

# К решению одного варианта задачи многомерного анфолдинга

Дронов С.В.

*Алтайский государственный университет, г. Барнаул*

*dsv@math.asu.ru*

## Аннотация

В настоящей работе рассмотрен вариант задачи анфолдинга, в которой положение части объектов (целей) уже известно, и требуется локализовать только наблюдателей – оставшуюся часть множества объектов. Предлагается процесс заполнения пропущенных позиций матрицы различий реализовать через построение промежуточной визуализации в искусственном пространстве изображений с точным соблюдением всех заданных изначально расстояний. При этом оказывается, что для того, чтобы сделать построение промежуточной визуализации простым и, желательно, однозначным, достаточно подобрать подходящую размерность пространства изображений. Если возможность неоднозначного построения, тем не менее, будет не полностью исключена, то она окажется сведенной к небольшому количеству возможных вариантов. После построения каждого из допустимых вариантов промежуточной визуализации недостающие в исходных данных различия уже вычисляются, и есть возможность заполнить матрицу различий целиком. Выбор из набора потенциальных вариантов заполнения матрицы можно затем осуществить путем их перебора.

*Ключевые слова:* визуализация многомерных данных, многомерное шкалирование с неполной информацией, многомерное развертывание, анфолдинг, пересечения гиперсфер.

## 1. Введение и основная задача

Многомерный анфолдинг, иначе PREFSCAL, многомерное развертывание – это задача многомерного шкалирования с матрицей попарных расстояний (различий), заполненной лишь частично. Точнее, в обеих этих задачах требуется визуализировать множество рассматриваемых объектов по заданной матрице их различий. В этой матрице на пересечении  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца помещается число, равное расстоянию или оценивающее различие между  $i$ -м и  $j$ -м объектами, и в многомерном шкалировании все эти числа считаются известными. Если же решается задача анфолдинга, то множество всех рассматриваемых объектов разбивают на две части, и известными считают только те элементы матрицы различий, для которых  $i$ -й и  $j$ -й объекты попадают в разные части исходного множества. Как это принято в подобных задачах, далее термины «различия» и «расстояния» условимся считать синонимами.

Объекты первой из двух частей исходного множества принято называть целями, объекты второй наблюдателями. Таким образом, нам известны расстояния от каждого наблюдателя до каждой из целей, а расстояния между двумя целями или между двумя наблюдателями неизвестны. Следовательно, можно сказать, что задача анфолдинга является вариантом задачи многомерного шкалирования с неполной информацией.

Многомерное шкалирование вошло в практику статистических исследований уже довольно давно, и математическая сторона его достаточно исследована. Так, в классической монографии [1] приведено доказательство теоремы У. Торгерсона о том, что в достаточно

естественных предположениях на элементы полностью заполненной матрицы различий нужная визуализация всегда может быть построена. К сожалению, при построении визуализаций с помощью алгоритма Торгерсона, как правило, заданные расстояния между объектами искажаются. Но метод получил широкое распространение и его результаты признаются корректными большинством статистиков. Тем более, что в некоторых случаях, например, при проецировании облака объектов из многомерного пространства на плоскость, на которой будут визуализироваться данные, такого искажения избежать заведомо не удастся.

Таким образом, общепринятый подход к решению задачи анфолдинга состоит в заполнении пропущенных элементов матрицы различий. Затем к уже заполненной целиком матрице применяют классическую методику многомерного шкалирования. Практически очевидно, что, даже обеспечив необходимую симметричность матрицы, а также наложив на ее элементы требование выполнения неравенства треугольника, мы можем заполнить пропущенные позиции в ней бесконечно большим количеством способов. Поэтому для окончательного решения обычно требуется дополнительный критерий выбора оптимального способа заполнения пропущенных позиций.

Например, в [2] для этого использовался метод наименьших квадратов, реализация метода в статистическом пакете IBM SPSS [3] ориентирована на минимизацию стресс-критерия в получающейся визуализации, а в работах автора [4, 5] точки, изображающие объекты, располагались так, чтобы минимальное расстояние между ними было бы максимально возможным.

