УДК 514.01

Функциональные уравнения от функций многих переменных

Поликанова И.В.
Алтайский государственный педагогический университет, г. Барнаул
Anirix1@yandex.ru

Аннотация

В статье приводятся решения функциональных уравнений от функций многих переменных: Йенсена, Коши (четырёх типов), Лобачевского. Это стало возможным благодаря конструкции мультифункций и использованию критерия линейности функции многих переменных, полученных автором ранее.

Ключевые слова: функциональные уравнения от функций многих переменных, функциональные уравнения Коши, уравнения Иенсена, уравнение Лобачевского.

1. Введение

Известно не так много исследований, относящихся к функциональным уравнениям от функций многих переменных. И главным образом они относятся к функциям от двух переменных. Это уравнения Синцова (1903) [1] и его обобщения по пикседеровскому типу (1997) [2]. Из современных работ можно назвать статью А.Д. Полянина и А.И. Журова (2005) [3]. Предложенная нами конструкция из функций, называемая мультифункциями, позволяет существенно расширить класс функциональных уравнений от функций многих переменных, допускающих явное решение.

Цель данной работы ознакомить с решениями функциональных уравнений от функций многих переменных Йенсена, Коши (четырёх типов), Лобачевского, обнародованных на конференции, посвящённой памяти Ю.Г. Решетняка [4].

Сам Коши, как отмечает Я. Ацель в [5], рассмотрел 4 типа функциональных уравнений в классе непрерывных функций одной переменной:

$$\begin{array}{llcll}
I. & f(x+y) & = & f(x)+f(y); & \text{решения: } f(x)=ax,\ \ f(x)\equiv 0;\\
II. & f(x+y) & = & f(x)\cdot f(y); & \text{решения: } f(x)=a^x,\ \ f(x)\equiv 0;\\
III. & f(x\cdot y) & = & f(x)+f(y); & \text{решения: } f(x)=log_a x,\ \ f(x)\equiv 0;\\
IV. & f(x\cdot y) & = & f(x)\cdot f(y); & \text{решения: } f(x)=a^x,\ \ f(x)\equiv 0,\ \ f(x)\equiv 1.
\end{array}$$

Решение 1-ого сводилось к функциональному уравнению для функций одной переменной, решаемому последовательно на множествах натуральных, затем целых и рациональных чисел, а затем путём предельного перехода решение распространялось на все действительные числа благодаря непрерывности функции. Остальные уравнения сводились последовательно к уже решённым с помощью подстановок и замены функции. Уравнение Иенсена сводилось к 1-ому уравнению Коши, уравнение Лобачевского – к уравнению Иенсена. Позднее условие непрерывности было заменено на более слабые условия, при которых имеют место те же решения: непрерывности в одной точке или же монотонности функции или ограниченности её с одной стороны на интервале положительной длины [5]. В то же время в более широких классах существуют разрывные решения, отличные от линейных. Попытки ослабить условия регулярности с гарантией линейности решения предпринимаются до сих пор. Так, Даниэль Рим (2010) [6] рассматривает решение в классе локально интегрируемых функций как одной, так и нескольких переменных. В [5] приводятся и решения аддитивного уравнения Коши 1-ого типа для функций и отображений от нескольких переменных, и экспоненциального уравнения Коши 2-ого типа для функций нескольких переменных, причём, первое представляется в виде линейной комбинации решений Коши от одной переменной, 2-ое сводится подстановкой к 1-ому.

Предлагаемый нами критерий линейности отображения позволил решить известные функциональные уравнений значительно более простым способом без сведения к уравнениям от функций одной переменной. Кроме того, в традиционном изложении решение уравнения Йенсена является следствием аддитивного уравнения Коши 1-ого типа. Мы же выводим уравнение Йенсена непосредственно из критерия линейности отображения и уже к нему сводим решения остальных уравнений.

2. Мультифункции

Многие результаты, приведённые в [5] для функции одной переменной могут быть перенесены на функции нескольких переменных и на отображения, если множество $\mathbb{R}$ действительных чисел рассматривать не только как линейное пространство, но как поле. В этом случае элементы структуры $\mathbb{R}^n$ не являются векторами. Как цельные образования и переменные отображений $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, будем называть их *мультиаргументами* и обозначать жирным шрифтом в отличие от вещественных координат: $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

В данном разделе мы определим конструкции из функций одной и нескольких переменных и выясним некоторые их свойства.

Посредством функции $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ определим отображение типа $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ правилом

$$u(\mathbf{x}) = (u(x_1), u(x_2), ..., u(x_n))$$

и будем называть *функцией одного мультиаргумента*. Например,

$$log_a\mathbf{x} = (log_a x_1, log_a x_2, ..., log_a x_n)\,, \tag{1}$$

$$a^{\mathbf{x}} = (a^{x_1}, a^{x_2}, ..., a^{x_n})\,. \tag{2}$$

В частности, если $u(x) = c$ – постоянная функция, то $\mathbf{c} = (c, c, ..., c)$. Например,

$$\mathbf{0} = (0, 0, ..., 0), \qquad \mathbf{1} = (1, 1, ..., 1).$$

Аналогично функция двух действительных аргументов $v(x, y)$ порождает отображение типа $\mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$ по правилу:

$$v(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (v(x_1, y_1), v(x_2, y_2), ..., v(x_n, y_n))\,.$$

Например:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)\,. \tag{3}$$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = (x_1 y_1, x_2 y_2, ..., x_n y_n)\,. \tag{4}$$

Для функции $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, зависящей от k действительных аргументов, порождённая ею *функция k мультиаргументов* $\mathbf{x}_{(s)} = (x_{(s)1}, x_{(s)2}, ..., x_{(s)n})$, $s = 1, ..., k$, представляет собой отображение типа $\mathbb{R}^{kn} \to \mathbb{R}^n$ и определяется правилом:

$$f\left(\mathbf{x}_{(1)}, ..., \mathbf{x}_{(k)}\right) = \left(f(x_{(1)1}, x_{(2)1}, ..., x_{(k)1}),\ \dots\ , f(x_{(1)n}, x_{(2)n}, ..., x_{(k)n})\right).$$

Например,

$$\sqrt{\mathbf{x}^2 + \mathbf{y}\mathbf{z}} = \left(\sqrt{x_1^2 + y_1 z_1},\ \dots\ , \sqrt{x_n^2 + y_n z_n}\right).$$

Краткости ради, порождённые функции будем называть *мультифункциями* (Не очень удачный термин, так как он уже используется как синоним многозначного отображения. У нас же отображения однозначны.) Их координаты будем называть координатными функциями.

Для отличия мультифункций от отображений последние будем обозначать жирным штрифтом: $\mathbf{g} = (g_1, ..., g_m)$.

