

# Гомогенизация модели антиплоского сдвига слоистого композита методом Аллера – Нгуетсенга<sup>1</sup>

Саженок С.А., Саженкова Е.В., Чжун Ц.

*Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, г. Новосибирск  
Новосибирский государственный университет экономики и управления, г. Новосибирск*

*Новосибирский государственный университет, г. Новосибирск  
sazhenkovs@yandex.ru, elsazh1977@gmail.com, t.chzhun@alumni.nsu.ru*

## Аннотация

В статье рассматривается пространственно-одномерная нестационарная задача антиплоского сдвига для линейно термоупругого материала (композита) с быстро осциллирующими физическими характеристиками. Частота осцилляций полагается пропорциональной безразмерной величине  $\varepsilon^{-1}$ . С помощью метода двухмасштабной сходимости Аллера – Нгуетсенга проводится предельный переход при стремлении частоты осцилляций к бесконечности, то есть при  $\varepsilon \rightarrow 0+$ . В результате конструируется предельная усреднённая двухмасштабная модель динамики композита. Затем стандартным методом асимптотической декомпозиции разделяются масштабы и выводится предельная макроскопическая модель. Настоящая работа подтверждает результат о предельном режиме осцилляций, полученный Ж. Франкфором (1983) с использованием метода аналитической теории полугрупп. Главная новизна настоящей работы по отношению к исследованию Ж. Франкфора состоит в конструкции «промежуточной» двухмасштабной модели, а также в дополнительном учёте присутствия быстро осциллирующих внешних распределённых сил и источников тепла и наличия быстрых осцилляций в начальных данных задачи.

*Ключевые слова:* Термоупругость, антиплоский сдвиг, быстрые осцилляции, гомогенизация, двухмасштабная сходимость

## 1. Введение

В статье рассматривается пространственно-одномерная начально-краевая задача для классической системы нестационарных уравнений линейной термоупругости [1] с периодически быстро осциллирующими по пространственной переменной механическими характеристиками: плотностью, объёмной удельной теплоёмкостью, коэффициентом теплопроводности, коэффициентом упругости, модулем линейного теплового расширения и внешними распределёнными силами и источниками тепла. Задача содержит положительный малый параметр  $\varepsilon$  — отношение минимального периода пространственных осцилляций и всего термоупругого тела. Изучается задача гомогенизации, то есть ставится цель провести предельный переход при  $\varepsilon \rightarrow 0$  и соответственно описать предельный режим осцилляций при стремлении частоты осцилляций к бесконечности. Для достижения указанной цели вводится понятие слабого обобщённого решения задачи, проводится обоснование корректности задачи при фиксированных значениях  $\varepsilon$ , конструируется система равномерных по  $\varepsilon$  оценок семейства слабых обобщённых решений. Затем с помощью метода двухмасштабной сходимости Аллера – Нгуетсенга проводится построение двухмасштабной предельной

<sup>1</sup>Работа С.А. Саженкова выполнена при поддержке проекта 2.3.1.2.11 «Анализ математических моделей сплошных сред с сингулярностями, разрывами и внутренними неоднородностями» (научная тема FWGG-2021-0010).

системы при  $\varepsilon \rightarrow 0$  (см. *модель 2-sc* в § 6) и, наконец, применяется процедура асимптотической декомпозиции — разделения микроскопического и макроскопического масштабов в двухмасштабной системе — с помощью которой конструируется предельная эффективная модель на макроскопическом масштабе (*модель H* в § 8). Решениями этой модели служит предел семейства решений исходной задачи. Микроскопическим в исследовании является масштаб, на котором различимы периодические неоднородности тела (в частности, если тело является слоистым материалом, то выделяется и исследуется каждый отдельный слой толщины  $l = O(\varepsilon)$ ), а макроскопическим является характерный масштаб всего тела.

