УДК 512.816

Вычисление некоторых дважды транзитивных групп Ли преобразований

Кыров В.А.
Горно-Алтайский государственный университет, г. Горно-Алтайск
KyrovVA@yandexl.ru

Аннотация

Г.Г. Михайличенко дается определение физической структуры ранга (3,2). Им же доказывается, что эта физическая структура локально эквивалентна дважды точно транзитивному действию группы Ли в пространстве R^n. В.А. Кыровым были найдены алгебры Ли некоторых таких действий в R^3 с подгруппами параллельных переносов. В данной статье находятся локальные дважды точно транзитивные действия для трёх ранее найденных алгебр Ли. При решении этой задачи сначала интегрированием уравнений Ли найдены однопараметрические подгруппы, а затем, вычислены их композиции — искомые действия.

Ключевые слова: Группа Ли преобразований, дважды транзитивная группа Ли преобразований, однопараметрическая подгруппа, действие группы Ли, алгебра Ли, уравнения Ли, физическая структура.

1. Введение

Согласно терминологии Михайличенко Г.Г. [1] под физической структурой ранга (3,2) на гладких многообразиях M и N понимается гладкая функция $f : M \times N \to R^n$, удовлетворяющая трем аксиомам:

1. область определения функции f открытое и плотное подмногообразие в $M \times N$;
2. функция f невырождена по каждому из своих аргументов;
3. аксиома феноменологической симметрии: $\forall a, b, c \in M$, $\forall x, y \in N$ выполняется тождество
$$\Phi(f(a,x), f(a,y), f(b,x), f(b,y), f(c,x), f(c,y)) = 0,$$
где, например, $f(a,x)$ — значение функции f на точках $a \in M, x \in N$, а $\Phi : R^{6n} \to R^n$ — регулярная функция.

В монографии [1] также доказывается, что физическая структура ранга (3,2) локально задаёт действие дважды точно транзитивной группы Ли преобразований пространства R^n. В данной работе $n = 3$.

В статьях [2] – [3] решалась задача нахождения алгебр Ли дважды точно транзитивных групп Ли преобразований пространства R^3 с подгруппой параллельных переносов. В данной статье по алгебрам Ли с базисными операторами [4]:

$$X_1 = \partial_x,\ X_2 = \partial_y,\ X_3 = \partial_z,\ Y_1 = e^x[\partial_x + y\partial_y + z\partial_z],\ Y_2 = e^x\partial_y,\ Y_3 = e^x\partial_z; \tag{1}$$

$$\begin{gathered} X_1 = \partial_x,\ X_2 = \partial_y,\ X_3 = \partial_z, \\ Y_1 = e^x[\partial_x + (y + z^2/2)\partial_y + z\partial_z],\ Y_2 = e^x\partial_y,\ Y_3 = e^x[z\partial_y + \partial_z]; \end{gathered} \tag{2}$$

$$
\begin{gathered}
X_1 = \partial_x,\ X_2 = \partial_y,\ X_3 = \partial_z,\\
Y_1 = (xy + y^3/3)\partial_x + y^2\partial_y + y\partial_z,\ Y_2 = y\partial_x,\ Y_3 = (x + y^2)\partial_x + 2y\partial_y
\end{gathered}
\tag{3}
$$

находятся уравнения, задающие их локальные действия в R^3, то есть локальные дважды точно транзитивные действия в R^3.

2. Основная часть

Приступам к решению поставленной задачи. Сначала в (1) и (2) вводим замену координат $x' = e^x, y' = y, z' = z$. Тогда в прежних обозначениях координат будем иметь

$$
X_1 = x\partial_x,\ X_2 = \partial_y,\ X_3 = \partial_z,\ Y_1 = x^2\partial_x + xy\partial_y + xz\partial_z,\ Y_2 = x\partial_y,\ Y_3 = x\partial_z; \tag{4}
$$

$$
\begin{gathered}
X_1 = x\partial_x,\ X_2 = \partial_y,\ X_3 = \partial_z,\\
Y_1 = x^2\partial_x + x(y + z^2/2)\partial_y + xz\partial_z,\ Y_2 = x\partial_y,\ Y_3 = xz\partial_y + x\partial_z.
\end{gathered}
\tag{5}
$$

Требуется по алгебрам Ли (4), (5) и (3) восстановить локальные действия. Для этого по каждому из базисных операторов по уравнениям Ли [5]

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial x'}{\partial a} = X^1(x', y', z'),\ \frac{\partial y'}{\partial a} = X^2(x', y', z'),\ \frac{\partial z'}{\partial a} = X^3(x', y', z'),\\
x'|_{a=0} = x,\ y'|_{a=0} = y,\ z'|_{a=0} = z,
\end{gathered}
\tag{6}
$$

где $x' = x'(x, y, z, a), y' = y'(x, y, z, a), z' = z'(x, y, z, a)$, X^1, X^2, X^3 — компоненты оператора

$$
X = X^1(x, y, z)\partial_x + X^2(x, y, z)\partial_y + X^3(x, y, z)\partial_z,
$$

будет найдена локальная однопараметрическая подгруппа Ли преобразований.