Производя визуализацию, мы создаем набор точек, изображающих все наши объекты. Назовем этот набор картой. Существование карты в некотором условном, никак не специфицируемом пространстве изображений при естественных ограничениях на полностью заполненную матрицу различий обеспечивает теорема Торгерсона. При этом классический метод многомерного шкалирования непосредственно с этой картой и содержащим ее пространством не работает. Вместо этого он предлагает исследователю выбрать небольшую размерность  $q$  устраивающего его пространства и показывает, как организовать построение проекции карты в выбранное  $R^q$ .

Мы же пойдем в каком-то смысле противоположным путем, сделав некоторые предварительные предположения, – сначала подберем наиболее удобное пространство изображений  $R^p$ , в котором будет лежать карта, и укажем явный способ ее построения. А заполнением матрицы различий займемся уже на следующем этапе, используя готовую карту.

Перейдем к формулировкам. Допустим, у нас имеется  $M$  целей и  $N$  наблюдателей, и известны расстояния  $R_{i,j}$  от  $i$ -го наблюдателя до  $j$ -й цели,  $i = 1, \dots, N$ ,  $j = 1, \dots, M$ . Предположим, что все объекты первой части множества (цели) уже визуализированы, т.е. построено некоторое, скажем,  $p$ -мерное евклидово пространство и зафиксировано  $M$  точек в нем так, что эти точки изображают все объекты-цели в некотором смысле оптимальным образом.

Фактически мы сделаем даже более сильное предположение. Условимся считать, что у нас уже имеется надежный метод построить точки, визуализирующие цели, в пространстве изображений любой заранее выбранной размерности. Естественность такого предположения можно объяснить на практическом примере, когда цели представляют собой некие реально существующие объекты, относительно которых мы располагаем полной информацией. Тогда, какую бы систему условных координат мы не выбрали, мы можем точно найти координаты каждой цели в этой системе. Проблемы перехода к такому варианту задачи анфолдинга от ее классической постановки будут обсуждены позднее. Отметим, что в [4,5] фактически решался именно этот вариант задачи, поскольку при наличии одной цели в качестве ее визуализации всегда можно выбрать начало координат.

Подойдем к решению с геометрической точки зрения. Поскольку расположение каждой из целей мы договорились считать фиксированным, то визуализация каждого отдельного наблюдателя должно выбираться из точек пересечения  $M$  гиперсфер известных радиусов с центрами в изображениях целей. Поэтому, если одновременная визуализация всех исследуемых объектов в выбранном пространстве возможна, то она сводится к поиску пересечений таких сфер, или, более широко, к выяснению их взаимного расположения.

К сожалению, автору не удалось найти в литературе систематического изложения случаев возможных расположений гиперсфер, хотя некоторые фрагментарные сведения об этом и можно извлечь, например, из [6, с. 374-377]. Поэтому было принято решение привести необходимый вспомогательный материал в следующем разделе, снабдив приведенные там факты простыми доказательствами.

## 2. О пересечениях сфер различных размерностей

Рассмотрим евклидово пространство  $R^p$ . Близким понятием к понятию плоскости и прямой в трехмерном пространстве при  $p > 3$  является понятие линейного многообразия. Оно получается из некоторого векторного подпространства рассматриваемого пространства путем сдвига всех его элементов на один и тот же вектор. Если сдвигаемое подпространство имело размерность  $q$ , то такое линейное многообразие условимся далее называть  $q$ -плоскостью. Если мы работаем в  $R^p$ , то  $(p - 1)$ -плоскость обычно называют гиперплоскостью. Известно, что для произвольного  $q < p$  из любой точки  $C \in R^p$  на  $q$ -плоскость можно опустить единственный (одномерный) перпендикуляр  $CO$ . Перпендикулярность к прямой определяется обычным образом – через равенство нулю скалярного произведения векторов, один из которых направляет прямую, а другой – произвольный, лежащий в  $q$ -плоскости. Основанием перпендикуляра  $O$  будет точка  $q$ -плоскости, ближайшая к точке  $C$  в евклидовой метрике. Именно существование единственной ближайшей точки и позволяет определить перпендикуляр однозначно.