Обратим внимание на тот факт, что для функции $f : Q \to \mathbb{R}$, где $Q \subset \mathbb{R}^k$, порождённая ею мультифункция определена на подмножестве множества

$$(pr_1 Q)^n \times (pr_2 Q)^n \times \cdots \times (pr_k Q)^n\,,$$

где $pr_i Q = \{x_i | \, (x_1, ..., x_i, ..., x_n) \in Q\}$ – проекция множества Q на i-ый сомножитель декартова произведения в $\mathbb{R}^k$, причём $\mathbf{x}_{(s)} \in (pr_s Q)^n$. Поэтому, чтобы все мультиаргументы $\mathbf{x}_{(1)}, ..., \mathbf{x}_{(k)}$ принадлежали одному множеству, необходимо выполнение условия:

$$pr_1 Q = pr_2 Q = \cdots = pr_k Q. \tag{5}$$

Но и его недостаточно, поскольку

$$Q \subset pr_1 Q \times pr_2 Q \times \cdots \times pr_k Q. \tag{6}$$

Например, для шара Q с центром в $\mathbf{0}$ равенство (5) имеет место, а равенство во включении (6) не достигается. Поэтому мультифункция не будет определена в вершинах куба $(pr_1 Q)^n$. Для того, чтобы в (6) имело место равенство, достаточно, чтобы множество Q имело вид

$$Q = Q_1 \times \cdots \times Q_k.$$

Тогда $pr_i Q = Q_i$ и условие (5) даёт: $Q = Q_1^k$. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать мультифункции, порождённые функциями, определёнными на множествах такого вида, а именно: $\mathbb{R}^k$, $\mathbb{R}_+^k = (0, +\infty)^k$, $\bar{\mathbb{R}}_+^k = [0, +\infty)^k$.

Сконструированные таким образом отображения наследуют многие свойства своих “родителей”: сюръективность, инъективность, биективность, непрерывность (относительно топологий произведения). Докажем это.

Предложение 1. *Пусть $Q, \tilde{Q} \subset \mathbb{R}$, и $f : Q^k \to \tilde{Q}$ – инъективная (сюръективная, биективная) функция k аргументов. Тогда порождённая ею мультифункция также инъективная (соответственно сюръективная, биективная).*

Доказательство. 1. *Инъективность.* Пусть для мультифункции $f\left(\mathbf{x}_{(1)}, ..., \mathbf{x}_{(k)}\right)$ выполняется равенство:

$$f\left(\mathbf{x}_{(1)}, ..., \mathbf{x}_{(k)}\right) = f\left(\mathbf{y}_{(1)}, ..., \mathbf{y}_{(k)}.\right)$$

Тогда равны соответствующие координатные функции:

$$f\left(x_{(1)i}, x_{(2)i}, ..., x_{(k)i}\right) = f\left(y_{(1)i}, y_{(2)i}, ..., y_{(k)i}\right), \quad i = 1, ..., n,$$

являющиеся порождающими для мультифункции. (На самом деле это одна и та же функция со значениями в разных точках.) По условию функция f инъективна. Поэтому последнее равенство влечёт:

$$\left(x_{(1)i}, x_{(2)i}, ..., x_{(k)i}\right) = \left(y_{(1)i}, y_{(2)i}, ..., y_{(k)i}\right) \quad \Rightarrow \quad x_{(s)i} = y_{(s)i}$$

для всех $s = 1, ..., k$, $i = 1, ..., n$. Отсюда следует:

$$\mathbf{x}_{(1)} = \mathbf{y}_{(1)}, ..., \mathbf{x}_{(k)} = \mathbf{y}_{(k)} \quad \Rightarrow \quad \left(\mathbf{x}_{(1)}, ..., \mathbf{x}_{(k)}\right) = \left(\mathbf{y}_{(1)}, ..., \mathbf{y}_{(k)}\right),$$

что означает инъективность мультифункции.

2. *Сюръективность* мультифункции $f\left(\mathbf{x}_{(1)},...,\mathbf{x}_{(k)}\right)$ означает, что для любого набора $(y_1,y_2,...,y_n)\in\tilde{Q}^n$ найдётся набор $\left(\mathbf{x}_{(1)},...,\mathbf{x}_{(k)}\right)\in(Q^n)^k$ такой, что

$$f\left(\mathbf{x}_{(1)},...,\mathbf{x}_{(k)}\right)=(y_1,y_2,...,y_n)\,,\quad\Rightarrow\quad f(x_{(1)i},x_{(2)i},...,x_{(k)i})=y_i,\quad i=1,...,n.$$

Так как порождающая функция $f:Q^k\to\tilde{Q}$ сюръективна и $y_i\in\tilde{Q},\ i=1,...,n$, то для каждого $i=1,...,n$ найдётся набор $(a_{(1)i},a_{(2)i},...,a_{(k)i})\in Q^k$, такой, что

$$f(a_{(1)i},a_{(2)i},...,a_{(k)i})=y_i.$$

Значит, для всех $s=1,...,k,\ i=1,...,n$, справедливо: $a_{(s)i}\in Q$, и, следовательно,

$$\mathbf{a}_s=(a_{(s)1},...,a_{(s)n})\in Q^n,\ \ s=s=1,...,k.$$

Поэтому набор $\left(\mathbf{a}_{(1)},...,\mathbf{a}_{(k)}\right)\in(Q^n)^k$ – требуемый.

3. *Биективность* мультифункции, порождённой биективной функцией, вытекает из двух предыдущих пунктов. □

Композиции и суперпозиции мультифункций с отображениями и мультифункциями определяются так же и при тех же условиях, как композиции и суперпозиции отображений.

Пример композиции мультифункций. Пусть $f(\mathbf{x})=\mathbf{x}^m$, $g(\mathbf{x})=log_a\mathbf{x}$. Тогда

$$(f\circ g)(\mathbf{x})=(log_a\mathbf{x})^m=\left((log_a x_1)^m\,,\ ...\,,(log_a x_n)^m\right),$$

$$(g\circ f)(\mathbf{x})=log_a\mathbf{x}^m=\left(log_a(x_1^m),\ ...\,,log_a(x_n^m)\right).$$

Пример композиции мультифункции и отображения. Пусть

$$f(\mathbf{x})=\mathbf{x}^2=(x^2,y^2,u^2,v^2):\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4,\quad \mathbf{g}(x,y)=(x,y,xy,x+y):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^4.$$

Тогда

$$(f\circ\mathbf{g})(x,y)=(x^2,y^2,(xy)^2,(x+y)^2):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^4.$$

Пример суперпозиции мультифункций. Пусть

$$g(\mathbf{x})=\mathbf{x}^2:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n,\quad h(\mathbf{x})=\sqrt{\mathbf{x}}:\bar{\mathbb{R}}^n_+\to\bar{\mathbb{R}}^n_+,\quad f(\mathbf{x},\mathbf{y})=\mathbf{x}+\mathbf{y}:\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}^n.$$

Тогда

$$f(g,h)(\mathbf{x})=\mathbf{x}^2+\sqrt{\mathbf{x}}:\bar{\mathbb{R}}^n_+\to\bar{\mathbb{R}}^n_+.$$

Из определений мультифункции, композиции мультифункций следует:

Предложение 2. *Пусть f и f^{-1} – взаимно обратные функции одного аргумента. Тогда порождённые ими мультифункции также взаимно обратны.*

Так, обратной мультифункцией к $log_a\mathbf{x}$ является $a^{\mathbf{x}}=(a^{x_1},...,a^{x_m})$. Поэтому

$$a^{log_a\mathbf{x}}=\mathbf{x},\quad log_a a^{\mathbf{x}}=\mathbf{x}.$$

Предложение 3. *Мультифункция, порождённая непрерывной функцией одного аргумента, непрерывна относительно топологий произведения в $\mathbb{R}^n$.*

