УДК 514.75

Применение СКМ в исследовании плоских кривых третьего порядка

Старцев В.С., Хромова О.П.
Алтайский государственный университет, г. Барнаул
Vita1Moon@yandex.ru, khromova.olesya@gmail.com

Аннотация

В работе построено гауссово изображение нескольких кривых третьего порядка: декартова листа, циссоиды, строфоиды и трисектриссы Маклорена. Построение было выполнено с помощью программы, написанной в СКМ SageMath.

Ключевые слова: кривая третьего порядка, гауссово отображение, SageMath.

1. Общие сведения

Пусть F – некоторая гладкая плоская кривая, $p \in F$ – произвольная её точка. Обозначим через $n(p)$ – единичный вектор нормали к кривой в точке p. Отложим вектор $n(p)$ из начала координат. Тогда его конец определяет некоторую точку $\Gamma(p)$ единичной окружности радиуса 1 $S_1^1 \in \mathbb{R}^2$.

Построенное отображение Γ кривой F в единичную окружность радиуса один S_1^1 называется *гауссовым отображением*:

$$\Gamma : F \to S_1^1.$$

Образы точек и множеств при *гауссовом* отображении называются их *гауссовыми изображениями.*

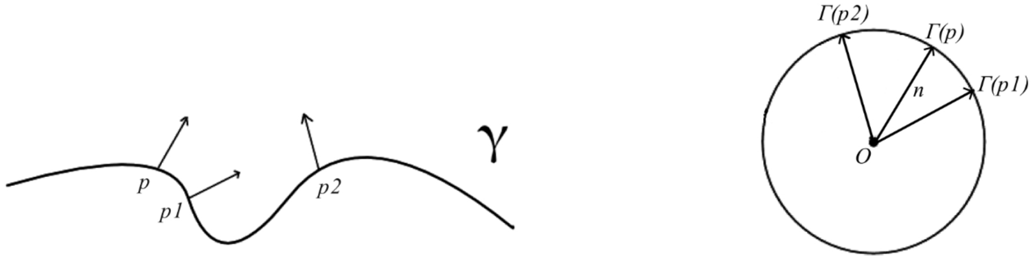

Рисунок 1. Гауссово изображение плоской кривой

Гауссово изображение находится с помощью следующего алгоритма. Пусть γ – некоторая плоская кривая задаваемая уравнением $F(x,y) = 0$. Тогда вектор $N = grad\, F = \left\{ \frac{\partial F}{\partial x} \middle| \frac{\partial F}{\partial y} \right\}$ является вектором (главной) нормали кривой γ, а $n = \frac{N}{|N|}$ – единичным вектором нормали.

Для каждой точки $p \in \gamma$ отложим вектор $n(p)$ от начала координат. Геометрическое место точек концов всех векторов $n(p)$ есть некоторая кривая – гауссово изображение кривой γ [1].

Определение 1. *Кривой 3-го порядка на аффинной плоскости называется геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению*

$$Ax^3 + 3Bx^2y + 3Cxy^2 + Dy^3 + 3Ex^2 + 6Fxy + 3Gy^2 + 3Hx + 3Ky + L = 0,$$

где $A^2 + B^2 + C^2 + D^2 > 0$.

Определим гауссово изображения четырёх замечательных кривых третьего порядка: декартова листа, циссоиды, строфоиды и трисектриссы Маклорена.

2. Вычисление векторов нормали для замечательных кривых третьего порядка

Для поиска векторов нормали, будем считать далее, что вещественное число $a = 1$.

1. Вектор нормали декартова листа.

Декартов лист задаётся следующим уравнением:

$$x^3 + y^3 = 3axy.$$

Приведем выражение к виду $F(x, y) = 0$:

$$x^3 + y^3 - 3xy = 0.$$

Найдём частные производные по x и y:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 - 3y, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 - 3x.$$

Вектор нормали будет иметь следующие координаты:

$$\overrightarrow{N} = \{3x^2 - 3y | 3y^2 - 3x\}.$$

Следовательно, единичным вектором нормали для декартова листа является вектор:

$$\overrightarrow{n} = \left\{ \frac{x^2 - y}{\sqrt{(x^2 - y)^2 + (y^2 - x)^2}} \middle| \frac{y^2 - x}{\sqrt{(x^2 - y)^2 + (y^2 - x)^2}} \right\}.$$

2. Вектор нормали циссоиды.