Множество всех точек  $q$ -плоскости, одинаково удаленных от фиксированной точки  $A$  той же  $q$ -плоскости, будем называть  $q$ -сферой или сферой размерности  $q$ . Точку  $A$  называем центром, а общее расстояние от центра до всех точек сферы – радиусом  $q$ -сферы. 1-сфера представляет собой две изолированные точки, а 2-сфера – окружность. Если радиус  $q$ -сферы равен 0, то при произвольном  $q$  она вырождается в единственную точку. Под 0-сферой будем также понимать точку, при этом, разумеется, радиус любой 0-сферы считаем равным 0. Начало координат обозначим  $N$ .

**Лемма 1.** *Пересечение  $p$ -сферы  $S_p$  и произвольной  $q$ -плоскости  $\alpha$  при  $q < p$  есть или пустое множество, или  $q$ -сфера. Если  $S_p$  имела центр  $C$  и радиус  $R$ ,  $\vec{a}$  перпендикулярен  $\alpha$ ,  $B \in \alpha$ , то, в случае непустого пересечения центр новой  $q$ -мерной сферы  $O$  имеет радиус-вектор*

$$\vec{NO} = \vec{NC} + \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|^2} \cdot \langle \vec{a}, \vec{NC} - \vec{NB} \rangle, \quad (1)$$

*а ее радиус равен*

$$R' = \sqrt{R^2 - w^2}, \quad w = \frac{1}{|\vec{a}|} \left| \langle \vec{a}, \vec{NC} - \vec{NB} \rangle \right|. \quad (2)$$

*Доказательство.* Пусть рассматриваемое пересечение  $Q$  содержит точку  $A$ . Если это единственная точка пересечения, то доказываемое утверждение справедливо – перед нами  $q$ -сфера нулевого радиуса. Если точек больше, опустим перпендикуляр из центра сферы  $C$  на  $\alpha$  и обозначим его основание  $O$  (рисунок 1). Докажем, что тогда  $Q$  представляет собой  $q$ -сферу  $S_q$  с центром  $O$  и радиусом  $OA$ . Пусть точка  $B$  содержится в  $Q$ . Тогда (плоский) треугольник с вершинами  $C, O, B$  прямоугольный и, по катету и гипотенузе, равен  $\triangle COA$ . Следовательно,  $OB = OA$ . Таким образом, любая точка пересечения лежит на  $S_q$ .

Обратно, если  $B \in S_q \subset \alpha$ , то  $BO = AO$ , и  $\triangle COB = \triangle COA$  по двум катетам, откуда ясно, что  $CB$  равно радиусу  $S_p$ , что означает  $B \in S_p$ . Поскольку  $B$  выбиралась в  $\alpha$ , то, следовательно, она лежит и в  $Q$ .

Теперь ясно, что центром пересечения будет проекция  $O$  точки  $C$  на  $\alpha$ . Она находится через поиск такого действительного числа  $k$ , что  $\vec{NO} - \vec{NC} = k\vec{a}$  и условия  $O \in \alpha$ , т.е.

$$\langle \vec{a}, \vec{NO} - \vec{NC} \rangle = 0.$$

После того, как  $k$  найдено, немедленно получаем (1). Далее, как видно на рисунке 1,  $CO = w, CA = R, OA = R'$ . Следовательно, (2) вытекает из теоремы Пифагора.  $\square$

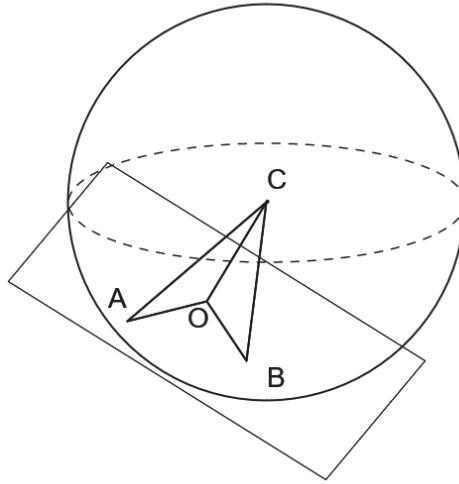


Рисунок 1. К доказательству леммы 1

**Лемма 2.** Пересечение двух  $p$ -сфер есть либо пустое множество, либо представляет собой  $(p - 1)$ -сферу, либо является  $p$ -сферой с ненулевым радиусом. Последний случай возможен только если исходные сферы совпадали и имели ненулевой радиус.