Доказательство. Пусть $Q, \tilde{Q} \subset \mathbb{R}$, и $f : Q \to \tilde{Q}$ – непрерывная функция. Для любой точки $\mathbf{x} \in Q^n$ и окрестности $V \subset \tilde{Q}^n$ точки $f(\mathbf{x}) = (f(x_1), ..., f(x_n))$ найдётся окрестность $W = V_1 \times \cdots \times V_n$ точки $f(\mathbf{x})$ из базы окрестностей топологии произведения в $\mathbb{R}^n$, такая, что $W \cap \tilde{Q} \subset V$. Здесь $V_i = (a_i, b_i)$ – открытые интервалы в $\mathbb{R}$, $i = 1, ..., n$. Тогда $f(x_i) \in V_i$ при всех $i = 1, ..., n$. В силу непрерывности функции f для каждого $i = 1, ..., n$ найдётся окрестность U_i точки x_i такая, что $f(U_i) \subset V_i$. Множество $U = U_1 \times \cdots \times U_n$ является окрестностью точки $\mathbf{x}$ и, как нетрудно убедиться, образ её при мультифункции, порождённой f, представляет собой множество $f(U_1) \times \cdots \times f(U_n)$. Ясно,что

$$f(U_1) \times \cdots \times f(U_n) \subset V_1 \times \cdots \times V_n \subset W \cap \tilde{Q} \subset V.$$

Это означает непрерывность мультифункции, порождённой f, в точке $\mathbf{x}$. Ввиду произвольности выбора точки $\mathbf{x}$ можно заключить о непрерывности мультифункции всюду на множестве Q^n. $\square$

Мультифункции наследуют и некоторые специфические свойства порождающих их функций. В частности, в этой статье будут использоваться следующие легко проверяемые формулы:

$$log_a\mathbf{x} + log_a\mathbf{y} = log_a(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}), \qquad a^{\mathbf{x}+\mathbf{y}} = a^{\mathbf{x}} \cdot a^{\mathbf{y}}.$$

Описанную выше конструкцию из функций можно распространить и на отображения. Именно, функция $h : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, зависящей от k действительных аргументов и k отображений $\mathbf{f}_s = (f_{(s)1}, ..., f_{(s)m})$ одного типа $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ порождают отображение:

$$h\left(\mathbf{f}_{(1)}, ..., \mathbf{f}_{(k)}\right) = \left(h(f_{(1)1}, f_{(2)1}, ..., f_{(k)1}),\ \dots\ , h(f_{(1)n}, f_{(2)n}, ..., f_{(k)n})\right) : \mathbb{R}^{kn} \to \mathbb{R}^m.$$

Например,

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{y}) = \left(f_1(\mathbf{x})g_1(\mathbf{y}),\ \dots\ , f_m(\mathbf{x})g_m(\mathbf{y})\right).$$

В дальнейшем: $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{nm}$ – матрица порядка $n \times m$, $\mathbf{b} = (b_{01}, ..., b_{0m}) \in \mathbb{R}^m$, и в целях экономии места используем запись умножения строки $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$ на матрицу B в виде:

$$\mathbf{x}B = \left(b_{11}x_1 + b_{21}x_2 + ... + b_{n1}x_n,\ \dots\ , b_{1m}x_1 + b_{2m}x_2 + ... + b_{nm}x_n\right).$$

Чтобы отличать умножение строки $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$ на матрицу-столбец $\mathbf{b} = (b_1, ..., b_n)^T$ от произведения $\mathbf{x} \cdot \mathbf{b}$ по формуле (4), будем использовать обозначение:

$$\mathbf{x} * \mathbf{b} = b_1x_1 + b_2x_2 + ... + b_nx_n.$$

3. Решения функциональных уравнений Иенсена и Коши

Под функциональными уравнениями обычно понимают уравнения, в которых неизвестными выступают функции. Дифференциальные и интегральные уравнения – их разновидности. Общих методов решений функциональных уравнений мало. К ним можно отнести, пожалуй, метод подстановки и замены функции, которыми мы в основном и будем пользоваться. Но существуют различные приёмы для определённых типов уравнений, возможность применения которых во многом обусловлена классом, в котором ищется решение (класс непрерывных функций, класс дифференцируемых функций и т. д.). В настоящей работе все решения рассматриваются в классе непрерывных функций. Множество решений функционального уравнения зависит также от множества, на котором ищутся функции. Понятно, что если множества задания искомых функций связаны соотношением $Q_1 \subset Q_2$, то всякая функция, являющаяся решением на Q_2, будет решением и на Q_1.

Поэтому класс решений на “меньшем” множестве Q_1 включает в себя сужения на Q_1 решений, относящихся к “большему” множеству Q_2. С этим обстоятельством связана проблема возможности продолжения решений с “меньшего” множества на “большее” [5, гл. 5].

С методами решения функциональных уравнений и неравенств от одной переменной на русском языке можно ознакомиться в [7] – [8]. В [5] собран богатый материал по функциональным уравнениям в классах функций одной и нескольких переменных, показаны их приложения в геометрии, физике, экономике, теории информации, даются упражнения и приводится внушительный список (2000) работ в хронологическом порядке по данной тематике.

В данном пункте мы предложим иные подходы к решению уравнений Иенсена и Коши, нежели в [5]. Они опираются на критерий линейности непрерывной функции [4, с. 100-102] доказательство которого будет опубликован позже.

Теорема 1. *Всякая непрерывная функция* $f : D \to \mathbb{R}$, *определённая на замкнутом выпуклом множестве* D *с непустой внутренностью, является линейной функцией:*

$$f(\boldsymbol{x}) = b_1x_1 + b_2x_2 + ... + b_nx_n + b_0 \tag{7}$$

при некоторых действительных числах b_0, b_1, ... b_n *тогда и только тогда, когда выполнено условие:*

$$(\forall\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in D)\ \ (\exists\, \lambda \in (0,1))\quad f\,(\lambda\boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{y}) = \lambda f(\boldsymbol{x}) + (1-\lambda)f(\boldsymbol{y}). \tag{8}$$

Следствие 1. *Пусть* $\boldsymbol{f} = (f_1, ..., f_m)$ *– непрерывное отображение замкнутого, с непустой внутренностью, выпуклого множества* $D \subset \mathbb{R}^n$ *в* $\mathbb{R}^m$ *такое, что*

$$(\forall\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in D)\ \ (\exists\, \lambda \in (0,1))\quad \boldsymbol{f}(\lambda\boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{y}) = \lambda\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + (1-\lambda)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}). \tag{9}$$

Тогда

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}B + \boldsymbol{b} \tag{10}$$

для некоторой матрицы $B = (b_{ij})_{n\times m}$ *и вектор-строки* $\boldsymbol{b} = (b_{01}, ..., b_{0m}) \in \mathbb{R}^m$.

