

Преобразование Бэклунд-Бианки

Чешкова М.А.

Алтайский государственный университет, г. Барнаул
 ста41@yandex.ru

Аннотация

Работа посвящена изучению преобразования Бэклунд-Бианки для поверхностей вращения постоянной отрицательной гауссовой кривизны. Поверхности вращения постоянной отрицательной гауссовой кривизны – это волчок Миндинга, катушка Миндинга, псевдосфера (поверхность Бельтрами). Используя математический пакет, строятся псевдосфера, волчок Миндинга, катушка Миндинга и их преобразования Бианки.

Ключевые слова: псевдосфера, волчок Миндинга, катушка Миндинга, гауссова кривизна, преобразование Бэклунд-Бианки, поверхность вращения.

1. Введение

Изучение псевдосферических поверхностей имеет большое значение для интерпретаций планиметрии Лобачевского. Установлена связь геометрических характеристик псевдосферических поверхностей с нелинейными дифференциальными уравнениями и уравнениями синус-Гордона.

Уравнение синус-Гордона играет важную роль в современной физике [1, 2].

Преобразования Бэклунд-Бианки позволяют по данной псевдосферической поверхности получить новые псевдосферические поверхности.

Теория преобразования Бианки в трехмерном пространстве E^3 и теория n -мерных многообразий в E^{2n-1} излагается в работе Аминова Ю.А. [3] и Тенеблата К. [4].

Преобразованию Бианки посвящены работы [5, 6].

Данная работа посвящена изучению преобразования Бэклунд-Бианки поверхностей вращения постоянной отрицательной гауссовой кривизны.

В [7, гл.12, § 59, п.3], [8, гл. Ф. Миндинг, п.3], [9, 10] описаны поверхности вращения постоянной гауссовой кривизны.

Поверхности постоянной отрицательной гауссовой кривизны – это волчок Миндинга, катушка Миндинга, псевдосфера.

Используя математический пакет, строятся псевдосфера, волчок Миндинга, катушка Миндинга и их преобразования Бианки.

2. Основные формулы

В евклидовом пространстве E^3 рассмотрим поверхность вращения M , полученную вращением плоской кривой вокруг оси.

Обозначим через $k = (0, 0, 1)$ -орт оси, а через $e = (\cos v, \sin v, 0)$ – радиус-вектор единичной окружности, расположенной в плоскости, ортогональной оси.

Тогда поверхность вращения M можно задать в виде

$$r = ue(v) + f(u)k, \quad (1)$$

где $f = f(u)$ – дифференцируемая функция класса C^2 , u, v – параметры.

Обозначим через n орт нормали к поверхности M . Имеем

$$n = \frac{f'(u)e(v) - k}{\sqrt{(f'(u))^2 + 1}}.$$

Легко найти главные кривизны k_1, k_2 поверхности M

$$k_1 = -\frac{f''(u)}{\sqrt{(f'(u))^2 + 1}^3}, k_2 = -\frac{f'(u)}{u\sqrt{(f'(u))^2 + 1}}.$$

Получаем следующее дифференциальное уравнение поверхности вращения постоянной гауссовой кривизны K

$$\frac{f''(u)}{\sqrt{(f'(u))^2 + 1}^3} \frac{f'(u)}{u\sqrt{(f'(u))^2 + 1}} = K,$$

или

$$\frac{f'(u)f''(u)}{u((f'(u))^2 + 1)} = K.$$

Полагая $K = const$ – константа, получим решения

$$f(u) = \pm \int \sqrt{\frac{Ku^2 - (c-1)}{c - Ku^2}} du, \quad c = const.$$

Для определённости выбираем знак плюс. Итак,

$$f(u) = \int \sqrt{\frac{Ku^2 - (c-1)}{c - Ku^2}} du, \quad c = const. \quad (2)$$

Определим метрический тензор g_{ij} и символы Кристоффеля Γ_{ij}^k .

Имеем

$$\begin{aligned} r_1 = r_u &= e(v) + f'(u)k, r_2 = r_v = ue'(v), \\ r_{11} = r_{uu} &= f''(u)k, r_{12} = r_{uv} = e'(v), r_{22} = r_{vv} = -ue(v), \\ g_{11} = (r_1, r_1) &= (f'(u))^2 + 1 = \frac{1}{c - Ku^2}, \\ g_{22} = (r_2, r_2) &= u^2, g_{12} = (r_1, r_2) = 0, \\ (r_{ij}, r_k) &= \Gamma_{ij}^s(r_s, r_k), \\ \Gamma_{11}^1 &= \frac{f'f''}{1 + (f'(u))^2}, \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{-u}{1 + (f'(u))^2}, 1 + (f'(u))^2 = \frac{1}{c - Ku^2} = g_{11}. \end{aligned} \quad (3)$$

Итак,

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{Ku}{c - Ku^2}, \Gamma_{22}^1 = (-c + Ku^2)u, \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{u}. \quad (4)$$

Остальные Γ_{ij}^k равны нулю.

В зависимости от значения параметра c поверхности вращения постоянной отрицательной гауссовой кривизны делятся на три вида – это волчок Миндинга ($0 < c < 1$), катушка Миндинга ($c < 0$), псевдосфера ($c = 0$) [7, гл.12, § 59, п.3], [8, гл. Ф. Миндинг, п.3]

3. Преобразование Бэклунда

Рассмотрим две гладкие поверхности M , \bar{M} и диффеоморфизм $f : M \rightarrow \bar{M}$. Касательные плоскости в соответствующих точках $p \in M$, $f(p) \in \bar{M}$ пересекаются по прямой $(p, f(p))$, образуя постоянный двугранный угол θ , причем вектор $\overrightarrow{pf(p)} = \rho V_p$, где V_p - орт, $\rho = \text{const}$.