*Доказательство.* Рассмотрим единственный заслуживающий изучения здесь случай непустого пересечения несовпадающих сфер. Пусть  $C_1, C_2$  – центры этих  $p$ -сфер. Возьмем точку  $A$  в их пересечении и построим гиперплоскость  $\alpha$ , перпендикулярную отрезку  $C_1C_2$  и проходящую через  $A$ . Обозначим  $O$  точку пересечения  $C_1C_2$  и  $\alpha$ . Согласно лемме 1,  $(p - 1)$ -сфера с центром  $O$  и радиусом  $OA$  является как пересечением первой сферы с  $\alpha$ , так и второй с ней. Осталось доказать, что у наших двух  $p$ -сфер нет ни одной общей точки, не лежащей в  $\alpha$ .

Возьмем произвольную точку  $B$  пересечения сфер. Проведем построение, показанное на рисунке 2. Здесь  $\triangle C_1BC_2$  равен  $\triangle C_1AC_2$  по трем сторонам. Значит, высоты в этих треугольниках падают в одну и ту же точку  $O$  их общей стороны  $C_1C_2$ . Итак,  $BO$  – перпендикуляр к  $C_1C_2$ , следовательно, этот отрезок целиком, включая  $B$ , содержится в гиперплоскости  $\alpha$ .  $\square$

**Лемма 3.** Пусть  $p > q$ ,  $S_p, S_q$  – сферы размерностей  $p, q$  соответственно, содержащиеся в одной  $p$ -плоскости. Для их пересечения  $Q$  имеются только 3 возможности: 1.  $Q = \emptyset$ ; 2.  $Q$  является  $(q - 1)$ -сферой; 3.  $Q = S_q$  и, тем самым,  $q$ -сфера.

*Доказательство.* Обозначим  $\alpha$   $q$ -плоскость, содержащую  $S_q$ . Поскольку пересечение  $S_p$  с этим многообразием есть  $q$ -сфера, (или одна точка) согласно лемме 1, то доказываемое утверждение следует из леммы 2.  $\square$

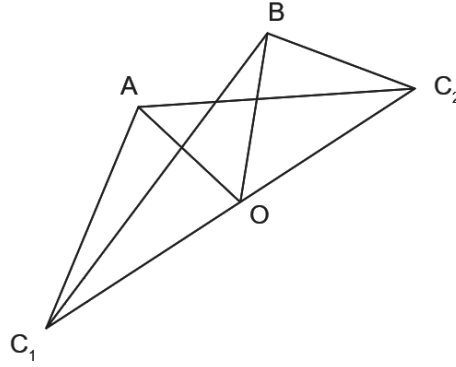


Рисунок 2. К доказательству леммы 2

Отметим, что случай 3 утверждения леммы реализуется тогда и только тогда, когда сфера меньшей размерности была подмножеством второй сферы, можно сказать, «лежала на ней». В остальных случаях размерность сферы-пересечения строго меньше  $q$ , меньшей из двух размерностей. Если пересечение не пусто, то для этой размерности есть два варианта: либо она равна 0, и перед нами единственная точка, либо  $q - 1$ . При реализации второй возможности также может получиться 0, но лишь при  $q = 1$ , когда  $S_q$  представляет собой двухточечное множество.

### 3. Выбор размерности пространства изображений

Вернемся к основной задаче. Для визуализации  $k$ -го наблюдателя в том  $p$ -мерном пространстве изображений, в котором уже расположены  $M$  точек, изображающих цели, нам подходят только точки пересечения  $M$   $p$ -сфер с радиусами  $R_{k,j}, j = 1, \dots, M$ . Если мы хотим, чтобы построение точного изображения было возможно, то пересечение таких  $p$ -сфер не должно быть пустым. Поскольку, согласно лемме 3, пересечение сфер всегда является сферой, то этим пересечением будет некоторая  $q$ -сфера,  $q \leq p$ .