Доказательство. Действительно, условие (9) означает выполнение условия (8) для всех координатных функций f_j, $j = 1, ..., m$, непрерывных в силу непрерывности отображения **f**. По теореме 1 найдутся числа b_{ij}, $i = 0, 1, ..., n$, $j = 1, ..., m$, такие, что $f_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}x_i + b_{0j}$, что может быть представлено в форме (10). □

Замечание 1. *В теореме 1 число* λ *не обязано быть фиксированным: для каждой пары точек* $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ *оно может быть своё.*

Замечание 2. *Стоит обратить внимание, что в теореме 1, следствии 1 и всюду далее* f *и* $\boldsymbol{f}$ *это обычные функция и отображение от многих переменных, например, равенство в (8) надо понимать так:*

$$f\,(\lambda x_1 + (1-\lambda)y_1, ..., \lambda x_n + (1-\lambda)y_n) = \lambda f(x_1, ..., x_n) + (1-\lambda)f(y_1, ..., y_n),$$

а не как равенство мультифункций: $(f(\lambda x_1 + (1-\lambda)y_1), ..., f(\lambda x_n + (1-\lambda)y_n)) = (\lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(y_1), ..., \lambda f(x_n) + (1-\lambda)f(y_n))$, *поскольку последнее сводится к тривиальному дублированию уравнения Йенсена от одной переменной и ничего нового к нашим знаниям не добавляет.*

Теорема 2. *Единственными решениями уравнения Иенсена при произвольном фиксированном* $\lambda \in (0,1)$

$$\boldsymbol{J}. \qquad \boldsymbol{f}(\lambda \boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{y}) = \lambda \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + (1-\lambda)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$$

в классе непрерывных отображений $\boldsymbol{f} = (f_1, ..., f_m) : Q \to \mathbb{R}^m$, *определённых на замкнутом, с непустой внутренностью, выпуклом множестве* $Q \subset \mathbb{R}^n$, *являются аффинные отображения (возможно вырожденные):*

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}B + \boldsymbol{b} \tag{11}$$

при любых матрицах $B \in \mathbb{R}^{nm}$ *и векторах* $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$.

Доказательство. Тот факт, что отображения (11) являются решениями уравнения $\mathbf{J}$ при любых матрицах $B \in \mathbb{R}^{nm}$ и векторах $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ проверяется подстановкой их в уравнение $\mathbf{J}$:

$$\mathbf{f}\,(\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}) = (\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y})\,B + \mathbf{b} = \lambda\mathbf{x}B + (1-\lambda)\mathbf{y}B + \lambda\mathbf{b} + (1-\lambda)\mathbf{b} =$$

$$= \lambda(\mathbf{x}B + \mathbf{b}) + (1-\lambda)(\mathbf{y}B + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{f}(\mathbf{x}) + (1-\lambda)\mathbf{f}(\mathbf{y}).$$

Единственность решений обеспечивается следствием 1. □

Ввиду замечания 1 о возможной зависимости λ от $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ теорема 2 может быть усилена следующим образом.

Теорема 3. *Отображения*

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}B + \boldsymbol{b}$$

при любых матрицах $B \in \mathbb{R}^{nm}$ *и векторах* $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ *являются решениями функционального уравнения*

$$\boldsymbol{f}\,(\mu(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{x} + (1-\mu(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))\boldsymbol{y}) = \mu(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + (1-\mu(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$$

при любой функции $\mu(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})) : (R^n)^2 \to \mathbb{R}$ *(один из мультиаргументов может входить фиктивно).*

Причём эти решения будут единственными в классе непрерывных отображений $\boldsymbol{f} = (f_1, ..., f_m) : Q \to \mathbb{R}^m$, *определённых на замкнутом, с непустой внутренностью, выпуклом множестве* Q, *если*

$$\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in Q \quad 0 < \mu(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})) < 1.$$

Замечание 3. *В [5, предл. 3, с. 215] теорема 2 доказывается сначала для функций двух переменных, а затем в случае функций нескольких переменных сводится к уравнению Коши. Мы же, наоборот, уравнение Коши сведём к уравнению Иенсена, что позволит нам получить решение сразу для функций от любого числа переменных.*

Теорема 4. *Единственными решениями аддитивного уравнения Коши*

$$\boldsymbol{K}_I. \quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$$

в классе непрерывных отображений $\boldsymbol{f} = (f_1, ..., f_m)$, *определённых на замкнутом выпуклом конусе* Q *с вершиной в* $\boldsymbol{0}$, *являются аффинные отображения (возможно вырожденные):*

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}B \tag{12}$$

при любых матрицах $B \in \mathbb{R}^{nm}$.

Доказательство. Сведём уравнение Коши $\mathbf{K}_I$ к уравнению Иенсена $\mathbf{J}$.

Полагая в $\mathbf{K}_I$ $\quad \mathbf{x}=\mathbf{y}$, получим в качестве следствий:

$$\mathbf{f}(2\mathbf{x}) = 2\mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{f}(2\mathbf{x}) \quad \left| \, \mathbf{x} \to \frac{\mathbf{x}}{2} \, \right| \quad \Rightarrow \quad f\left(\frac{\mathbf{x}}{2}\right) = \frac{1}{2} f(\mathbf{x}).$$

Заменяя $\mathbf{x}$ на $\mathbf{y}$, будем иметь:

$$\mathbf{f}\left(\frac{\mathbf{y}}{2}\right) = \frac{1}{2}\mathbf{f}(\mathbf{y}).$$

Сложим эти два равенства:

$$\mathbf{f}\left(\frac{\mathbf{x}}{2}\right) + \mathbf{f}\left(\frac{\mathbf{y}}{2}\right) = \frac{1}{2}\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}\mathbf{f}(\mathbf{y}). \tag{13}$$

С другой стороны, делая в $\mathbf{K}_I$ замену: $\mathbf{x} \to \frac{\mathbf{x}}{2}, \quad \mathbf{y} \to \frac{\mathbf{y}}{2}$, получим:

$$\mathbf{f}\left(\frac{\mathbf{x}}{2} + \frac{\mathbf{y}}{2}\right) = \mathbf{f}\left(\frac{\mathbf{x}}{2}\right) + \mathbf{f}\left(\frac{\mathbf{y}}{2}\right). \tag{14}$$

Из (13), (14) вытекает уравнение Иенсена $\mathbf{J}$ для $\lambda = \frac{1}{2}$:

$$\mathbf{f}\left(\frac{\mathbf{x}+\mathbf{y}}{2}\right) = \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{f}(\mathbf{y})}{2},$$

решением которого является аффинное отображение (11). Заметим, что в результате подстановок, приведших к уравнению Иенсена, мы получили более широкий класс решений. Подстановка функций (11) в уравнение Коши даёт:

$$(\mathbf{x}+\mathbf{y})B + \mathbf{b} = \mathbf{x}B + \mathbf{b} + \mathbf{y}B + \mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{b} = \mathbf{0},$$

и формулы (11) принимают вид (12).

Применённые подстановки, представляющие собой гомотетию с центром в начале координат и коэффициентом $\frac{1}{2}$, допустимы, поскольку отображают выпуклый конус Q в себя. На самом деле, указанные гомотетии любое выпуклое множество, содержащее $\mathbf{0}$, отображают в себя, однако только конус с вершиной в $\mathbf{0}$ замкнут относительно операции сложения точек. □

Следствие 2. *Единственными решениями уравнения*

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) \tag{15}$$

в классе непрерывных отображений $\boldsymbol{f} = (f_1, ..., f_m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *являются аффинные отображения* (12) *(возможно вырожденные):*

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}B$$

при любых матрицах $B \in \mathbb{R}^{nm}$.

Доказательство. Перепишем уравнение (15) в виде:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + \mathbf{f}(\mathbf{y}) = \mathbf{f}((\mathbf{x}-\mathbf{y}) + \mathbf{y}).$$

Полагая $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$, придём к уравнению Коши:

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}) + \mathbf{f}(\mathbf{y}) = \mathbf{f}(\mathbf{u}+\mathbf{y}),$$

решением которого согласно теореме 4 является отображение (12).