Теорема Бэклунда утверждает, что если поверхность M имеет гауссову кривизну $K = -\frac{1}{\rho^2} \sin(\theta)^2$, то и поверхность \bar{M} имеет ту же кривизну. Если угол θ прямой, то преобразование Бэклунда называется преобразованием Бианки.

Пусть поверхность $M : r = r(u^1, u^2)$, отнесена к линиям кривизны. Обозначим через $R(u^1, u^2)$ - радиус-вектор поверхности \bar{M} и рассмотрим отображение $f : M \rightarrow \bar{M}$

$$R(u^1, u^2) = r(u^1, u^2) - \rho V. \quad (5)$$

Теорема 1. Преобразование Бэклунда определяется системой

$$\begin{aligned} \rho \nabla_1 V^1 &= \rho(\partial_{u^1} V^1 + \Gamma_{1s}^1 V^s) = 1 - g_{11}(V^1)^2 - \rho \text{ctg}(\theta) b_{11} V^1 \sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}} V^2, \\ \rho \nabla_1 V^2 &= \rho(\partial_{u^1} V^2 + \Gamma_{1s}^2 V^s) = -g_{11} V^1 V^2 - \rho \text{ctg}(\theta) b_{11} V^1 \left(-\sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}} V^1\right), \\ \rho \nabla_2 V^1 &= \rho(\partial_{u^2} V^1 + \Gamma_{2s}^1 V^s) = -g_{22} V^1 V^2 - \rho \text{ctg}(\theta) b_{22} V^2 \sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}} V^2 \\ \rho \nabla_2 V^2 &= \rho(\partial_{u^2} V^2 + \Gamma_{2s}^2 V^s) = 1 - g_{22}(V^2)^2 - \rho \text{ctg}(\theta) b_{22} V^2 \left(-\sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}} V^1\right), \\ g_{11}(V^1)^2 + g_{22}(V^2)^2 &= 1, \end{aligned} \quad (6)$$

где g_{ij}, b_{ij} - первая и вторая квадратичные формы поверхности M , соответственно.

Доказательство. Обозначим через n - орт нормали к поверхности M в точке $p \in M$, а через \bar{n} - орт нормали к поверхности \bar{M} в точке $f(p) \in \bar{M}$.

Имеем

$$\bar{n} = \sin \theta [V, n] + \cos \theta n. \quad (7)$$

Пусть поверхность M , заданная радиус-вектором $r = r(u^1, u^2)$, отнесена к линиям кривизны.

Тогда

$$\begin{aligned} [V, n] &= -\sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}} V^1 r_2 + \sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}} V^2 r_1, \quad V = V^1 r_1 + V^2 r_2, \quad g_{11}(V^1)^2 + g_{22}(V^2)^2 = 1, \\ r_1 &= \partial_{u^1} r(u^1, u^2), \quad r_2 = \partial_{u^2} r(u^1, u^2), \\ g_{11} &= (r_1, r_1), \quad g_{22} = (r_2, r_2), \quad g_{12} = (r_1, r_2) = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Из (5) имеем

$$R_i = r_i - \rho \partial_i V. \quad (9)$$

Рассмотрим разложение вектора R_i относительно ортобазиса $V, [V, n], n$.

$$R_i = \alpha_i V + \beta_i [V, n] + \gamma_i n. \quad (10)$$

Умножим (10) скалярно на V . Имеем

$$\alpha_i = (R_i, V) = (r_i, V) - \rho (\partial_i V, V).$$

Так как $(V, V) = 1$, $(\partial_i V, V) = 0$, получим

$$\alpha_i = g_{is} V^s.$$

Умножим (10) скалярно на n .

$$\gamma_i = (r_i, n) - \rho(\nabla_i V, n) - \rho b_{is} V^s = -\rho b_{is} V^s.$$

Так как $(R_i, \bar{n}) = 0$, то

$$\beta_i = -\operatorname{ctg} \theta \gamma_i = \rho b_{is} V^s \operatorname{ctg} \theta.$$

Положим

$$R_i = \alpha_i V + \beta_i [V, n] + \gamma_i n. \quad (11)$$

Так как $(V, V) = 1$, $(\partial_i V, V) = 0$, то получим

$$\alpha_i = (r_i, V) = g_{ii} V^i, \gamma_i = -\rho b_{ii} V^i.$$

Из условия $(R_i, \bar{n}) = 0$ получим $\beta_i = -\operatorname{ctg} \theta \gamma_i$.

Таким образом,

$$\alpha_i = (r_i, V) = g_{ii} V^i, \gamma_i = -\rho b_{ii} V^i, \beta_i = -\operatorname{ctg} \theta \gamma_i. \quad (12)$$

Имеем

$$\begin{aligned} R_i &= r_i - \rho(\nabla_i V + b(r_i, V)n), \\ r_i - \rho \nabla_i V &= \alpha_i V + \beta_i [V, n]. \end{aligned}$$

Используя (8),(9),(10),(11) получим, что для преобразования Бэклунда имеют место равенства (6). \square

Рассмотрим преобразование Бианки, полагая $\rho = 1$, $K = -1$. В силу (11),(12) имеем

$$R_i = (r_i, V)V - b_{is} V^s n, \quad b_{12} = 0, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \bar{g}_{11} &= (R_1, R_1) = g_{11}^2 (V^1)^2 (1 + k_1^2), \quad \bar{g}_{12} = (R_1, R_2) = 0, \\ \bar{g}_{22} &= (R_2, R_2) = g_{22}^2 (V^2)^2 (1 + k_2^2), \quad k_1 = b_{11}/g_{11}, \quad k_2 = b_{22}/g_{22}, \end{aligned} \quad (14)$$

где k_i – главные кривизны поверхности M , b_{ij} – коэффициенты второй квадратичной формы.