Чтобы построить требуемое пересечение, будем последовательно увеличивать количество пересекающихся  $p$ -сфер с двух до  $M$ . Порядок добавления сфер в набор пересекающихся здесь не важен, т.к. в конце концов будут добавлены все сферы. Из леммы 3 вытекает, что, чаще всего, на каждом шаге размерность пересечения будет уменьшаться на единицу.

Уменьшения размерности не происходит только тогда, когда полученное на очередном шаге пересечение оказывается лежащим на следующей  $p$ -сфере. Если при определении возможной визуализации выбранного наблюдателя такого случиться не может, будем говорить, что карта целей по отношению к нему регулярна. Мы пришли к следующему утверждению.

**Теорема 1.** *Если при заданном наборе изображений  $M$  целей в  $R^p$  изображение наблюдателя возможно, то множество всех допустимых его визуализаций является некоторой  $r$ -сферой, где  $p \geq r \geq p - M + 1$ . Если карта целей по отношению к этому наблюдателю регулярна, то размерность этой сферы равна  $p - M + 1$ .*

Таким образом, если карта, содержащая  $M$  целей, по отношению к наблюдателю регулярна, и мы хотим однозначно определить его положение, то следует строить карту как подмножество  $R^{M-1}$ . В итоге для выбора положения наблюдателя мы будем иметь 0-сферу, т.е. единственную точку, и визуализация его определится однозначно. Если же карта целей в  $R^{M-1}$  не будет регулярной по отношению к этому наблюдателю, то мы потеряем единственность решения. Тогда придется выбирать визуализацию для него, ориентируясь

на некоторый дополнительный критерий оптимальности. Иногда это даже удобно, но такой поворот дела для нас нежелателен, поэтому нужно пытаться построить регулярную карту.

Но оказывается, расположение целей, обеспечивающих единственность изображения одного наблюдателя, может оказаться таким, что второго на этой карте будет изобразить просто невозможно.

Например, пусть у нас имеются две цели, и первый наблюдатель должен быть удален от каждой из них на 1, а второй – от каждой на 2. Если, согласно только что высказанным рекомендациям, мы будем строить одномерную визуализацию ( $M = 2$ ), то для корректного изображения первого наблюдателя цели следует расположить на расстоянии 2 друг от друга. Первый наблюдатель тогда расположится в середине отрезка между ними, но для второго на основной прямой при этом места не найдется. Попытка поменять порядок наблюдателей в этом построении также оказывается безуспешной. Если же перейти в  $R^2$ , то, после расположения первого наблюдателя в середине отрезка между целями, для второго образуются сразу две равноценных возможности. Поскольку в этом примере сфер для каждого наблюдателя рассматривается всего две, то карта целей заведомо будет регулярна по отношению к каждому из них.

Изучим подробнее условие регулярности карты целей. Пусть размерность пространства изображений равна  $L$ , и в нем расположены визуализации  $M$  целей, центров  $L$ -сфер, которые образуют регулярную карту целей. Заметим, что, если  $q$ -сфера  $S_q$  содержится в  $p$ -сфере  $S_p$ ,  $p > q$ , то центр сферы большей размерности обязательно находится в  $(L - q)$ -плоскости  $\alpha$ , проходящей через центр  $S_q$  и перпендикулярной к  $q$ -плоскости, содержащей  $S_q$ . Рассмотрим  $q$ -сферу  $S_q$ , как результат пересечения гиперсфер. Ясно, что в регулярной карте для получения этой сферы было совершено  $L - q$  пересечений, поскольку каждое пересечение уменьшало размерность на 1. В первом пересечении были задействованы две сферы, значит, в  $\alpha$  лежат центры  $L - q + 1$  гиперсфер. Потребуем, чтобы ни один из остальных центров сфер (визуализаций пока не использованных в построении пересечения целей) не содержался бы в  $\alpha$ , т.е. фактически, чтобы произвольные  $L - q + 2$  визуализаций имели бы «общее положение» в  $R^L$ . Например, никакие 3 визуализации не должны лежать на (одномерной) прямой, никакие 4 в 2-плоскости и т.д. Тогда в силу леммы 3 любая из оставшихся сфер при добавлении к пересечению даст сокращение размерности пересечения на 1, и мы действительно имеем случай регулярной карты целей.