Указанная задача гомогенизации ранее уже рассматривалась Ж. Франкфором [2] в многомерной постановке при отсутствии источников тепла и массовых сил и в предположении, что начальные распределения полей смещений, скорости и температуры композитного тела не зависят от малого параметра  $\varepsilon$ , то есть осцилляции в них отсутствуют. Заметим, что Ж. Франкфор применил совершенно другой метод, нежели в настоящей статье. А именно, в [2] была применена аналитическая теория полугрупп и в результате была получена усреднённая система уравнений термоупругости, в которой начальные данные для распределения температуры не совпадают с исходными, а сложным образом выражаются через них и другие данные задачи.

Проведённый в настоящей работе анализ в итоге показал эквивалентность подхода, применённого Ж. Франкфором с подходом, основанным на применении метода Аллера – Нгуэсенса. Соответственно, результат получился аналогичным. Главная же новизна настоящей работы по отношению к исследованию Ж. Франкфора состоит в конструкции «промежуточной» двухмасштабной модели (модели 2-sc), а также в дополнительном учёте присутствия быстро осциллирующих внешних распределённых сил и источников тепла и наличия быстрых осцилляций в начальных данных задачи.

## 2. Полная многомерная постановка задачи

Предваряя основные рассуждения, дадим сначала многомерную постановку исследуемой модели.

Объектом нашего изучения является система классических линейных нестационарных уравнений термоупругости [1, гл. 1] в несколько упрощённом случае, а именно, когда поле смещения описывается скалярной функцией:<sup>2</sup>

$$\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ a_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \left( \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j} - \alpha_j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\tau^\varepsilon \right) \right] + f\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right), \quad x \in \Omega, t > 0, \quad (1a)$$

$$\beta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial \tau^\varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \lambda_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial \tau^\varepsilon}{\partial x_j} \right] - a_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\alpha_j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t \partial x_i} + g\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right), \quad x \in \Omega, t > 0. \quad (1b)$$

В системе (1) через  $\Omega$  обозначена ограниченная область с достаточно гладкой границей  $\partial\Omega$  в пространстве  $\mathbb{R}_x^d$  ( $d = 1, 2, 3$ ) физических позиций  $x$ , через  $t$  — переменная времени. Уравнение (1a) — это уравнение баланса количества движения, уравнение (1b) — это уравнение баланса тепла (уравнение теплопроводности). Функции  $u^\varepsilon$  и  $\tau^\varepsilon$  являются искомыми и представляют собой поля смещений и температуры, соответственно. Скалярные функции  $\rho$ ,  $\beta$ ,  $f$  и  $g$ , вектор-функция  $(\alpha_j)$  и матрично-значные функции  $(a_{ij})$  и  $(\lambda_{ij})$  являются заданными и имеют следующий механический смысл:  $\rho$  — плотность материала,  $\beta$  — объёмная удельная теплоёмкость,  $f$  — плотность внешних распределённых сил,  $g$  — плотность внешних распределённых источников тепла,  $(\alpha_j)$  — вектор модулей линейного теплового расширения,  $(a_{ij})$  — матрица коэффициентов упругости и  $(\lambda_{ij})$  — матрица коэффициентов теплопроводности. Заметим, что «перевязанность» уравнений между собой

<sup>2</sup>В системе уравнений (1), так же как и далее в неравенствах (2), применяется стандартное правило суммирования по повторяющимся индексам.

отражает взаимодействие между деформацией и теплом: изменение температуры вызывает напряжение, и наоборот.

Модель (1) включает в себя малый положительный параметр  $\varepsilon$ , который выражает собой эффект быстрых осцилляций коэффициентов и свободных членов в уравнениях модели по пространственной координате  $x$ . Точное описание характера этих осцилляций состоит в следующем.