Теорема 1. *По операторам*

$$
\begin{gathered}
\partial_x,\ x\partial_x,\ x\partial_y,\ x^2\partial_x + xy\partial_y + xz\partial_z,\ x^2\partial_x + x(y + z^2/2)\partial_y + xz\partial_z,\ xz\partial_y + x\partial_z,\\
(xy + y^3/3)\partial_x + y^2\partial_y + y\partial_z,\ (x + y^2)\partial_x + 2y\partial_y
\end{gathered}
\tag{7}
$$

восстанавливаются соответственно следующие локальные однопараметрические подгруппы:

$$
\begin{gathered}
x' = x + a,\ y' = y,\ z' = z,\\
x' = e^a x,\ y' = y,\ z' = z,\\
x' = x,\ y' = ax + y,\ z' = z,\\
x' = \frac{x}{1 - ax},\ y' = \frac{y}{1 - ax},\ z' = \frac{z}{1 - ax},\\
x' = \frac{x}{1 - ax},\ y' = \frac{axz^2}{2(1 - ax)^2} + \frac{y}{1 - ax},\ z' = \frac{z}{1 - ax},\\
x' = x,\ y' = a^2x^2/2 + axz + y,\ z' = ax + z,\\
x' = \frac{ay^3}{3(1 - ay)^2} + \frac{x}{1 - ay},\ y' = \frac{y}{1 - ay},\ z' = z - \ln(1 - ay),\\
x' = \frac{y^2(e^{4a} - e^a)}{3} + e^a x,\ y' = e^{2a}y,\ z' = z.
\end{gathered}
\tag{8}
$$

Доказательство. Доказательство теоремы сводится к интегрированию уравнений Ли (6). Продемонстрируем это на примере пятого оператора из (7). Уравнения Ли в таком случае принимают вид:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial x'}{\partial a} = x'^2,\ \frac{\partial y'}{\partial a} = x'y' + x'z'^2/2,\ \frac{\partial z'}{\partial a} = x'z',\\
x'|_{a=0} = x,\ y'|_{a=0} = y,\ z'|_{a=0} = z.
\end{gathered}
$$

Сначала проинтегрируем первое уравнение, будем иметь $x' = -\dfrac{1}{a+c}$. Применяя первое начальное условие, получаем $c = -\dfrac{1}{x}$, тогда $x' = \dfrac{x}{1-ax}$. Затем интегрируем третье уравнение с применением третьего начального условия: $z' = \dfrac{z}{1-ax}$. И, наконец, вычисляем решение второго уравнения: $y' = \dfrac{axz^2}{2(1-ax)^2} + \dfrac{y}{1-ax}$. Аналогично находятся и остальные результаты из (8). □

Далее получаем основной результат статьи.

Теорема 2. *Локально дважды транзитивные группы Ли преобразований пространства R^3 с алгебрами Ли* (4), (5) *и* (3) *задаются соответственно следующими уравнениями:*

$$x' = \frac{a_1 x}{1+a_2 x},\ y' = \frac{a_3 x + y}{1+a_2 x} + a_5,\ z' = \frac{a_4 x + z}{1+a_2 x} + a_6;$$

$$x' = \frac{a_1 x}{1+a_2 x},\ y' = \frac{-a_2 x z^2}{2(1+a_2 x)^2} + \frac{a_3 x + a_4 x z + a_4^2 x^2/2 + y}{1-ax} + a_5,\ z' = \frac{a_4 x + z}{1+a_2 x} + a_6;$$

$$x' = \frac{a_1 a_3^4 y^3}{3(1-a_1 y)^2} + \frac{y^2(a_3^4 - a_3)/3 + a_3 x + a_2 y}{1-a_1 y} + a_4,$$

$$y' = \frac{a_3^2 y}{1-a_1 y} + a_5,\ z' = z - \ln(1-a_1 y) + a_6,$$

причем тождественному преобразованию в первой и второй группах соответствуют значения параметров $(1,0,0,0,0,0)$, *а для третьей* — $(0,0,1,0,0,0)$.

Доказательство. Вычисляются композиции однопараметрических подгрупп базисных операторов $X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3$ алгебр Ли (4), (5) и (3), которые с точностью до обозначений переменных и параметров вычислены в теореме 1 и приведены в (8). Затем в найденных результатах переобозначаются параметры. □

3. Заключение

Поставленная задача решена. Эта задача имеет продолжение, поскольку автором найдены еще и другие алгебры Ли дважды точно транзитивных действий групп Ли в пространстве R^3 с подгруппой параллельных переносов.

Список литературы

1. Михайличенко Г.Г. Групповая симметрия физических структур. — Барнаул : Барн. гос. пед. ун-т, 2003.

2. Кыров В.А. К вопросу о локальном расширении группы параллельных переносов трехмерного пространства // Владикавк. матем. журн. — 2021. — Т. 23, № 1. — С. 32–42. — DOI: https://doi.org/10.46698/q6524-1245-2359-m.

3. Кыров В.А. О группах Ли преобразований пространства с подгруппой параллельных переносов // Математические труды. — 2022. — Т. 25, № 2. — С. 126–148. — DOI: 10.33048/mattrudy.2022.25.205.

4. Кыров В.А. О локальном расширении группы параллельных переносов в трехмерном пространстве // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. — 2022. — Т. 32, № 1. — С. 62–80. — DOI: https://doi.org/10.35634/vm220105.

5. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. — М. : Наука, 1978.