Итак, достаточным условием того, чтобы промежуточный  $q$ -мерный результат пересечения не содержался ни в одной из оставшихся гиперсфер, служит запрет каким-либо  $L - q + 2$  визуализациям целей одновременно находиться в какой-либо  $(L - q)$ -плоскости пространства изображений. Таким образом, приходим к справедливости следующего утверждения.

**Лемма 4.** *Пусть на карте размерности  $L \geq M - 1$  размещены визуализации  $M \geq 2$  целей. Если ни при одном  $k \leq M - 2$  никакие  $k + 2$  из них не расположены одновременно ни в какой  $k$ -плоскости, то карта целей является регулярной.*

В утверждении леммы не указан наблюдатель, по отношению к которому карта оказывается регулярной. Это не нарушает корректности формулировки, поскольку рассматриваемое условие никак не связано с радиусами пересекающихся сфер, а значит, выполнение условий леммы 4 обеспечивает регулярность карты целей для всех наблюдателей одновременно.

Отметим, однако, что сформулированное утверждение является лишь простым достаточным условием регулярности карты целей. Даже если изображения целей не находятся в общем положении в том смысле, которое требует утверждение леммы 4, карта может оказаться регулярной. Ведь для того, чтобы пересечение двух из сфер с центрами в них лежало бы на третьей, дополнительно необходимо определенное соотношение их радиусов.



Поскольку нахождение  $k + 2$  точек  $T_0, \dots, T_{k+1}$  в одной  $k$ -плоскости эквивалентно линейной зависимости векторов  $\overrightarrow{T_0 T_i}$ ,  $i = 1, \dots, (k+1)$ , то, очевидно, справедливо следующее утверждение.

**Теорема 2.** Пусть визуализациями целей являются точки  $T_1, \dots, T_M \in R^L$ , где  $M \geq 2, L \geq M - 1$ . Из координат векторов, общее начало которых  $T_1$ , а концами являются  $T_2, \dots, T_M$ , составим матрицу  $Z$ , размещая координаты векторов в ее строках. Если ранг  $Z$  равен  $M - 1$ , то карта целей регулярна.

Наличие у  $Z$  ранга, меньшего, чем количество ее строк, показывает, что условия на размещение наблюдателя на заданных расстояниях от некоторых из целей могут являться избыточными, т.е. окажутся автоматически выполненными при соблюдении остальных расстояний. Поэтому после проверки условия на радиусы соответствующих сфер такие цели, видимо, можно исключить из процесса построения визуализации наблюдателей.

#### 4. Наблюдатели на карте целей

Кроме регулярности карты целей, нам важна принципиальная возможность разместить, например,  $k$ -го наблюдателя на этой карте. Если цели визуализированы точками  $T_1, \dots, T_M$ , то необходимым условием для этого является наличие непустых пересечений любой пары соответствующих гиперсфер, в частности

$$d(T_u, T_v) \leq R_{k,u} + R_{k,v}, \quad u, v = 1, \dots, M. \quad (3)$$

Но это условие даже в случае, когда, например, имеется хотя бы три цели, к сожалению, не является достаточным.

Действительно, пусть  $R_{1,j} = 1, j = 1, 2, 3, T_1 = (-1, 0); T_2 = (1, 0); T_3 = (0, 0, 2)$ . Тогда наблюдатель должен быть размещен в начале координат, и расстояние до  $T_3$  не совпадает с данным. Хотя условие (3) здесь выполнено.

**Лемма 5.** Две  $p$ -сферы имеющие радиусы  $R_1$  и  $R_2$  соответственно, лежащие в одной  $p$ -плоскости, имеют непустое пересечение тогда и только тогда, когда

$$|R_1 - R_2| \leq d \leq R_1 + R_2, \quad (4)$$

где  $d$  – расстояние между их центрами. Если сферы не совпадают, то размерность пересечения равна  $p - 1$ .