Циссоида задаётся следующим уравнением:

$$y^2 = \frac{x^3}{2a - x}.$$

Приведем выражение к виду

$$F(x, y) = 0$$

:

$$y^2 - \frac{x^3}{2 - x} = 0.$$

Найдём частные производные по x и y:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{x^2(3 - x)}{(2 - x)^2}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y.$$

Следовательно, единичный вектор нормали циссоиды имеет вид:

$$\overrightarrow{n} = \left\{ \frac{-\frac{x^2(3-x)}{(2-x)^2}}{\sqrt{\frac{x^4(3-x)^2}{(2-x)^4}+y^2}} \middle| \frac{y}{\sqrt{\frac{x^4(3-x)^2}{(2-x)^4}+y^2}} \right\}.$$

3. Вектор нормали строфоида.

Строфоида задаётся следующим уравнением:

$$y^2 = \frac{x(x-a)^2}{2a-x}.$$

Приведем данное выражение к виду $F(x,y)=0$:

$$y^2(2-x)-(x^2-x)^2=0.$$

Найдём частные производные по x и y:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -2(2x^3-3x^2+x)-y^2, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -2y(x-2).$$

Вектор единичной нормали строфоиды имеет вид:

$$\overrightarrow{n} = \left\{ \frac{-2(2x^3-3x^2+x)-y^2}{\sqrt{2(2x^3-3x^2+x)+y^2)^2+4y^2(x-2)^2}}; \frac{-2y(x-2)}{2(2x^3-3x^2+x)+y^2)^2+4y^2(x-2)^2} \right\}.$$

4. Вектор нормали трисектрисы Маклорена.

Трисектриса задаётся следующим уравнением:

$$x(x^2+y^2) = a(3x^2-y^2).$$

Перепишем выражение в виде $F(x,y)=0$:

$$x(x^2+y^2)-(3x^2-y^2)=0.$$

Найдём частные производные по x и y:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -6x+3x^2-y^2, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y+2xy.$$

Таким образом, вектор единичной нормали трисектрисы имеет следующий вид:

$$\overrightarrow{n} = \left\{ \frac{-6x+3x^2-y^2}{\sqrt{(6x-3x^2-y^2)^2+4(y+xy)^2}} \middle| \frac{2(y+xy)}{\sqrt{(6x-3x^2-y^2)^2+4(y+xy)^2}} \right\}.$$

3. Построение гауссова изображения кривых третьего порядка в SageMath

В настоящем разделе приведём программные коды в среде SageMath, разработанные для построения гауссова изображения кривых третьего порядка.

В программе реализовано:

1. выбор одной из четырёх кривой третьего порядка, для которой будет производиться построение графика функции или отрисовка её гауссова изображения

2. построение графиков кривых третьего порядка в плоскости $\mathbb{R}^2$;

3. построение гауссова изображения кривых третьего порядка на двумерной единичной окружности как дискретное множество точек на ней (гауссовых образов).

Построение гауссова изображения кривой осуществляет команда (функция) GraphSpherePlot по следующему алгоритму:

1. Создание двух списков: x и y, элементами которых являются значения, найденные из соответствующей формуле кривой, заданной параметрически. В качестве переменной t служит список t, который имеет значение на отрезке $[t_{\min}, t_{\max}]$ с шагом di. Пусть $t_{\min} = -2$, $t_{\max} = 2$, $di = 100$.

2. Генерирование нового списка L, элементы (точки) которого будут вычислены по формулам разделов 1–2. Количество точек n задано в самой функции.

3. Построение единичной окружность, на которой будут лежать точки, с координатами из списка L.

1. Код программы, строящий гауссово изображение декартова листа.

```
def GraphSpherePlot(curve_choise):
a = 1
  y = [] # Список координат точек по y
  x = [] # Список координат точек по x
  if (curve_choise == 1): # Декартов лист
        t_min = -2
        t_max = 2
        di = 100
        T = list([i/di for i in range(t_min*di, (t_max+1)*di-1)] )
        if -1.0 in T: T.remove(-1.0)
        for i in T:
            if i != -1.0:
                new_x = (3 * a * i)/(1 + i**3)
                new_y = (3 * a * i**2)/(1 + i**3)
                x.append(new_x)
                y.append(new_y)

        L = [[(x[i]**2 - a*y[i])/sqrt((a*x[i] - y[i]**2)**2 + (x[i]**2 - a*y[i])**2),
          -(a*x[i] - y[i]**2)/sqrt((a*x[i] - y[i]**2)**2 + (x[i]**2 - a*y[i])**2)]
for i in range(len(x))  if (x[i] != 0.0) or (y[i] != 0.0)]
        txt = text("Декартов лист", (1.4,1.4), rgbcolor=(0.3,0.4,0))
  ...
  points = point(L, rgbcolor=(1/8,1/4,1/2)) #точки
  example = ellipse((0,0),1,1, color='red') #пример
  show(txt+points+example+axis)
```