□

Теорема 5. *Единственными решениями экспоненциального уравнения Коши*

$$\boldsymbol{K}_{II}. \qquad f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x})\cdot f(\boldsymbol{y})$$

в классе непрерывных функций, определённых в $\mathbb{R}^n$ *являются постоянная функция* $f\equiv 0$ *и функции вида*

$$f(\boldsymbol{x}) = a^{\boldsymbol{x}*\boldsymbol{b}} = a^{b_1x_1+b_2x_2+\ldots+b_nx_n} \tag{16}$$

при любых действительных числах $b_1, \ldots b_n$ *и* $a>0$, $a\neq 1$.

Доказательство. Данное утверждение вместе с доказательством приводится в [5, с. 45]. Здесь мы не оригинальны, используем те же идеи и доказательство приводим для полноты освещения темы. Если $f(\mathbf{x}_0)=0$ для некоторого $\mathbf{x}_0$, то для всех $\mathbf{x}$ справедливо:

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{x}_0) = f(\mathbf{x})f(\mathbf{x}_0) = f(\mathbf{x})\cdot 0 = 0,$$

а, значит, для всякого $\mathbf{x}=\mathbf{y}-\mathbf{x}_0$ выполняется $f(\mathbf{y})\equiv 0$ и функция $f\equiv 0$ удовлетворяет уравнению $\mathbf{K}_{II}$. (Именно потому, что выпуклый конус, за исключением всего пространства, не замкнут относительно разности точек, приходится рассматривать функции, определённые на $\mathbb{R}^n$.) Все остальные решения уравнения $\mathbf{K}_{II}$ не обращаются в 0 ни в одной точке множества $\mathbb{R}^n$. В силу непрерывности функции f на линейно связном пространстве, каковым является $\mathbb{R}^n$, она знакопостоянна и, как видно из уравнения $\mathbf{K}_{II}$, не отрицательна. Поэтому равенство $\mathbf{K}_{II}$ можно прологарифмировать:

$$log_a f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = log_a f(\mathbf{x}) + log_a f(\mathbf{y}).$$

Здесь a – произвольное действительное число такое, что $a>0$, $a\neq 1$. Сделаем замену: $g(\mathbf{x}) = log_a f(\mathbf{x})$. Данная функция также непрерывна. Тогда последнее уравнение примет вид уравнения Коши $\mathbf{K}_I$:

$$g(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = g(\mathbf{x}) + g(\mathbf{y}).$$

По теореме 4

$$g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}*\mathbf{b} = b_1x_1+b_2x_2+\ldots+b_nx_n.$$

Следовательно, функция f задаётся формулой (16).

Проверим, что данные функции действительно являются решениями уравнения $\mathbf{K}_{II}$. Подставим их в $\mathbf{K}_{II}$.

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = a^{(\mathbf{x}+\mathbf{y})*\mathbf{b}} = a^{\mathbf{x}*\mathbf{b}+\mathbf{y}*\mathbf{b}} = a^{\mathbf{x}*\mathbf{b}}\cdot a^{\mathbf{y}*\mathbf{b}} = f(\mathbf{x})\cdot f(\mathbf{y}).$$

Получили тождество. □

Замечание 4. *В качестве основания степени* a *в* (16) *можно взять любое наперёд заданное число* c*. Имеется ввиду, что вид решения будет тот же, но с другими коэффициентами* b_i, $i=1,\ldots,n$*. Действительно, формула* (16) *может быть переписана в виде*

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = c^{log_c\, a^{b_1x_1+b_2x_2+\ldots+b_nx_n}} = c^{(b_1x_1+b_2x_2+\ldots+b_nx_n)log_c a} =$$
$$= c^{(b_1 log_c a)x_1+(b_2 log_c a)x_2+\ldots+(b_n log_c a)x_n} = c^{\tilde{b}_1x_1+\tilde{b}_2x_2+\ldots+\tilde{b}_nx_n},$$

где $\tilde{b}_i = b_i log_c a$.

Следствие 3. *Решениями функционального уравнения*

$$\boldsymbol{K}'_{II}. \qquad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$$

в классе непрерывных отображений $\boldsymbol{f}=(f_1,\ldots,f_m):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ *являются отображения*

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = a^{\boldsymbol{x}B} = \left(a^{b_{11}x_1+b_{21}x_2+\ldots+b_{n1}x_n}, \ \ldots\ , a^{b_{1m}x_1+b_{2m}x_2+\ldots+b_{nm}x_n}\right) \tag{17}$$

при всякой матрице $B\in\mathbb{R}^{nm}$*, а также получающиеся из них заменой некоторых координатных функций нулями.*

Доказательство. Уравнение $\mathbf{K}'_{II}$ распадается в систему уравнений $\mathbf{K}_{II}$ относительно неизвестных координатных функций f_i отображения $\mathbf{f}$. По теореме 5 её решениями являются функции вида (16) и постоянные, равные нулю. □

Теорема 6. *Единственным решением функционального уравнения Коши*

$$\boldsymbol{K}_{III}. \qquad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$$

в классе отображений, определённых на $\mathbb{R}^n$ *или* $\bar{\mathbb{R}}^n_+$*, является постоянное:* $\boldsymbol{f} \equiv \boldsymbol{0}$*, а в классе непрерывных отображений, определённых на множестве* $\mathbb{R}^n_+$*, единственными решениями являются отображения вида*

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (log_a \boldsymbol{x})B \tag{18}$$

для произвольной матрицы $B \in \mathbb{R}^{nm}$.

Доказательство. Здесь $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$ определено формулой (4), а $log_a\mathbf{x}$ – формулой (1). В [5] утверждение приводится для класса функций одной переменной.

Подставляя $\mathbf{x} = \mathbf{y} = \mathbf{0}$ в K_{III}, получим:

$$\mathbf{f}(\mathbf{0}) = 2\mathbf{f}(\mathbf{0}) \;\Rightarrow\; \mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}.$$

Тогда для всех $\mathbf{x}$ справедливо:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{0}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{f}(\mathbf{0}) \;\Rightarrow\; \mathbf{0} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$

Значит $\mathbf{f} \equiv \mathbf{0}$. Заметим, что $\mathbb{R}^n$ и $\bar{\mathbb{R}}^n_+$ содержат $\mathbf{0}$ и замкнуты относительно операции $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$.