*Доказательство.* Допустим, что радиус первой  $R_1$  не меньше радиуса второй сферы. Соединим центры сфер прямой линией. Тогда в силу условия (4) ближняя к центру первой сферы точка пересечения ее со второй лежит внутри первой, а дальняя – вне нее или непосредственно на ее поверхности. В любом случае наличие таких точек обеспечивает существование точек пересечения сфер. Случай, когда первая сфера имеет меньший радиус, аналогичен.

Наконец, при нарушении правого неравенства (4) каждая из сфер лежит во внешней части пространства по отношению к другой, а, при нарушении левого неравенства, сфера меньшего радиуса целиком лежит внутри большей сферы.  $\square$

Отметим, что, если бы наши сферы имели бы разные размерности или не лежали бы в одной  $p$ -плоскости, то пересечение даже при выполнении (4) вполне могло бы оказаться пустым (например, когда сферы лежат в параллельных гиперплоскостях).

Поскольку мы хотим получить непустое пересечение всех имеющихся гиперсфер с центрами в визуализациях целей, то нужно потребовать выполнение полученного условия не только для исходных гиперсфер, но и для центров и радиусов сфер, которые образуются по мере построения соответствующего пересечения. В этом смысле полезным оказывается следующее нетрудно проверяемое утверждение.

**Лемма 6.** Рассмотрим две различные сферы одной размерности  $p$ , расположенных в одной  $p$ -плоскости, с центрами  $T_1, T_2$  и радиусами  $R_1, R_2$ , пересечение которых не пусто. Пусть  $d$  – расстояние между центрами сфер,  $N$  – начало координат. Тогда центром сферы, являющейся их пересечением, будет точка  $T$  с радиус-вектором

$$\overrightarrow{NT} = (1 - s) \cdot \overrightarrow{NT}_1 + s \cdot \overrightarrow{NT}_2, \quad s = \frac{R_1^2 - R_2^2 + d^2}{2d^2}, \quad (5)$$

а радиус пересечения вычисляется по формуле

$$R = \frac{1}{2d} \sqrt{(d^2 - (R_1 - R_2)^2)((R_1 + R_2)^2 - d^2)}. \quad (6)$$

$(p - 1)$ -плоскость, в которой расположено пересечение, содержит  $T$  и перпендикулярна вектору  $\overrightarrow{NT}_1 - \overrightarrow{NT}_2$ .

Теперь возьмем карту, на которую помещены визуализации всех целей и построим  $M$  гиперсфер с центрами в этих изображениях и радиусами  $R_{k,j}$ ,  $j = 1, \dots, M$ . Проверять возможность построения визуализации  $k$ -го наблюдателя на карте следует таким образом: сначала проверим (4) для каждой пары гиперсфер, и, если оно справедливо, заменим произвольно выбранную их пару на одну новую с центром (5) и радиусом (6). После этого объявим рабочей ту плоскость с меньшим числом измерений, в которой лежит получившееся пересечение. Ее параметры описаны только что сформулированной леммой. Спроецируем туда одну из еще не использованных гиперсфер, привлекая для нахождения центра и радиуса проекции (1 – 2) и пересечем эту проекцию с результатом предыдущего пересечения. Далее, будем повторять описанный процесс, добавляя к пересечению новые гиперсферы и «перенося действие» в образующуюся новую рабочую плоскость. При этом на каждом шаге необходимо проверять (4) для сфер в рабочей плоскости. Если мы не встретим нарушения этого условия ни на одном из шагов до вовлечения в процесс построения пересечения всех имевшихся сфер, то наблюдателя можно корректно изобразить на имеющейся карте.

Высказанные соображения позволяют предложить способ построения визуализации наблюдателя с расстояниями  $R_j$ ,  $j = 1, \dots, M$  на регулярной карте  $M$  целей.