Через  $Y = (0, 1)^d \subset \mathbb{R}_y^d$  обозначим шаблонную ячейку периодичности. Считаем, что коэффициенты  $\rho = \rho(y)$ ,  $\beta = \beta(y)$ ,  $\alpha_j = \alpha_j(y)$ ,  $a_{ij} = a_{ij}(y)$  и  $\lambda_{ij} = \lambda_{ij}(y)$  — это вещественные измеримые ограниченные 1-периодические функции, определённые во всём пространстве  $\mathbb{R}_y^d$ , и что свободные члены  $f = f(x, y)$  и  $g = g(x, y)$  — это вещественные измеримые и ограниченные (на  $\Omega \times \mathbb{R}_y^d$ ) функции, 1-периодические по  $y_i$  и непрерывные по  $x$  при каждом фиксированном  $y$ .

Руководствуясь фундаментальными принципами классической механики и термодинамики, считаем, что функции  $\rho = \rho(y)$  и  $\beta = \beta(y)$  положительны и отделены от нуля, а матрицы  $(a_{ij}(y))$  и  $(\lambda_{ij}(y))$  являются симметричными и сильно эллиптическими на  $Y$ , то есть существует постоянная  $\alpha > 0$  такая, что для всех  $\xi \in \mathbb{R}^d$  выполняются неравенства

$$a_{ij}(y)\xi_i\xi_j \geq \alpha|\xi|^2 \quad \text{в } Y, \quad \lambda_{ij}(y)\xi_i\xi_j \geq \alpha|\xi|^2 \quad \text{в } Y. \quad (2)$$

В соответствии с этими предположениями и обозначениями, коэффициенты уравнений в (1) являются  $\varepsilon$ -периодическими функциями переменных  $x_i$ , следовательно, они быстро осциллируют (как и свободные члены  $f$  и  $g$ ), поскольку значение  $\varepsilon$  мало. По физическому смыслу, термоупругое тело, занимающее область  $\Omega$  и описываемое системой (1), можно трактовать как сильно неоднородный композит. Поскольку в рамках постановки (1) различима каждая отдельная осцилляция (неоднородность), то говорим, что (1) — это постановка на *микроскопическом масштабе*.

Для постановки корректной математической задачи систему уравнений (1) надо снабдить краевыми условиями. Для простоты мы будем рассматривать только однородные граничные условия Дирихле:

$$u^\varepsilon = 0, \quad \tau^\varepsilon = 0 \quad \text{на } \partial\Omega. \quad (3)$$

Будем полагать, что начальные распределения полей смещений, скоростей и температуры также быстро осциллируют и соответственно зависят от  $\varepsilon$ :

$$u^\varepsilon = u_0^\varepsilon(x), \quad \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(x, 0) = v_0^\varepsilon(x), \quad \tau^\varepsilon(x, 0) = \tau_0^\varepsilon(x). \quad (4)$$

Вид заданных функций  $u_0^\varepsilon$ ,  $v_0^\varepsilon$  и  $\tau_0^\varepsilon$  уточним далее в §3 сразу для одномерной постановки.

**Замечание 1.** Следуя Ж. Франкфору [2, Sec. 1], можно заметить, что замена более соответствующего реальной физике векторного поля смещений на скалярное на самом деле не ограничивает общности рассмотрения с математической точки зрения, а именно, все основные результаты, получаемые для скалярного поля смещения аналогичным образом выводятся и для векторного поля смещения.

В случае плоского тела ( $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ) модель (1) справедливо назвать моделью, описывающей случай антиплоского сдвига, то есть случай, когда смещения и их скорости и ускорения значимы только в направлении, перпендикулярном плоскости тела, а компонентами смещения, скорости и ускорения, параллельными этой плоскости, можно пренебречь.

Целью настоящей работы является исследование поведения решения  $(u^\varepsilon, \tau^\varepsilon)$  задачи (1), (3), (4) при  $\varepsilon \rightarrow 0$  в пространственно-одномерном случае. Ввиду замечания 1,

пространственно-одномерную постановку также справедливо назвать моделью антиплоского сдвига.