Рассмотрим преобразование Бианки псевдосферы.

Псевдосфера

При $c = 0$ имеем псевдосферу [6, гл.12, § 59, п.3], [7, гл. Ф. Миндинг, п.3].

Из (3) получим

$$f(u) = \int \sqrt{\frac{-u^2 + 1}{u^2}} du. \quad (15)$$

Уравнение псевдосферы примет вид

$$r(u, v) = ue(v) + \int \sqrt{\frac{-u^2 + 1}{u^2}} duk. \quad (16)$$

Имеем

$$g_{11} = (r_1, r_1) = \frac{1}{u^2}, \quad g_{12} = (r_1, r_2) = 0, \quad g_{22} = u^2. \quad (17)$$

Определим символы Кристоффеля Γ_{ij}^k из (4).

Итак,

$$\Gamma_{11}^1 = -\frac{1}{u}, \Gamma_{22}^1 = -u^3, \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{u}. \quad (18)$$

Остальные Γ_{ij}^k равны нулю.

Формулы (6) примут вид

$$\begin{aligned} \partial_u V^1 - \frac{1}{u} V^1 &= 1 - \frac{1}{u^2} (V^1)^2, \quad \partial_v V^1 - u^3 V^2 = -u^2 V^1 V^2, \\ \partial_u V^2 + \frac{1}{u} V^2 &= -\frac{1}{u^2} V^1 V^2, \quad \partial_v V^2 + \frac{1}{u} V^1 = 1 - u^2 (V^2)^2, \\ &\frac{1}{u^2} (V^1)^2 + u^2 (V^2)^2 = 1. \end{aligned} \quad (19)$$

Используя математический пакет, получим, что система (19) имеет решение

$$\begin{aligned} V^1 &= u \frac{2u^2 v + C_1 u^2 v^2 - 2C_2 u^2 - C_1}{2u^2 v + C_1 u^2 v^2 - 2C_2 u^2 + C_1}, \\ V^2 &= \frac{2(1 + C_1 v)}{2u^2 v + C_1 u^2 v^2 - 2C_2 u^2 + C_1}, \quad C_1, C_2 - const, \\ &\frac{1}{u^2} (V^1)^2 + u^2 (V^2)^2 = 1. \end{aligned} \quad (20)$$

Из условия $(V, V) = 1$ следует

$$2C_1 C_2 + 1 = 0. \quad (21)$$

Обозначим $c_1 = \frac{1}{C_1}$. Имеем

$$V^1 = u \frac{u^2(v + c_1)^2 - 1}{u^2(v + c_1)^2 + 1}, \quad V^2 = \frac{2(v + c_1)}{u^2(v + c_1)^2 + 1}. \quad (22)$$

Определим коэффициенты \bar{g}_{ij} первой квадратичной формы поверхности \bar{M} . Из (22), (20), (14) при $c_1 = 0$, получим

$$\bar{g}_{11} = \frac{(u^2 v^2 - 1)^2}{u^2(1 - u^2)(u^2 v^2 + 1)^2}, \quad \bar{g}_{12} = 0, \quad \bar{g}_{22} = \frac{4u^2 v^2}{(u^2 v^2 + 1)^2}, \quad (1 - u^2 > 0). \quad (23)$$

Таким образом, поверхность \bar{M} при $c_1 = 0$ имеет уравнение

$$\bar{M} : R(u, v) = ue(v) + f(u)k - V^1 r_1 - V^2 r_2, \quad (24)$$

$$V^1 = u \frac{u^2 v^2 - 1}{u^2 v^2 + 1}, \quad V^2 = \frac{2v}{u^2 v^2 + 1}, \quad (25)$$

$$r_1 = e(v) + \sqrt{\frac{1 - u^2}{u^2}} k, \quad r_2 = r_v = ue'(v).$$

Положим $u = \sin t$. Тогда

$$f(t) = \int \frac{\cos^2 t}{\sin t} dt = \cos t + \ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{t}{2}\right)\right). \quad (26)$$

$$\begin{aligned} R &= \frac{2 \sin t}{\sin^2 t v^2 + 1} e(v) - \frac{2 \sin t v}{\sin^2 t v^2 + 1} e'(v) + \\ &+ \left(\frac{2 \cos t}{v^2 \sin^2 t + 1} + \ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{t}{2}\right)\right) \right) k. \end{aligned} \quad (27)$$

Итак,

$$\begin{aligned} x &= \frac{2 \sin t}{v^2 \sin^2 t + 1} (\cos v + v \sin v), \\ y &= \frac{2 \sin t}{v^2 \sin^2 t + 1} (\sin v - v \cos v), \\ z &= \frac{2 \cos t}{v^2 \sin^2 t + 1} + \ln(\operatorname{tg}(\frac{t}{2})). \end{aligned} \quad (28)$$

Построим эту поверхность для $t \in [\pi/18, \pi - \pi/18]$, $v \in [2\pi, 5\pi]$ (рисунок 1).
Полученная поверхность есть поверхность Куэна [11, с. 345].