**Теорема 3.** Построим на регулярной  $L$ -мерной карте целей  $M$  гиперсфер с центрами в визуализациях целей и радиусами  $R_j$ ,  $j = 1, \dots, M$ ,  $Q$  – пересечение произвольной их пары. Будем последовательно замещать  $Q$  его пересечением с одной из еще не использованных гиперсфер. Тогда все возможности построения на этой карте наблюдателя исчерпываются точками  $(L - M + 1)$ -сферы, являющейся финальным результатом этого процесса. Ее центр и радиус находятся  $(M - 1)$ -кратным последовательным применением формул (1 – 2) и (5 – 6) в соответствии с выбранным порядком привлечения гиперсфер к пересечению, но результат не зависит от этого порядка.

Используя то тривиальное соображение, что центр 0-сферы является единственной точкой этой сферы, видим, что на регулярной  $(M - 1)$ -мерной карте целей визуализировать наблюдателя можно единственным образом. При этом координаты его визуализации находятся  $(M - 1)$ -кратным последовательным применением соответствующих формул согласно процедуре, описанной теоремой 3.

## 5. Обсуждение и краткие выводы

Настоящая работа была написана с целью изучить количество возможных решений задачи многомерного анфолдинга. При этом было понятно, что, если выбрать в качестве



промежуточного пространства изображений пространство достаточно высокой размерности, то и решений задача будет иметь много. Но построение единственных возможных визуализаций всегда проще и не требует каких-то дополнительных инструментов и критериев. Поэтому путем подбора размерности промежуточной карты были предприняты попытки получения единственного решения.

В процессе решения задачи было введено довольно жесткое условие возможности однозначного размещения визуализаций целей на регулярной карте. Исследование условий для такой возможности не является предметом работы и пока отложено автором.

Если же регулярную карту целей мы строить умеем, то алгоритм визуализации наблюдателей дается теоремой 3. Действовать предлагается следующим образом. Пусть имеется  $M$  целей. Визуализируем их на  $(M - 1)$ -мерной карте с условием регулярности, проверяем, например, при помощи теоремы 2. Далее, используя алгоритм теоремы 3, строим визуализацию первого наблюдателя, затем второго и т.д.

Если в процессе этого построения выяснится, что такое визуализирование невозможно (например, нарушается условие (3)), то увеличиваем размерность карты. К сожалению, при этом теряется единственность решения.

Отдельный вопрос, который также следует пока отнести к открытым – что нужно потребовать, чтобы не было препятствий для добавления на карту визуализации последующих наблюдателей? Возникающие при этом проблемы видны на примере, приведенном после теоремы 1. Для того, чтобы обойти эти проблемы можно, разумеется, вновь увеличить размерность карты. Но, вероятно, существует какое-то простое достаточное условие, обеспечивающее успешное решение задачи в рамках той же размерности. К сожалению, автору пока не известно такое условие. Но, по крайней мере, в случае, когда наблюдатель имеется только один, алгоритм разработан полностью, и пути дальнейших поисков намечены достаточно ясно.

## Список литературы

1. Дейвисон М. Многомерное шкалирование (Методы наглядного представления данных). — М. : Мир, 1988. — 256 с.
2. Mair P., De Leeuw J., Wurzer M. Multidimensional Unfolding. Wiley StatsRef: Statistics Reference Online. — John Wiley & Sons, Ltd, 2014-2015. — 256 p.
3. Бююль А., Цёфель П. SPSS: Искусство обработки информации. Анализ статистических данных и восстановление скрытых закономерностей: Пер. с нем. — СПб. : «ДиаСофтЮП», 2005. — 608 с.
4. Dronov S.V., Leongardt K.A. Multidimensional unfolding problem solution in the case of a single target // IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 1210. — 2019. — 012034.
5. Дронов С.В., Коленко М.И. Практические проблемы реализации многомерного анфолдинга для предельно малого множества целей // МАК: Математики – Алтайскому краю: сб. трудов. — Барнаул : Изд-во Алт ун-та, 2020. — С. 174–180.
6. Александров П.С., Маркушевич А.И., Хинчин А.Я. Энциклопедия элементарной математики. Книга 5 - Геометрия. — М. : Наука, Гл. ред. Физ-мат лит-ры, 1966. — 624 с.