### 3. Пространственно-одномерная постановка задачи

Положим  $\Omega = (0, 1) \subset \mathbb{R}_x$  и произвольно зафиксируем конечный момент времени  $T > 0$ . Введём обозначение  $Q := \Omega \times (0, T) = (0, 1) \times (0, T)$ . В пространственно-одномерном случае, задача (1), (3), (4) в прямоугольнике  $Q$  принимает вид

$$\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \left( \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} - \alpha\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \tau^\varepsilon \right) \right] + f\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right), \quad (x, t) \in Q, \quad (5a)$$

$$\beta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial \tau^\varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \lambda\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial \tau^\varepsilon}{\partial x} \right] - a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \alpha\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t \partial x} + g\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right), \quad (x, t) \in Q, \quad (5b)$$

$$u^\varepsilon(0, t) = 0, \quad \tau^\varepsilon(0, t) = 0, \quad u^\varepsilon(1, t) = 0, \quad \tau^\varepsilon(1, t) = 0, \quad t \in [0, T], \quad (5c)$$

$$u^\varepsilon = u_0^\varepsilon(x), \quad \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(x, 0) = v_0^\varepsilon(x), \quad \tau^\varepsilon(x, 0) = \tau_0^\varepsilon(x), \quad x \in (0, 1). \quad (5d)$$

Заметим, что  $Y = (0, 1) \subset \mathbb{R}_y$  в одномерном случае. В соответствии с §2, на коэффициенты и свободные члены уравнений (5a) и (5b) накладываются следующие требования:

- $\rho = \rho(y)$ ,  $\beta = \beta(y)$ ,  $\alpha = \alpha(y)$ ,  $a = a(y)$ ,  $\lambda = \lambda(y)$  — 1-периодические измеримые функции на  $\mathbb{R}$ ;
- $\rho$ ,  $\beta$ ,  $\alpha$ ,  $a$ ,  $\lambda$  строго положительны, то есть они удовлетворяют оценке

$$\phi(y) \geq c_* \quad \text{п.в. в } Y, \quad \text{где } \phi := \rho, \beta, \alpha, a, \lambda, \quad (6)$$

с некоторой постоянной  $c_* > 0$ ;

- $\rho$ ,  $\beta$ ,  $\alpha$ ,  $a$ ,  $\lambda$  — ограниченные функции, то есть в дополнение к предыдущему требованию они удовлетворяют оценке

$$\phi(y) \leq c_{**} \quad \text{п.в. в } Y, \quad \text{где } \phi := \rho, \beta, \alpha, a, \lambda, \quad (7)$$

с некоторой постоянной  $c_{**} > 0$ ;

- при каждом фиксированном  $x \in [0, 1]$  отображения  $y \mapsto f(x, y)$  и  $y \mapsto g(x, y)$  измеримы и 1-периодичны на  $\mathbb{R}_y$ ;
- $f, g \in C([0, 1]; L^\infty(Y))$ .

Быстро осциллирующие начальные данные моделируются как двухмасштабно сходящиеся последовательности. Более точно, считаем, что  $u_0^\varepsilon \in H_0^1(0, 1)$ ,  $v_0^\varepsilon \in L^2(0, 1)$  и  $\tau_0^\varepsilon \in L^2(0, 1)$  заданы и удовлетворяют предельным соотношениям

$$u_0^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} u_0 \quad \text{слабо в } H_0^1(0, 1), \quad (8a)$$

$$\frac{\partial u_0^\varepsilon}{\partial x} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial u_0}{\partial x}(x) + \frac{\partial U_0}{\partial y}(x, y) \quad \text{двухмасштабно}, \quad (8b)$$

$$v_0^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} V_0(x, y), \quad \tau_0^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \Theta_0(x, y) \quad \text{двухмасштабно}. \quad (8c)$$

Здесь  $u_0 \in H_0^1(0, 1)$ ,  $U_0 \in L^2(0, 1; H_#^1(Y))$  и  $V_0, \Theta_0 \in L^2((0, 1) \times Y)$ .