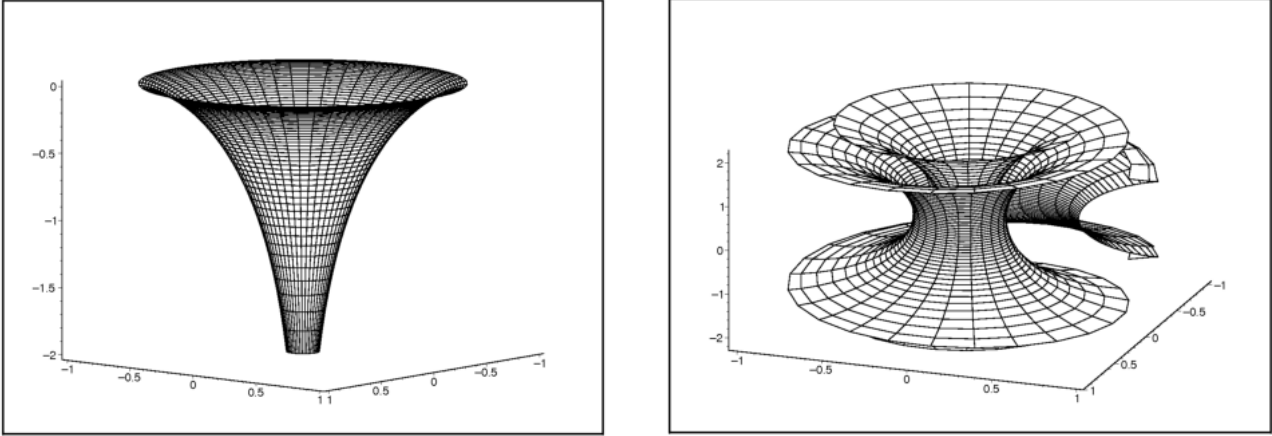


Рисунок 1. Поверхность псевдосферы и поверхность Куэна

Утверждение 1. Поверхность Куэна есть преобразование Бианки псевдосферы.

Катушка Миндинга

Для $K = -1$, следуя Миндингу, $c = -a^2$, $u = ach(t)$, $a = 1$.

Из (2) имеем

$$\begin{aligned} f(t) &= \int \sqrt{1 - \operatorname{sh}^2 t} dt, \\ f(t) &= 2(\operatorname{EllipticF}(\operatorname{sh} t, i) - \operatorname{EllipticE}(\operatorname{sh} t, i)) + C, \\ C &= \operatorname{const}, \end{aligned}$$

где $\operatorname{EllipticF}(\operatorname{sh} t, i)$, $\operatorname{EllipticE}(\operatorname{sh} t, i)$ – эллиптические интегралы первого и второго рода, соответственно.

Предположим $C = 0$. Итак

$$f(t) = 2(\operatorname{EllipticF}(\operatorname{sh} t, i) - \operatorname{EllipticE}(\operatorname{sh} t, i)). \quad (29)$$

При $1 - \operatorname{sh}^2 t \geq 0$ имеем $t \in [-\ln(1 + \sqrt{2}), \ln(1 + \sqrt{2})]$. Построим катушку Миндинга. Имеем

$$M : r(t, v) = \operatorname{ch} te(v) + f(t)k, \quad (30)$$

$t \in [-\ln(1 + \sqrt{2}), \ln(1 + \sqrt{2})]$, $v \in [-\pi, \pi]$.

Положим $m = f(\ln(1 + \sqrt{2}))$ и определим еще две секции катушки Миндинга

$$M1 : r(t, v) = \operatorname{ch} te(v) + (f(t) + 2m)k,$$

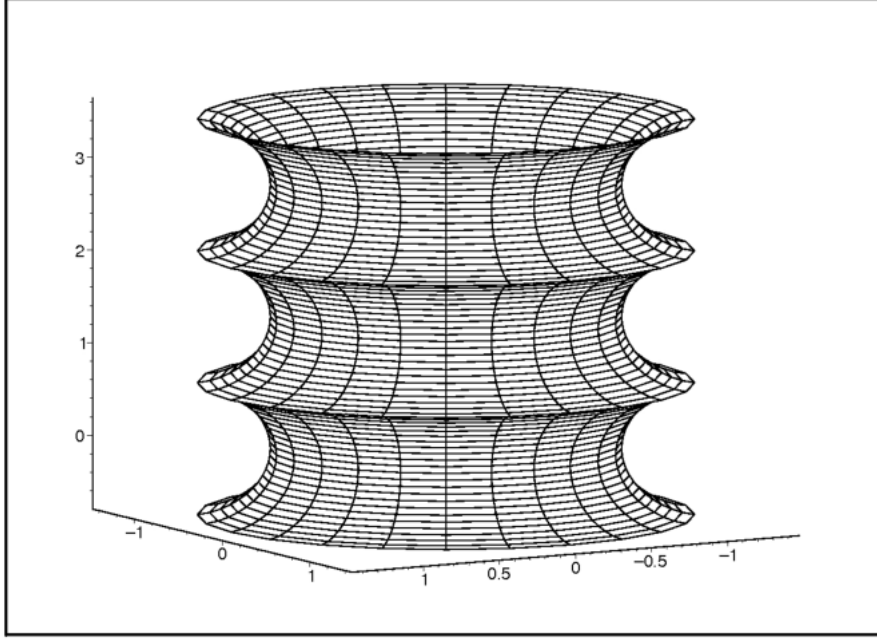


Рисунок 2. Три секции катушки Миндинга

$$t \in [-\ln(1 + \sqrt{2}), \ln(1 + \sqrt{2})], v \in [-\pi, \pi].$$

$$M2 : r(t, v) = \operatorname{ch} t e(v) + (f(t) + 4m)k,$$

$$t \in [-\ln(1 + \sqrt{2}), \ln(1 + \sqrt{2})], v \in [-\pi, \pi].$$

Построим три секции катушки Миндинга (рисунок 2).