2. Код программы, строящий гауссово изображение циссоиды.

```
def GraphSpherePlot(curve_choise):
       a = 1
       y = [] # Список координат точек по y
```

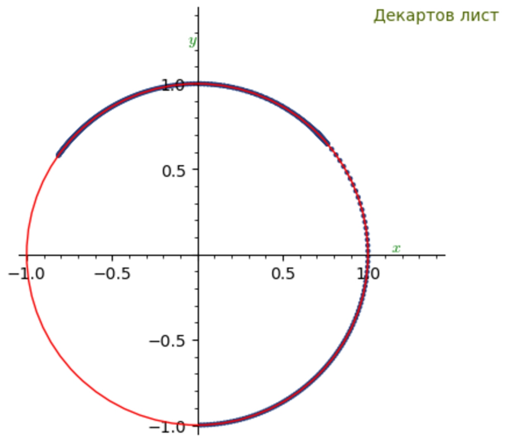

Рисунок 2. Демонстрация результата построения гауссова изображения декартова листа

```
       x = [] # Список координат точек по x
...
       if (curve_choise == 2): #Циссоида
          t_min = -2
         t_max = 2
          di = 100
          T = list([i/di for i in range(t_min*di, (t_max+1)*di-1)] )
         if 0.0 in T: T.remove(0.0)
          for i in T:
             new_x = a/(i**2 + 1)
             new_y = a/(i * (i**2 + 1))
             x.append(new_x)
              y.append(new_y)

         L = [[-(3*x[i]**2/(2*a - x[i]) + x[i]**3/(2*a - x[i])**2)/sqrt((3*x[i]**2/
(2*a - x[i]) + x[i]**3/(2*a - x[i])**2)**2 + 4*y[i]**2),
            2*y[i]/sqrt((3*x[i]**2/(2*a - x[i]) + x[i]**3/(2*a - x[i])**2)**2 +
4*y[i]**2)] for i in range(len(x))]
          txt = text("Циссоида", (1.4,1.4), rgbcolor=(0.3,0.4,0))
...
        points = point(L, rgbcolor=(1/8,1/4,1/2)) #точки
        example = ellipse((0,0),1,1, color='red') #пример
        show(txt+points+example+axis)
```

3. Код программы, строящий гауссово изображение строфоиды.

```
def GraphSpherePlot(curve_choise):
       a = 1
       y = [] # Список координат точек по y
       x = [] # Список координат точек по x
...

       if (curve_choise == 3): #Строфоида
        t_min = -2
        t_max = 2
        di = 100
```

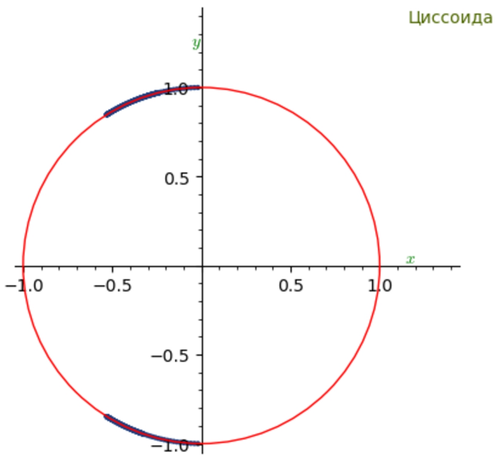

Рисунок 3. Демонстрация результата построения гауссова изображения циссоида

```
        T = list([i/di for i in range(t_min*di, (t_max+1)*di-1)] )
       for i in T:
            new_x = (2*a*i)/(1 + i**2)
             new_y = (a*i*(i**2 - 1))/(1 + i**2)
             x.append(new_x)
             y.append(new_y)
         L = [[(-2*(x[i]**3 - 3*x[i]**2 + x[i]) - y[i]**2)/sqrt((2*(x[i]**3 -
3*x[i]**2 + x[i]) + y[i]**2)**2 + 4*y[i]**2*(x[i] - 2)**2),
(-2*y[i]*(x[i] - 2))/sqrt((2*(x[i]**3 - 3*x[i]**2 + x[i]) +
y[i]**2)**2 + 4*y[i]**2*(x[i] - 2)**2)]
for i in range(len(x)) if (x[i] != 0.0) or (y[i] != 0.0)]
       txt = text("Строфоида", (1.4,1.4), rgbcolor=(0.3,0.4,0))
...
      points = point(L, rgbcolor=(1/8,1/4,1/2)) #точки
      example = ellipse((0,0),1,1, color='red') #пример
      show(txt+points+example+axis)
```