Также, здесь и далее используются стандартные обозначения для пространств непрерывных и непрерывно-дифференцируемых функций  $C^k(\mathcal{O})$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ), пространств Лебега  $L^p(\mathcal{O})$  и пространств Соболева  $H^1(\mathcal{O}) = W_2^1(\mathcal{O})$  и  $H_0^1(\mathcal{O}) = \overset{\circ}{W}_2^1(\mathcal{O})$  во всевозможных областях  $\mathcal{O}$ . Через  $H_{\#}^1(Y)$ ,  $C_{\#}(Y)$  и  $C_{\#}^1(Y)$  обозначаем подпространства в  $H_{loc}^1(\mathbb{R})$ ,  $C(\mathbb{R})$  и  $C^1(\mathbb{R})$ , соответственно, состоящие из 1-периодических по  $y$  функций.

Точное изложение конструкции двухмасштабной сходимости, имеющей место в (8b)–(8c), приводится далее в § 5. Там же, в § 5, приводится простой пример начальных данных  $u_0^\varepsilon \in H_0^1(0, 1)$ ,  $v_0^\varepsilon \in L^2(0, 1)$  и  $\tau_0^\varepsilon \in L^2(0, 1)$  и соответствующих им функций  $u_0$ ,  $U_0$ ,  $V_0$  и  $\Theta_0$ .

С физической точки зрения, одномерная постановка (5) соответствует слоистому материалу, представляющему собой достаточно тонкий плоский лист. В качестве примера, на рисунке 1 изображён двуслойный композит, расположенный в вертикальной плоскости перпендикулярно осям  $Ox$  и  $Oy$  и заполняющий полосу  $\{0 \leq x \leq 1\}$ . Пакет, состоящий из двух однородных слоёв — серого и голубого — повторяется в композите с периодом  $\varepsilon$  на макроскопической шкале  $Ox$  и с периодом 1 на микроскопической шкале  $Oy$ .

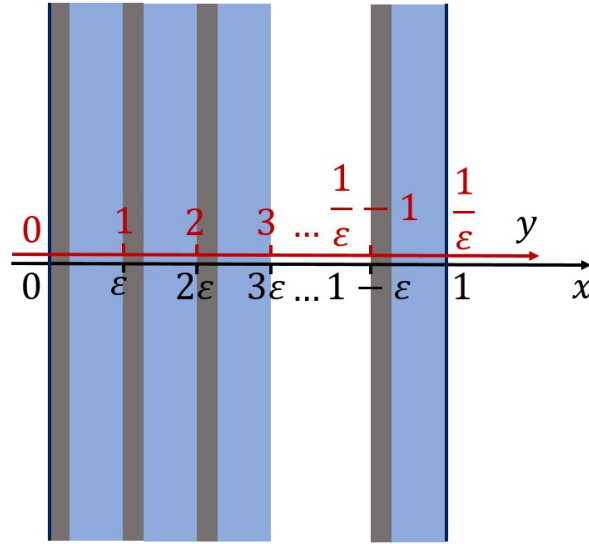


Рисунок 1. Двуслойный композит

Слои могут обладать очень контрастными термомеханическими свойствами. В наложенных выше условиях на коэффициенты уравнений (5a) и (5b) это отражено в том, что от этих коэффициентов не требуется даже хотя бы непрерывности по  $x$ . Поэтому задачу (5) следует понимать в *слабом обобщённом смысле*.

Понятие слабого обобщённого решения задачи (5) формулируется достаточно стандартно в следующем виде.