Определим метрический тензор g_{ij} и символы Кристоффеля Γ_{ij}^k катушки Миндинга.

Имеем

$$\begin{aligned} r_1 = r_t &= \operatorname{sh} t e(v) + f'(t)k, & r_2 = r_v &= \operatorname{ch} t e'(v), \\ r_{11} = r_{tt} &= \operatorname{ch} t e(v) + f''(t)k, & r_{12} = r_{tv} &= \operatorname{sh} t e'(v), \\ r_{22} = r_{vv} &= \operatorname{ch} t e''(v) = -\operatorname{ch} t e(v), \end{aligned} \quad (31)$$

$$f'(t) = \sqrt{1 - \operatorname{sh}^2 t}, \quad f''(t) = -\frac{\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t}{\sqrt{1 - \operatorname{sh}^2 t}},$$

$$g_{11} = (r_1, r_1) = 1, \quad g_{12} = (r_1, r_2) = 0, \quad g_{22} = (r_2, r_2) = \operatorname{ch}^2 t, \quad (32)$$

$ds^2 = dt^2 + \operatorname{ch}^2 t dv^2$. Координатная система полугеодезическая.

Символы Кристоффеля Γ_{ij}^k определим из условия $(r_{ij}, r_k) = \Gamma_{ij}^s (r_s, r_k)$.

Итак,

$$\Gamma_{22}^1 = -\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \operatorname{th} t, \quad \operatorname{th} t = \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t}. \quad (33)$$

Остальные Γ_{ij}^k равны нулю.

4. Преобразование Бианки катушки Миндинга

Обозначим через r – радиус-вектор поверхности M , а через R – радиус-вектор поверхности \bar{M} . Полагаем $K = -1$ и рассмотрим отображение $f : M \rightarrow \bar{M}$

Имеем

$$R = r - V, \quad V = V^s r_s. \quad (34)$$

Из условия $(R_i, [n, V]) = 0$ получим

$$R_i = r_i - \partial_i V = \omega(r_i) V + \alpha(r_i) n. \quad (35)$$

Так как $(V, V) = 1$, $(\partial_i V, V) = 0$, $\nabla_i V = \nabla_i(V^j r_j) = \partial_i V^j r_j + V^j \Gamma_{ij}^s r_s$, то

$$\omega(r_i) = (r_i, V), \partial_i V = \nabla_i V + b(r_i, V)n, \nabla_i V = r_i - \omega(r_i)V, \alpha(r_i) = -(\partial_i V, n) = b_{is}V^s,$$

b_{ij} - координаты второй квадратичной формы.

Имеем

$$\begin{aligned} \nabla_1 V^1 &= \partial_t V^1 + \Gamma_{1s}^1 V^s = 1 - g_{11}(V^1)^2, \\ \nabla_1 V^2 &= \partial_t V^2 + \Gamma_{1s}^2 V^s = -g_{11}V^1 V^2, \\ \nabla_2 V^1 &= \partial_v V^1 + \Gamma_{2s}^1 V^s = -g_{22}V^1 V^2, \\ \nabla_2 V^2 &= \partial_v V^2 + \Gamma_{2s}^2 V^s = 1 - g_{22}(V^2)^2. \end{aligned} \quad (36)$$

$$g_{11}(V^1)^2 + g_{22}(V^2)^2 = 1. \quad (37)$$

Используя математический пакет, получим, что система (36) имеет решение

$$V^1(t, v) = \frac{e^{2t}A1(v) + A2(v)}{e^{2t}A1(v) - A2(v)},$$

$$V^2(t, v) = 4 \frac{e^{2v}C1 + C2}{(e^t A1(v) - e^{-t} A2(v))(e^t + e^{-t})},$$

$$A1(v) = 2e^v + e^{2v}C1 - C2, A2(v) = 2e^v - e^{2v}C1 + C2, C1, C2 - const.$$

В силу (37) $C2 = -\frac{1}{C1}$.

Введем обозначение $c_1 = \frac{1}{C1}$.

Имеем $A1(v) = 2e^v + \frac{e^{2v}}{c_1} + c_1$, $A2(v) = 2e^v + \frac{e^{2v}}{c_1} - c_1$.

Итак,

$$\begin{aligned} V^1(t, v) &= \frac{e^{2t}(e^v + c_1)^2 - (e^v - c_1)^2}{e^{2t}(e^v + c_1)^2 + (e^v - c_1)^2}, \\ V^2(t, v) &= \frac{4(e^{2v} - c_1)}{(e^{2t}(e^v + c_1)^2 + (e^v - c_1)^2)(e^t + e^{-t})}. \end{aligned} \quad (38)$$

Уравнение поверхности \bar{M} примет вид

$$R = (\text{ch } t - V^1(t, v) \text{sh } t)e(v) - V^2(t, v) \text{ch } t e'(v) + 2(\text{EllipticF}(\text{sh } t, i) - \text{EllipticE}(\text{sh } t, i))k.$$

Построим эту поверхность, полагая $c_1 = e^2$, $t \in [-\ln(1 + \sqrt{2}), \ln(1 + \sqrt{2})]$, $v \in [-\pi, \pi]$ и $v \in [0, 4\pi]$ (рисунок 3).

