' лежит на отрезке $I_{A'B'}$, то по лемме 3 она лежит на отрезке I'_{AB} и, значит, на прямой l'_{AB}. Пусть точка C' лежит вне отрезка $I_{A'B'}$, Без ограничения общности можно считать, что точка B' лежит между точками A' и C'. Предположим, что точка C не лежит на прямой l_{AB}. Тогда отрезок I_{AC} имеет единственную общую точку с отрезком I_{AB}. Следовательно, отрезки $I_{A'C'}$ и $I_{A'B'}$ тоже должны иметь единственную общую точку. Противоречие. □

Лемма 5. *Множество α' является выпуклым непустым открытым множеством на плоскости.*

Доказательство. Очевидно, что α' непустое множество, оно выпуклое как образ выпуклого множества. Осталось заметить, что оно открытое множество, то есть для любой точки $X' \in \alpha'$ найдётся круг ненулевого радиуса с центром в точке X' содержащийся в α'.

Построим отрезки I_{AB} и I_{CD}, так что эти отрезки пересекаются в точке X, являющейся внутренней точкой для обоих отрезков. Тогда отрезки $I_{A'B'}$ и $I_{C'D'}$ пересекаются в точке X', являющейся внутренней точкой для обоих отрезков. Поскольку α' выпуклое





множество и четырёхугольник с вершинами в точках A', B', C' и D' является невырожденным найдётся круг ненулевого радиуса с центром в точке X' содержащийся в этом четырёхугольнике и, одновременно, в α'.

Завершаем решение поставленной задачи.

Рассмотрим образ произвольной прямой l'_{AB}. Поскольку $l'_{AB} = l_{A'B'} \cap \alpha'$ (лемма 4), её образом будет прямая, если $l_{A'B'}$ целиком содержится во множестве α'. Если не вся прямая $l_{A'B'}$ содержится во множестве α', то это прямая пересекает границу выпуклого множества α' в некоторой её точке X. Через точку X проведём опорную прямую к множеству α'. Выберем точку D' в α' и через неё проведем две прямых, пересекающих прямую $l_{A'B'}$ в точках Y и Z, лежащих в другой полуплоскости опорной прямой чем α'. Поскольку l'_{AB} и l'_{CD} не имеют общих точек, прямые l_{AB} и l_{CD} - параллельны. Точно также параллельными прямыми являются прямые l_{AB} и l_{ED}, кроме того, прямые l_{CD} и l_{ED} различные. Получили противоречие с пятым постулатом Евклида. □

Список литературы

1. Плотникова Е.А., Саженков А.Н., Саженкова Т.В. Геометрический факультатив-практикум в научно-исследовательской работе старшеклассников и студентов младших курсов // Труды семинара по геометрии и математическому моделированию. — 2017. — № 3. — С. 34–37.

2. Плотникова Е.А., Саженкова Е.В. Об элементах математического моделирования в курсах высшей математики // Труды семинара по геометрии и математическому моделированию. — 2019. — № 5. — С. 141–143.

3. Плотникова Е.А., Саженков А.Н. О топологических задачах на прямой // Сборник трудов всероссийской конференции по математике с международным участием МАК-2022. — Барнаул : Изд-во Алт. ун-та, 2022. — С. 141–143.