**Определение 1.** Пара функций  $(u^\varepsilon(x, t), \tau^\varepsilon(x, t))$  называется слабым обобщённым решением задачи (5), если эти функции удовлетворяют условиям регулярности

$$u^\varepsilon, \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \in L^2(0, T; H_0^1(0, 1)), \quad \tau^\varepsilon \in L^2(0, T; H_0^1(0, 1)),$$

интегральному равенству

$$\int_0^{t^*} \int_0^1 \left[ -\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \left( \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} - \alpha\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \tau^\varepsilon \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] dx dt - \int_0^1 \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) v_0^\varepsilon(x) \varphi(x, 0) dx + \int_0^1 \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(x, t_*) \varphi(x, t_*) dx = \int_0^{t^*} \int_0^1 f\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \varphi dx dt \quad (9)$$

для любых  $t_* \in (0, T]$  и для всевозможных пробных функций  $\varphi \in C^1(\bar{Q})$ , удовлетворяющих условию финитности  $\varphi(0, t) = \varphi(1, t) = 0 \quad \forall t \in [0, T]$ , интегральному равенству

$$\int_0^{t_*} \int_0^1 \left[ -\beta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \tau^\varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial t} + \lambda\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial \tau^\varepsilon}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \alpha\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t \partial x} \psi \right] dx dt - \int_0^1 \beta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \tau_0^\varepsilon(x) \psi(x, 0) dx + \int_0^1 \beta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \tau^\varepsilon(x, t_*) \psi(x, t_*) dx = \int_0^{t_*} \int_0^1 g\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \psi dx dt \quad (10)$$

для любых  $t_* \in (0, T]$  и для всевозможных пробных функций  $\psi \in C^1(\bar{Q})$ , удовлетворяющих условию финитности  $\psi(0, t) = \psi(1, t) = 0 \quad \forall t \in [0, T]$ , и начальному условию (5d)<sub>1</sub> в смысле сильного следа в  $L^2(0, 1)$ .

В следующем параграфе мы покажем, что задача (5) корректна при всех фиксированных  $\varepsilon \in (0, 1]$  и установим равномерные по  $\varepsilon$  оценки на решения.

#### 4. Корректность задачи (5). Равномерные оценки

Справедлив следующий результат о корректности задачи (5) при всех достаточно малых фиксированных значениях параметра  $\varepsilon$ .

**Теорема 1.** Пусть значение  $\varepsilon \in (0, 1]$  фиксировано. Тогда для любых заданных начальных функций  $u_0^\varepsilon \in H_0^1(0, 1)$ ,  $v_0^\varepsilon \in L^2(0, 1)$ ,  $\tau_0^\varepsilon \in L^2(0, 1)$ , существует единственное слабое обобщённое решение  $(u^\varepsilon, \tau^\varepsilon)$  задачи (5).

*Доказательство.* Обоснование существования слабого обобщённого решения проводится стандартными методами теории линейных эволюционных уравнений с помощью построения системы Галёркина, равномерных оценок для этой системы и предельного перехода по размерности галёркинских приближений. Единственность решения доказывается с помощью леммы Гронуолла. Рассуждения в этом обосновании, в целом, аналогичны рассуждениям из [3, теорема 3.4] или [4, гл. III, § 3].  $\square$

Для дальнейшего предельного перехода в задаче (5) при  $\varepsilon \rightarrow 0$  нам потребуются оценки на нормы слабого обобщённого решения  $(u^\varepsilon, \tau^\varepsilon)$ , равномерные по  $\varepsilon$ . Эти оценки устанавливаются в следующей теореме.

**Теорема 2.** Семейство слабых обобщённых решений  $\{(u^\varepsilon, \tau^\varepsilon)\}_{\varepsilon \in (0, 1]}$  задачи (5) удовлетворяет системе оценок

$$\begin{aligned} \|u^\varepsilon\|_{L^2(Q)} &\leq \|u^\varepsilon\|_{L^2(0, T; H_0^1(0, 1))} \leq C_1, \quad \|\tau^\varepsilon\|_{L^2(Q)} \leq \|\tau^\varepsilon\|_{L^2(0, T; H_0^1(0, 1))} \leq C_2, \\ \left\| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(\cdot, t_*) \right\|_{L^2(0, 1)} &\leq C_3 \quad \forall t_* \in (0, T], \end{aligned} \quad (11)$$

в которых положительные постоянные  $C_1, C_2$  и  $C_3$  зависят от

$$c_*, c_{**}, \|f\|_{C([0, 1]; L^\infty(Y))}, \|g\|_{C([0, 1]; L^\infty(Y))}, \mu_1 = \sup_\varepsilon \|u_0^\varepsilon\|_{H_0^1(0, 1)}, \mu_2 = \sup_\varepsilon \|v_0^\varepsilon\|_{L^2(0, 1)}, \mu_3 = \sup_\varepsilon \|\tau_0^\varepsilon\|_{L^2(0, 1)}$$

и не зависят от  $\varepsilon$ .