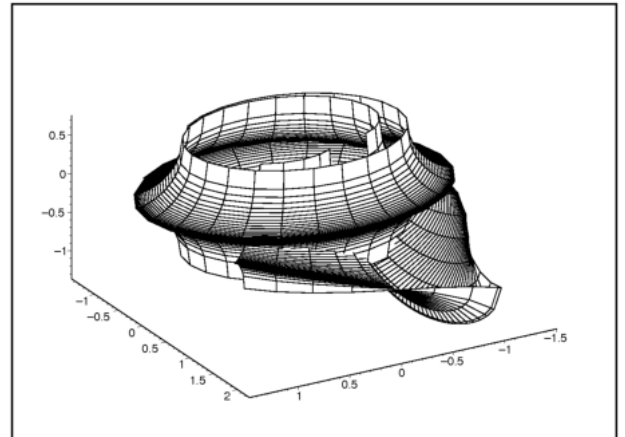
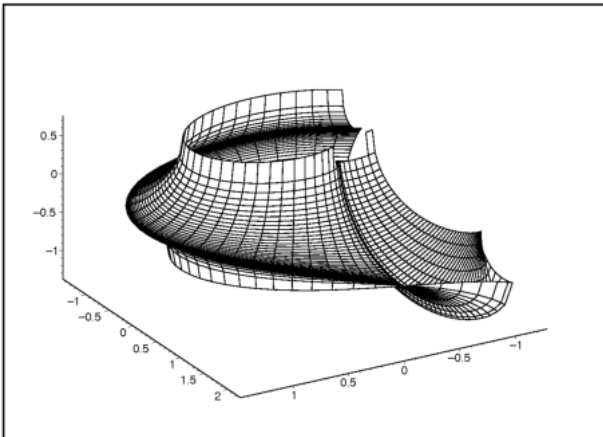
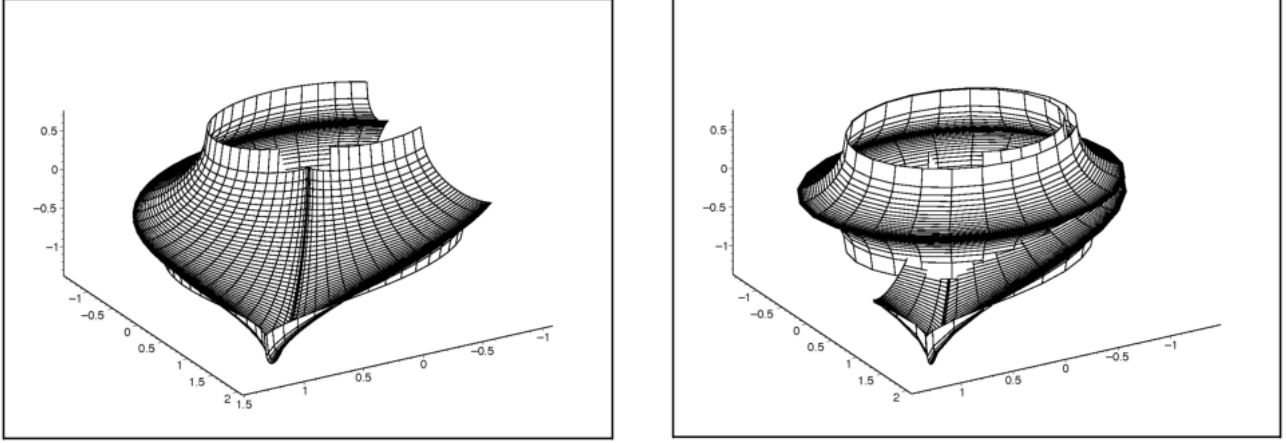
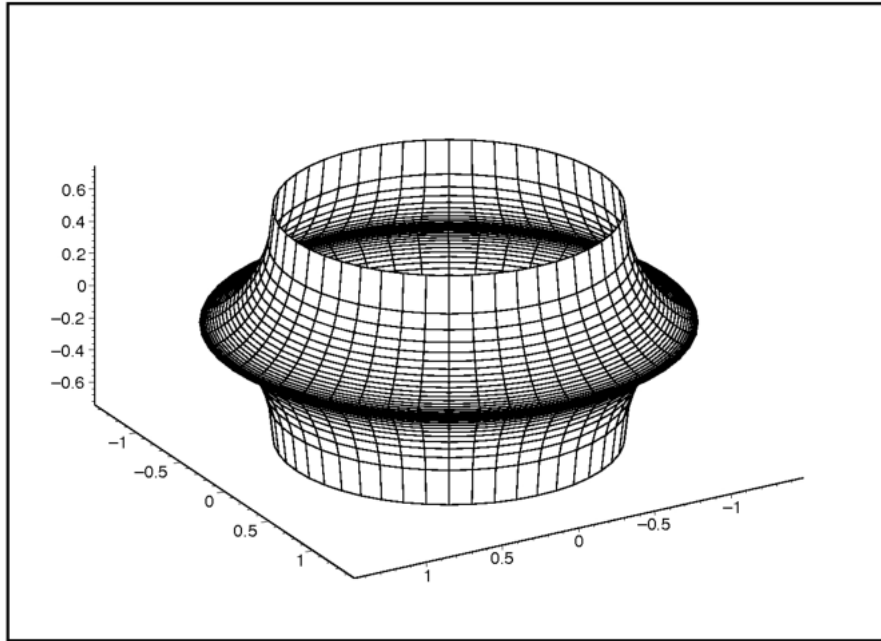