Рассмотрим теперь случай непрерывных решений уравнения, определённых на $\mathbb{R}^n_+$. Множество $\mathbb{R}^n_+$ замкнуто относительно операции $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$ и не содержит $\mathbf{0}$. Сделаем замену $\mathbf{x} = a^{\tilde{\mathbf{x}}}$. Тогда уравнение K_{III} примет вид:

$$\mathbf{f}\left(a^{\tilde{\mathbf{x}}}\cdot a^{\tilde{\mathbf{y}}}\right) = \mathbf{f}\left(a^{\tilde{\mathbf{x}}}\right) + \mathbf{f}\left(a^{\tilde{\mathbf{y}}}\right)$$

или

$$\mathbf{f}\left(a^{\tilde{\mathbf{x}}+\tilde{\mathbf{y}}}\right) = \mathbf{f}\left(a^{\tilde{\mathbf{x}}}\right) + \mathbf{f}\left(a^{\tilde{\mathbf{y}}}\right).$$

Обозначим:

$$\mathbf{g}(\tilde{\mathbf{x}}) = \mathbf{f}\left(a^{\tilde{x}}\right).$$

Отображение $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ непрерывно, определено на $\mathbb{R}^n$ и удовлетворяет уравнению Коши вида $\mathbf{K}_I$:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{y}).$$

По теореме 4 его решениями являются отображения

$$\mathbf{g}(\tilde{\mathbf{x}}) = \tilde{\mathbf{x}}B,$$

где $B \in \mathbb{R}^{nm}$ – произвольная матрица. Тогда

$$\mathbf{f}\left(a^{\tilde{\mathbf{x}}}\right) = \tilde{\mathbf{x}}B.$$

Подстановка $\tilde{\mathbf{x}} = log_a\mathbf{x}$ приводит к формуле

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (log_a\mathbf{x})B.$$

Проверим, что данные функции действительно являются решениями уравнения $\mathbf{K}_{III}$. Подставим их в $\mathbf{K}_{III}$.

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}) = (log_a(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}))\,B = (log_a\mathbf{x} + log_a\mathbf{y})\,B = (log_a\mathbf{x})B + (log_a\mathbf{y})B = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}).$$

Получили тождество. □

Теорема 7. *Единственными решениями степенного уравнения Коши*

$$\boldsymbol{K}_{IV}. \qquad f(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x})\cdot f(\boldsymbol{y})$$

в классе непрерывных функций, определённых на $\mathbb{R}^n_+$ *являются:*

$$f(\boldsymbol{x}) = x_1^{b_1}x_2^{b_2}...x_n^{b_n} \quad \text{и} \quad f(\boldsymbol{x}) \equiv 0. \tag{19}$$

Доказательство. Здесь $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$ определено формулой (4). В [5] утверждение приводится для класса функций одной переменной.

Допустима подстановка: $\mathbf{x} = a^{\tilde{\mathbf{x}}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n_+$. При этом уравнение $\mathbf{K}_{IV}$ примет вид:

$$f\left(a^{\tilde{\mathbf{x}}}\cdot a^{\tilde{\mathbf{y}}}\right) = f\left(a^{\tilde{\mathbf{x}}}\right)\cdot f\left(a^{\tilde{\mathbf{y}}}\right),$$

или

$$f\left(a^{\tilde{\mathbf{x}}+\tilde{\mathbf{y}}}\right) = f\left(a^{\tilde{\mathbf{x}}}\right)\cdot f\left(a^{\tilde{\mathbf{y}}}\right).$$

Введём в рассмотрение новую функцию

$$g(\tilde{\mathbf{x}}) = f\left(a^{\tilde{\mathbf{x}}}\right).$$

Она определена и непрерывна на $\mathbb{R}^n$ и удовлетворяет уравнению Коши $\mathbf{K}_{II}$:

$$g(\tilde{\mathbf{x}}+\tilde{\mathbf{y}}) = g(\tilde{\mathbf{x}})\cdot g(\tilde{\mathbf{y}}).$$

По теореме 5 и замечанию 4 решениями этого уравнения являются функции

$$g(\tilde{\mathbf{x}}) = a^{\tilde{\mathbf{x}}*\mathbf{b}} = a^{b_1\tilde{x}_1+b_2\tilde{x}_2+...+b_n\tilde{x}_n}$$

или $g\equiv 0$. Тогда

$$f\left(a^{\tilde{\mathbf{x}}}\right) = a^{\tilde{\mathbf{x}}*\mathbf{b}} \quad \text{или} \quad f\left(a^{\tilde{\mathbf{x}}}\right) \equiv 0.$$

Подставляя в последние равенства $\tilde{\mathbf{x}} = log_a\mathbf{x}$, получим:

$$f(\mathbf{x}) = a^{(log_a\mathbf{x})*\mathbf{b}} = a^{b_1 log_a x_1 + b_2 log_a x_2 + ... + b_n log_a x_n} = x_1^{b_1}x_2^{b_2}...x_n^{b_n}, \quad f(\mathbf{x}) \equiv 0.$$

Подстановкой полученных функций в уравнение $\mathbf{K}_{IV}$, убеждаемся, что они являются его решениями:

$$f(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}) = (x_1y_1)^{b_1}(x_2y_2)^{b_2}\cdots(x_ny_n)^{b_n} = \left(x_1^{b_1}x_2^{b_2}\cdots x_n^{b_n}\right)\cdot\left(y_1^{b_1}y_2^{b_2}\cdots y_n^{b_n}\right) = f(\mathbf{x})\cdot f(\mathbf{y}).$$

□

Следствие 4. *Единственными решениями функционального уравнения*

$$f\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}}\right) = \frac{f(\boldsymbol{x})}{f(\boldsymbol{y})} \tag{20}$$

в классе непрерывных функций, определённых на $\mathbb{R}^n_+$*, являются функции:*

$$f(\boldsymbol{x}) = x_1^{b_1}x_2^{b_2}...x_n^{b_n} \tag{21}$$

Доказательство. Уравнение (20) перепишем в виде:

$$f\left(\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{y}}\right)\cdot f(\mathbf{y}) = f\left(\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{y}}\cdot\mathbf{y}\right).$$

Полагая $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{y}}$, придём к уравнению Коши $\mathbf{K}_{IV}$, решениями которого по теореме 7 являются функции (21). Так как функция $f\equiv 0$ не входит в область задания функционального уравнения (20), то единственными решениями являются функции (21). □

Следствие 5. *Единственными решениями функционального уравнения Коши*

$$\boldsymbol{K}'_{IV}. \qquad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$$

в классе непрерывных отображений, определённых на $\mathbb{R}^n_+$*, являются:*

$$f(\boldsymbol{x}) = a^{(log_a \boldsymbol{x})B} = \left(x_1^{b_{11}} x_2^{b_{21}} \cdots x_n^{b_{n1}},\ \ldots,\ x_1^{b_{1m}} x_2^{b_{2m}} \cdots x_n^{b_{nm}}\right) \tag{22}$$

где $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{nm}$*, или полученные из них заменой некоторых координатных функций нулями.*

А единственными решениями функционального уравнения

$$\boldsymbol{f}\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}}\right) = \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})} \tag{23}$$

в классе непрерывных отображений, определённых на $\mathbb{R}^n_+$*, являются отображения* (22).

4. Функциональное уравнение Лобачевского и другие

В [5, с. 105] уравнение Лобачевского приводится в качестве упражнения и рассматривается только на множестве непрерывных функций одного аргумента. Мы же докажем его в общем виде для отображений, сведя к уравнению Иенсена **J**.

Теорема 8. *Единственными решениями функционального уравнения Лобачевского*

$$\boldsymbol{L}. \qquad f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\cdot f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x})^2$$

в классе функций, определённых и непрерывных на $\mathbb{R}^n$*, являются постоянная функция* $f \equiv 0$ *и*

$$f(\boldsymbol{x}) = \pm a^{\boldsymbol{x}*\boldsymbol{b}+b_0} = \pm a^{b_1x_1+b_2x_2+\ldots+b_nx_n+b_0} \tag{24}$$

при любых действительных числах $b_0,\ b_1,\ \ldots\ b_n$ *и* $a > 0,\ a \neq 1$.