В формулировке теоремы 2 в силу предельных соотношений (8) заметим, что  $\mu_1, \mu_2$  и  $\mu_3$  — это конечные положительные постоянные.

*Доказательство теоремы 2.* В интегральное равенство (9) подставляем пробную функцию

$$\varphi(x, t) = \frac{\partial u^\varepsilon(x, t)}{\partial t}, \quad (12)$$

а в интегральное равенство (10) — пробную функцию

$$\psi(x, t) = \tau^\varepsilon(x, t). \quad (13)$$

При этом, конечно, имеем, что  $\varphi \notin C^1(\bar{Q})$  и  $\psi \notin C^1(\bar{Q})$ , но, с другой стороны, все интегралы в (9) и (10) корректно определены. Значит выбор пробных функций (12) и (13) соответственно в (9) и (10) законен.

После подстановки проводим несложные технические преобразования и складываем два получившихся интегральных равенства друг с другом, получая тем самым *первое энергетическое тождество* — уравнение баланса механической и тепловой энергии:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^1 \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \left| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(x, t_*) \right|^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \left| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x}(x, t_*) \right|^2 dx \\ & + \frac{1}{2} \int_0^1 \beta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) |\tau^\varepsilon(x, t_*)|^2 dx + \int_0^{t_*} \int_0^1 \lambda\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \left| \frac{\partial \tau^\varepsilon}{\partial x} \right|^2 dx dt = \\ & = \frac{1}{2} \int_0^1 \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) |v_0^\varepsilon(x)|^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \left| \frac{\partial u_0^\varepsilon(x)}{\partial x} \right|^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \beta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) |\tau_0^\varepsilon(x)|^2 dx \\ & + \int_0^{t_*} \int_0^1 f\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} dx dt + \int_0^{t_*} \int_0^1 g\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \tau^\varepsilon dx dt \quad \forall t_* \in [0, T]. \end{aligned} \quad (14)$$

Оценки (11) теперь выводим из этого тождества, используя классическую технику построения равномерных и априорных оценок, основанную на применении неравенств Коши и Пуанкаре – Фридрихса [4, глава 1, § 6] и леммы Гронуолла.  $\square$

В § 6 на основании полученных равномерных оценок с помощью метода двухмасштабной сходимости Аллера – Нгуэтсенга перейдём к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$  в задаче (5). Сейчас приведём основные положения этого метода.

## 5. Основы метода двухмасштабной сходимости

В работах Г. Нгуэтсенга (1989) и Г. Аллера (1992) была предложена интересная концепция двухмасштабной сходимости для проведения процедур гомогенизации периодических структур [5, 6]. Со временем, эта концепция развилась в большую теорию и получила широкое применение при решении задач гомогенизации. В настоящей статье понятие двухмасштабной сходимости и основные связанные с ним результаты приведём в виде, адаптированном к рассматриваемой задаче.

**Определение 2.** *Говорим, что последовательность  $\{\varphi^\varepsilon\} \subset L^2(Q)$  двухмасштабно сходится к пределу  $\varphi \in L^2(Q \times Y)$ , если для любой функции  $\sigma \in L^2(Q; C_\#(Y))$  справедливо предельное соотношение*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_Q \varphi^\varepsilon(x, t) \sigma\left(x, t, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx dt = \int_{Q \times Y} \varphi(x, t, y) \sigma(x, t, y) dx dy dt$$

Существование и основные свойства двухмасштабно сходящихся последовательностей устанавливаются в следующей фундаментальной теореме [5, 6].