Рисунок 3. Преобразование Бианки катушки Миндинга, $c_1 = e^2$

Рисунок 4. Преобразование Бианки катушки Миндинга, $c_1 = e$ Рисунок 5. Преобразование Бианки катушки Миндинга, $c_1 = 0$

Построим также поверхность, полагая $c_1 = e$, $t \in [-\ln(1 + \sqrt{2}), \ln(1 + \sqrt{2})]$, $v \in [-\pi, \pi]$ и $v \in [0, 4\pi]$ (рисунок 4).

Рассмотри случай $c_1 = 0$ и построим поверхность, полагая $t \in [-\ln(1 + \sqrt{2}), \ln(1 + \sqrt{2})]$, $v \in [-\pi, \pi]$ (рисунок 5).

Определим метрический тензор поверхности \bar{M} .

Имеем $R_i = (r_i, V)V - b_{is}V^s n$, $b_{12} = 0$,

$$\begin{aligned} \bar{g}_{11} &= (R_1, R_1) = g_{11}^2 (V^1)^2 (1 + k_1^2), \quad \bar{g}_{12} = (R_1, R_2) = 0, \\ \bar{g}_{22} &= (R_2, R_2) = g_{22}^2 (V^2)^2 (1 + k_2^2), \quad k_1 = b_{11}/g_{11}, \quad k_2 = b_{22}/g_{22}, \end{aligned} \quad (39)$$

где k_i – главные кривизны поверхности M , b_{ij} – коэффициенты второй квадратичной формы.

Определим главные кривизны поверхности M катушки Миндинга.

Имеем $n = \text{sh} t k - \sqrt{1 - \text{sh}^2 t} e(v)$, $b_{ii} = (r_{ii}, n)$,

$$k_1 = -\frac{\text{ch} t}{\sqrt{1 - \text{sh}^2 t}}, \quad k_2 = \frac{\sqrt{1 - \text{sh}^2 t}}{\text{ch} t}. \quad (40)$$

Используя формулу Фробениуса [7, с. 351] для ортогональной параметризации

$$\bar{K} = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(\partial_t \frac{G_t}{\sqrt{EG}} + \partial_v \frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right),$$

где $E = \bar{g}_{11}$, $G = \bar{g}_{22}$ и математический пакет, убеждаемся $\bar{K} = -1$.

Волчок Миндинга

При $0 < c = a^2 < 1$ имеем *волчок Миндинга*. Рассмотрим (2), где

$$K = -1, -u^2 - (c - 1) \geq 0, c = \frac{1}{4}.$$

Получим

$$f(u) = \mp(2\text{EllipticF}\left(\frac{2u\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3i}\right) - 1/2\text{EllipticE}\left(\frac{2u\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3i}\right)) + c1.$$

Выбираем знак плюс и $c1 = 0$. Потребуем, чтобы $u \in [-\sqrt{1-c}, 0]$. Введем обозначение

$$b = f(-\sqrt{1-c}) = -2\text{EllipticK}(\sqrt{3i}) + 1/2\text{EllipticE}(\sqrt{3i})$$

и построим поверхности (волчок Миндинга)

$$V1 : r(u, v) = (u \cos v, u \sin v, f(u)), V2 : r(u, v) = (u \cos v, u \sin v, -f(u) + 2b),$$

$$V3 : r(u, v) = (u \cos v, u \sin v, -f(u)), V4 : r(u, v) = (u \cos v, u \sin v, f(u) - 2b).$$

Следуя Миндингу, введем обозначение $u = a \operatorname{sh}(t)$, $a = \frac{1}{2}$. Имеем

$$f(t) = \int \sqrt{1 - \frac{1}{4} \operatorname{ch}^2 t} dt = \int \sqrt{1 - \frac{1}{4}(1 + \operatorname{sh}^2 t)} dt,$$

$$f(t) = 2\text{EllipticF}\left(\frac{\operatorname{sh} t \sqrt{3}}{3}, \sqrt{3i}\right) - 1/2\text{EllipticE}\left(\frac{\operatorname{sh} t \sqrt{3}}{3}, \sqrt{3i}\right),$$

$$r = \frac{1}{2} \operatorname{sh} t e(v) + f(t)k,$$

$$r_1 = \frac{1}{2} \operatorname{ch} t e(v) + \sqrt{1 - \frac{1}{4} \operatorname{ch}^2 t} k, r_2 = \frac{1}{2} \operatorname{sh} t e'(v),$$

$$g_{11} = 1, g_{12} = 0, g_{22} = \frac{1}{4} \operatorname{sh}^2 t,$$

$$\Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{4} \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t, \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \operatorname{cth} t, \operatorname{cth} t = \frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{sh} t}.$$

Остальные Γ_{ij}^k равны нулю.