Доказательство. Если $f(\mathbf{z}) = 0$ в некоторой точке $\mathbf{z}$, то подставляя $\mathbf{x} = \mathbf{z}$ в $\mathbf{L}$, получим:

$$f(\mathbf{z}+\mathbf{y})\cdot f(\mathbf{z}-\mathbf{y}) = f(\mathbf{z})^2 = 0 \quad\Rightarrow\quad f(\mathbf{z}+\mathbf{y}) = 0 \ \text{ или } \ f(\mathbf{z}-\mathbf{y}) = 0$$

для всех $\mathbf{y}$. После подстановок

$$\mathbf{y}\to\mathbf{x}-\mathbf{z} \ \text{ в } \ f(\mathbf{z}+\mathbf{y}) = 0, \qquad \mathbf{y}\to\mathbf{z}-\mathbf{x} \ \text{ в } \ f(\mathbf{z}-\mathbf{y}) = 0,$$

где $\mathbf{x}$ – произвольное, получим $f \equiv 0$. Очевидно, эта функция является решением уравнения $\mathbf{L}$. Значит все остальные решения не обращаются в ноль ни в одной точке. Так как функция f непрерывна и определена на связном множестве $\mathbb{R}^n$, то она знакопостоянна. Из формул $\mathbf{L}$ следует:

$$|f(\mathbf{x}+\mathbf{y})|\cdot|f(\mathbf{x}-\mathbf{y})| = |f(\mathbf{x})|^2.$$

Прологарифмируем это равенство по основанию a при условии, что $a > 0,\ a \neq 1$.

$$log_a\,|f(\mathbf{x}+\mathbf{y})| + log_a\,|f(\mathbf{x}-\mathbf{y})| = 2\ log_a\,|f(\mathbf{x})|. \tag{25}$$

Введём в рассмотрение новую функцию $g(\mathbf{x}) = log_a\,|f(\mathbf{x})|$. Тогда равенство (25) перепишется в виде:

$$g(\mathbf{x}+\mathbf{y}) + g(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = 2g(\mathbf{x})$$

или

$$\frac{g(\mathbf{x}+\mathbf{y})+g(\mathbf{x}-\mathbf{y})}{2}=g\left(\frac{(\mathbf{x}+\mathbf{y})+(\mathbf{x}-\mathbf{y})}{2}\right).$$

Введём новые переменные: $\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{u}$, $\mathbf{x}-\mathbf{y}=\mathbf{v}$. Получим уравнение Иенсена:

$$\frac{g(\mathbf{u})+g(\mathbf{v})}{2}=g\left(\frac{\mathbf{u}+\mathbf{v}}{2}\right).$$

Согласно теореме 2 его решениями являются функции:

$$g(\mathbf{x})=log_a|f(\mathbf{x})|=\mathbf{x}*\mathbf{b}+b_0=b_1x_1+b_2x_2+...+b_nx_n+b_0$$

при любых действительных числах b_0, b_1, ... b_n и $a>0$, $a\neq 1$. Выражая из последнего равенства $f(\mathbf{x})$, придём к (24). Подстановкой в уравнение **L**, убеждаемся, что функции (24) являются его решениями:

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{y})\cdot f(\mathbf{x}-\mathbf{y})=\left(\pm a^{(\mathbf{x}+\mathbf{y})*\mathbf{b}+b_0}\right)\left(\pm a^{(\mathbf{x}-\mathbf{y})*\mathbf{b}+b_0}\right)=a^{(\mathbf{x}+\mathbf{y})*\mathbf{b}+b_0+(\mathbf{x}-\mathbf{y})*\mathbf{b}+b_0}=$$

$$=a^{2(\mathbf{x}*\mathbf{b}+b_0)}=\left(\pm\, a^{\mathbf{x}*\mathbf{b}+b_0}\right)^2=f(\mathbf{x})^2$$

или в привычной записи:

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{y})\cdot f(\mathbf{x}-\mathbf{y})=\left(\pm\, a^{b_1(x_1+y_1)+...+b_n(x_n+y_n)+b_0}\right)\cdot\left(\pm\, a^{b_1(x_1-y_1)+...+b_n(x_n-y_n)+b_0}\right)=$$

$$=a^{2(b_1x_1+...+b_nx_n+b_0)}=\left(\pm\, a^{b_1x_1+...+b_nx_n+b_0}\right)^2=f(\mathbf{x})^2.$$

Для решения (24) справедливо замечание 4. □

Следствие 6. *Единственными решениями уравнения Лобачевского*

$$\boldsymbol{J}'.\qquad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\cdot\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})^2$$

в классе непрерывных отображений, определённых на $\mathbb{R}^n$, являются отображения

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\pm a^{\boldsymbol{x}B+\boldsymbol{b}}$$

при любых матрицах $B\in\mathbb{R}^{nm}$ и векторах $\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^m$, или полученные из них заменой некоторых координатных функций на нули.

Также в [5, с. 105] в качестве упражнения предлагается решить уравнение

$$f(x+y-xy)+f(xy)=f(x)+f(y)$$

на множестве функций одной переменной. Мы решим его в классе непрерывных отображений от нескольких переменных.

Теорема 9. *Аффинные отображения (13):*

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}B+\boldsymbol{b}$$

являются решениями функционального уравнения

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\boldsymbol{y})+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}\boldsymbol{y})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})\tag{26}$$

в классе отображений $\boldsymbol{f}\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$.

Доказательство. Полагаем в (26) $\mathbf{y} = \mathbf{x}$. Тогда (26) примет вид:

$$\mathbf{f}(2\mathbf{x} - \mathbf{x}^2) + \mathbf{f}(\mathbf{x}^2) = 2\mathbf{f}(\mathbf{x}),$$

откуда следует:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{f}(2\mathbf{x} - \mathbf{x}^2) + \mathbf{f}(\mathbf{x}^2)}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{f}\left(\frac{(2\mathbf{x} - \mathbf{x}^2) + \mathbf{x}^2}{2}\right) = \frac{\mathbf{f}(2\mathbf{x} - \mathbf{x}^2) + \mathbf{f}(\mathbf{x}^2)}{2}.$$

Обозначим $\mathbf{u} = 2\mathbf{x} - \mathbf{x}^2$, $v = \mathbf{x}^2$. Тогда последнее равенство превращается в уравнение Иенсена при $\lambda = \frac{1}{2}$:

$$\mathbf{f}\left(\frac{\mathbf{u} + \mathbf{v}}{2}\right) = \frac{\mathbf{f}(\mathbf{u}) + \mathbf{f}(\mathbf{v})}{2},$$

решениями которого являются аффинные отображения: $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}B + \mathbf{b}$. Проверим, что оно действительно удовлетворяет уравнению (26):

$$\mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{y} - \mathbf{x}\mathbf{y}) + \mathbf{f}(\mathbf{x}\mathbf{y}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y} - \mathbf{x}\mathbf{y})B + \mathbf{b} + \mathbf{x}\mathbf{y}B + \mathbf{b} =$$

$$= \mathbf{x}B + \mathbf{y}B - \mathbf{x}\mathbf{y}B + \mathbf{b} + \mathbf{x}\mathbf{y}B + \mathbf{b} = (\mathbf{x}B + \mathbf{b}) + (\mathbf{y}B + \mathbf{b}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{f}(\mathbf{y}).$$

Заметим, что первая подстановка приводит к расширению класса решений, а вторая, наоборот, к сужению класса решений. Поэтому мы затрудняемся утверждать, что полученные решения единственны. □

5. Функциональные уравнения с многими переменными

Стоит подчеркнуть, что функциональные уравнения с многими переменными это не то же самое, что функциональные уравнения от функций многих переменных. Так, рассмотренные ранее уравнения Иенсена, Коши, Лобачевского содержали 2 мультипеременные, а неизвестные функции могли быть от любого числа переменных, в частности, от одной.