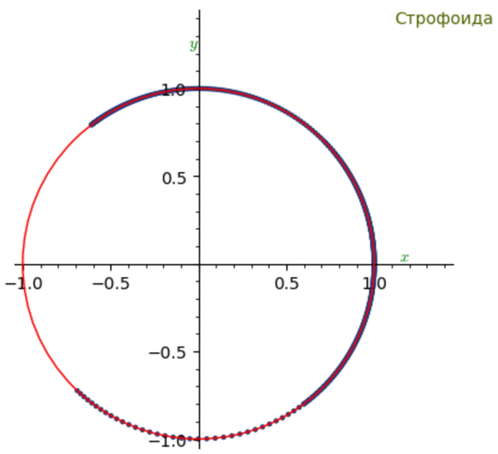

Рисунок 4. Демонстрация результата построения гауссова изображения строфоиды

4. Код программы, строящий гауссово изображение трисектрису Маклорена.

```
def GraphSpherePlot(curve_choise):
```

```
       a = 1
       y = [] # Список координат точек по y
       x = [] # Список координат точек по x
...
       if (curve_choise == 4): #Трисектриса
        t_min = -2
        t_max = 2
         di = 100
         T = list([i/di for i in range(t_min*di, (t_max+1)*di-1)] )
         for i in T:
             temp_sin = sin(i)
             temp_cos = cos(i)
             if temp_sin != 0 and temp_cos != 0:
                 new_x = a*(sin(3*i)/temp_sin)
                 new_y = a*(sin(3*i)/temp_cos)
                 x.append(new_x)
                 y.append(new_y)

         L = [[-(6*a*x[i] - 3*x[i]**2 - y[i]**2)/sqrt((6*a*x[i] -
3*x[i]**2 - y[i]**2)**2 + 4*(a*y[i] + x[i]*y[i])**2),
            2*(a*y[i] + x[i]*y[i])/sqrt((6*a*x[i] - 3*x[i]**2 -
y[i]**2)**2 + 4*(a*y[i] + x[i]*y[i])**2)] for i in range(len(x))]
         txt = text("Трисектриса", (1.4,1.4), rgbcolor=(0.3,0.4,0))
...
      points = point(L, rgbcolor=(1/8,1/4,1/2)) #точки
     example = ellipse((0,0),1,1, color='red') #пример
     show(txt+points+example+axis)
```

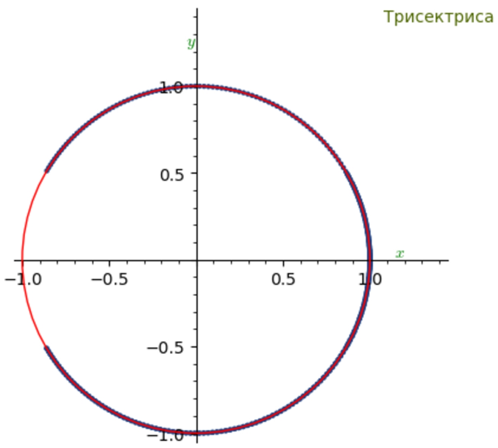

Рисунок 5. Демонстрация результата построения гауссова изображения трисектрисы Маклорена

Список литературы

1. Топоногов В.А. Дифференциальная геометрия кривых и поверхностей. — М. : Физматкнига, 2012. — 224 с.

2. Александров А. Д., Нецветаев Н.Ю. Геометрия. — М. : Наука, 1990. — 672 с.

3. Савелов А.А. Плоские кривые. Систематика, свойства, применение. — М. : ФИЗМАЛТИТ, 1961. — 296 с.

4. Смогоржевский А.С. Справочник по теории кривых плоских кривых третьего порядка. — М. : ФИЗМАЛТИТ, 2012. — 271 с.