Система (6) примет вид

$$\partial_t V^1 = 1 - (V^1)^2, \partial_t V^2 + \frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{sh} t} V^2 = -V^1 V^2,$$

$$\partial_v V^1 - \frac{1}{4} \operatorname{ch} t \operatorname{sh} t V^2 = -\frac{1}{4} \operatorname{sh}^2 t V^1 V^2,$$

$$\partial_v V^2 + \frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{sh} t} V^1 = 1 - \frac{1}{4} \operatorname{sh}^2 t (V^2)^2,$$

$$(V^1)^2 + \frac{1}{4} \operatorname{sh}^2 t (V^2)^2 = 1.$$

Используя математический пакет, получим, что система имеет решение

$$V^1 = \frac{(e^{2t} + 1) \cos^2(C/4 - v/4) - e^{2t}}{(e^{2t} - 1) \cos^2(C/4 - v/4) - e^{2t}},$$

$$V^2 = \pm \frac{8e^{2t} \sin(C/4 - v/4) \cos(C/4 - v/4)}{((e^{2t} - 1) \cos^2(C/4 - v/4) - e^{2t})(e^{2t} - 1)}.$$

Уравнение поверхности \bar{M} примет вид

$$R = \frac{1}{2} \operatorname{sh} t e(v) - V^1(t, v) r_1 - V^2(t, v) r_2 + 2 \operatorname{Elliptic} F\left(\frac{\operatorname{sh} t \sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}i\right) - 1/2 \operatorname{Elliptic} E\left(\frac{\operatorname{sh} t \sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}i\right) k.$$

Построим волчок Миндинга при $t \in [0, \operatorname{arcsch} \sqrt{3}]$, $v \in [-\pi, \pi]$ (4 секции) и выбрав V^2 со знаком плюс, построим преобразования Бианки волчка Миндинга при $C = \pi/2$, $t \in [0, \operatorname{arcsch} \sqrt{3}]$, $v \in [-2\pi, 2\pi]$ (рисунок 6).

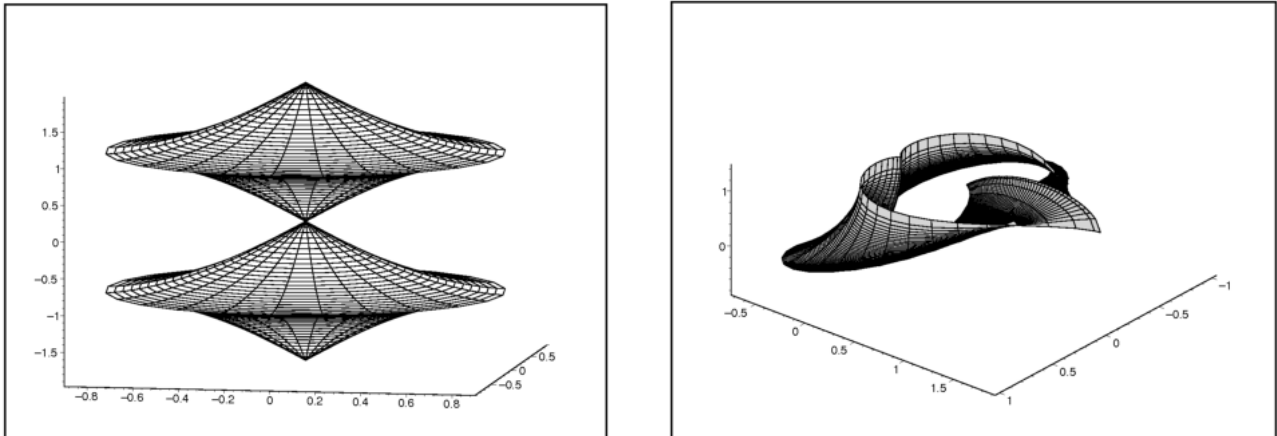


Рисунок 6. Волчок Миндинга, 4 секции. Преобразование Бианки волчка Миндинга $C = \pi/2$

Список литературы

1. Попов А.Г. Pseudospherical surfaces and some problems of matemacal physics // Fundamentalnaya i prikladnaya matematika. — 2005. — Vol. 11, no. 1. — P. 227–239.
2. Поздняк Э.Г., Попов А.Г. Геометрия Лобачевского и уравнения математической физики // Докл. РАН. — 1993. — Т. 332, № 4. — С. 418–421.
3. Аминов Ю.А. Преобразование Бианки для области многомерного пространства Лобачевского // Украинский геометрический сборник. — 1978. — Т. 21. — С. 3–5.
4. Tenenblat K. Transformations of manifolds and applications to differential equations. Pseudospherical surfaces and some problems of matemacal physics. — London : Logman, 1998.
5. Горькавый В.А., Невмержицкая Е.Н. Аналог преобразования Бианки для двумерных поверхностей в пространстве $S^3 \times R^1$ // Матем. заметки. — 2011. — Т. 89, № 6. — С. 833–845.

6. Масальцев Л.А. Бикасательное преобразование Бианки подмногообразия постоянной отрицательной кривизны H^n евклидова пространства R^{2n} // Изв. вузов. Матем. — 2005. — № 7. — С. 43–48.
7. Каган В.Ф. Основы теории поверхностей в тензорном изложении. — М. : ГИИТЛ, 1947. — Т. II.
8. Норден А.П. Об основаниях геометрии. — М. : ГИИТЛ, 1956.
9. Чешкова М.А. Геодезические поверхностей вращения постоянной гауссовой кривизны // Сибирский журнал чистой и прикладной математики. — 2018. — Т. 18, № 3. — С. 64–67.
10. Чешкова М.А. Преобразование Бианки n – поверхностей в E^{2n-1} // Изв. вузов. Матем. — 1997. — № 9. — С. 71–74.
11. Кривошاپко С.Н., Иванов В.Н., Халаби С.М. Аналитические поверхности. — М. : Наука, 2006.