Для $\mathbf{x}_{(k)} = (x_{1(k)}, x_{2(k)}, ..., x_{n(k)}) \in \mathbb{A}^n$ (или $\mathbb{A}^n_+$), $k = 1, ..., m$ обозначим:

$$\sum \mathbf{x}_{(k)} = \left(\sum x_{1(k)}, ..., \sum x_{n(k)}\right),$$

$$\prod \mathbf{x}_{(k)} = \left(\prod x_{1(k)}, ..., \prod x_{n(k)}\right),$$

где суммирования и произведения производятся по $k = 1, ..., m$.

Теорема 10. *Единственными решениями функциональных уравнений*

$$\boldsymbol{J}_m. \qquad f\left(\sum \lambda_k \boldsymbol{x}_{(k)}\right) = \sum \lambda_k f(\boldsymbol{x}_{(k)}), \;\; 0 < \lambda_k < 1, \;\; \sum \lambda_k = 1;$$

$$\boldsymbol{I}_m. \qquad f\left(\sum \boldsymbol{x}_{(k)}\right) = \sum f(\boldsymbol{x}_{(k)});$$

$$\boldsymbol{II}_m. \qquad f\left(\sum \boldsymbol{x}_{(k)}\right) = \prod f(\boldsymbol{x}_{(k)});$$

$$\boldsymbol{III}_m. \qquad f\left(\prod \boldsymbol{x}_{(k)}\right) = \sum f(\boldsymbol{x}_{(k)});$$

$$\boldsymbol{IV}_m. \qquad f\left(\prod \boldsymbol{x}_{(k)}\right) = \prod f(\boldsymbol{x}_{(k)})$$

в классе функций, определённых и непрерывных на $\mathbb{R}^n$ (или $\mathbb{R}^n_+$), являются те же функции, что являются решениями уравнений для случая $m = 2$ соответствующих уравнений $\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{K}_I - \boldsymbol{K}_{IV}$.

Доказательство. Доказательства – методом математической индукцией по m. Докажем для $\mathbf{J}_m$. Для $m = 2$ утверждение составляет содержание теоремы 2. Пусть функция $f(\mathbf{x})$, определённая формулой (11), является решением уравнений $\mathbf{J}_s$ при натуральных $2 \leq s < m$. Тогда для всех $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ в силу теоремы 2 выполнено тождество:

$$f(\mu\mathbf{x} + \lambda_m\mathbf{y}) \equiv \mu f(\mathbf{x}) + \lambda_m f(\mathbf{y}).$$

(Здесь за μ обозначена сумма $\sum_{k=1}^{m-1}\lambda_k$. Заметим, что $\lambda_m = 1-\mu$.) В частности, оно будет выполнено для

$$\mathbf{x} = \mu^{-1}\sum_{k=1}^{m-1}\lambda_k\mathbf{x}_{(k)} \quad \text{и} \quad \mathbf{y} = \mathbf{x}_{(m)}:$$

$$f\left(\mu\left(\mu^{-1}\sum_{k=1}^{m-1}\lambda_k\mathbf{x}_{(k)}\right) + \lambda_m\mathbf{x}_{(m)}\right) \equiv \mu f\left(\sum_{k=1}^{m-1}\mu^{-1}\lambda_k\mathbf{x}_{(k)}\right) + \lambda_m f(\mathbf{x}_{(m)}). \tag{27}$$

В силу индукционного предположения та же функция $f(\mathbf{x})$ является решением уравнения $\mathbf{J}_{m-1}$. Поэтому, так как $\sum_{k=1}^{m-1}(\mu^{-1}\lambda_k) = 1$, то справедливо тождество:

$$f\left(\sum_{k=1}^{m-1}\mu^{-1}\lambda_k\mathbf{x}_{(k)}\right) \equiv \sum_{k=1}^{m-1}\mu^{-1}\lambda_k f(\mathbf{x}_{(k)}),$$

и тождество (27) можно продолжить так:

$$\equiv \mu\left(\mu^{-1}\sum_{k=1}^{m-1}\lambda_k f(\mathbf{x}_{(k)})\right) + \lambda_m f(\mathbf{x}_{(m)}) \equiv \sum_{k=1}^{m-1}\lambda_k f(\mathbf{x}_{(k)}) + \lambda_m f(\mathbf{x}_{(m)}) \equiv \sum_{k=1}^{m}\lambda_k f(\mathbf{x}_{(k)}).$$

Осталось заметить, что левая часть формулы (27) есть $f\left(\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\mathbf{x}_{(k)}\right)$. Таким образом, имеем тождество:

$$f\left(\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\mathbf{x}_{(k)}\right) \equiv \sum_{k=1}^{m}\lambda_k f(\mathbf{x}_{(k)}),$$

которое означает, что функция $f(\mathbf{x})$, определённая формулой (11), является решением уравнения $\mathbf{J}_m$. Аналогично доказываются и остальные утверждения. □

Список литературы

1. Detlef Gronaw. Translation equation and sincov's equation - a historical remark // Proceedings and surveys. — 2014. — Vol. 46. — P. 43–46.

2. Moszner. L' e'quation de translation et l' e'quation de Sincov du type de Pexider // The Thrty-fifth International Symposium on Functional Equations, September 7-14, 1997. — Gras-Mariatrost, Austria : Aequationes, 1997.

3. Polianin A.D., Zhurov A.I. Solutions of Functionals Eqiations by Argument Elimination Method. — 11 January, 2005. — URL: http://eqworld.ipmnet.ru.

4. Polikanova I.V. Functional equations of Cauchy, Jensen, Lobachev-sky in functions of several variables // Международная конференция по геометрическому анализу, посвящённая памяти академика Ю.Г. Решетняка, 23-29 октября 2022 г.: Тез. докл. / Под ред. С.Г. Басалаева ; Новосиб. гос. ун-т. — Новосибирск : ИПЦ НГУ, 2022. — 138 с.

5. Ацель Я., Домбр Ж. Функциональные уравнения с несколькими переменными. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 432 с.

6. Reem D. The Cauchy functional equations as an initial valume problem // ArXiv:1002.3721v1[math.CA]. — 19Feb 2010.

7. Ацель Я. Некоторые общие методы в теории функциональных уравнений одной переменной. Новые применения функциональных уравнений // Успехи мат. наук. — 1956. — № 11:3(69). — С. 3–68.

8. Андреев А.А., Кузьмин Ю.Н., Савин А.Н., Саушкин И.Н. Функциональные уравнения. — Самара : В мире науки, 1999. — 225 с.

9. Андреев А.А., Кузьмин Ю.Н., Савин А.Н. Функциональные уравнения: Учебное издание. Серия А: Математика – вып. 3. — Самара : Пифагор, 1997. — 45 с.

10. Лихтарников Л.М. Элементарное введение в функциональные уравнения. — СПб. : Лань, 1997. — 160 с.