**Теорема 2-сc.** **1.** *Всякая ограниченная в  $L^2(Q)$  последовательность содержит подпоследовательность, двухмасштабно сходящуюся к некоторому пределу, принадлежащему  $L^2(Q \times Y)$ .*

**2.** *Если последовательность из  $L^2(Q)$  двухмасштабно сходится одновременно к двум функциям  $\varphi_1, \varphi_2 \in L^2(Q \times Y)$ , то  $\varphi_1 = \varphi_2$  почти всюду в  $Q \times Y$ .*

**3.** Пусть последовательности  $\{\varphi^\varepsilon\}$  и  $\{\partial\varphi^\varepsilon/\partial x\}$  ограничены в  $L^2(Q)$ . Тогда существуют функции  $\varphi \in L^2(Q)$  и  $\psi \in L^2(Q \times Y)$  и подпоследовательность из  $\{\varphi^\varepsilon\}$ , такие, что  $\psi \in L^2(Q; H_{\#}^1(Y))$  и  $\{\varphi^\varepsilon\}$  и  $\{\partial\varphi^\varepsilon/\partial x\}$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  двухмасштабно сходятся к  $\varphi$  и  $\partial\varphi(x, t)/\partial x + \partial\psi(x, t, y)/\partial y$ , соответственно.

**Замечание 2.** Пусть  $\sigma \in L^\infty(Y)$ . Продолжим  $\sigma$  из  $Y$  на все пространство  $\mathbb{R}$  периодическим повторением. Пусть  $\sigma^\varepsilon(x) = \sigma\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ ,  $x \in (0, 1)$ , и последовательность  $\{\varphi^\varepsilon\} \subset L^2(Q)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  двухмасштабно сходится к некоторому пределу  $\varphi \in L^2(Q \times Y)$ . Из определения 2 и теоремы 2-сc легко видеть, что последовательность  $\{\sigma^\varepsilon\varphi^\varepsilon\}$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  двухмасштабно сходится к пределу  $\sigma(y)\varphi(x, t, y)$ .

**Замечание 3.** Если последовательность  $\{\varphi^\varepsilon\}$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  двухмасштабно сходится к пределу  $\varphi(x, y)$ , то она очевидно сходится слабо к пределу  $\bar{\varphi}(x) = \int_Y \varphi(x, y)dy$ .

Завершая этот параграф, заметим, что предельные соотношения (8b)–(8c) для начальных данных задачи (5) понимаются в смысле версии определения 2, в которой на месте  $Q$  стоит  $\Omega = (0, 1)$  и не фигурирует переменная  $t$ . Для примера возьмём в (5d) начальные данные

$$u_0^\varepsilon(x) = u_0^*(x) + \varepsilon U_*\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right), \quad v_0^\varepsilon(x) = V_*\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right), \quad \tau_0^\varepsilon(x) = \Theta_*\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right),$$

в которых  $u_0^* \in H_0^1(0, 1)$ ,  $U_* \in C^1([0, 1]; C_{\#}^1(Y))$ ,  $V_*, \Theta_* \in L^2(0, 1; C_{\#}^1(Y))$  — заданные функции. В силу теоремы 2-сc и замечания 2 очевидно, что для таких  $u_0^\varepsilon$ ,  $v_0^\varepsilon$  и  $\tau_0^\varepsilon$  предельные соотношения (8) выполняются с предельными функциями  $u_0 = u_0^* = u_0^*(x)$ ,  $U_0 = U_* = U_*(x, y)$ ,  $V_0 = V_* = V_*(x, y)$  и  $\Theta_0 = \Theta_* = \Theta_*(x, y)$ .

## 6. Предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$

Основным результатом этого параграфа является теорема о предельном переходе в задаче (5) при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Для того, чтобы сформулировать эту теорему и предельную модель, введём одно дополнительное обозначение: через  $\langle \dots \rangle_Y$  обозначим среднее по периоду  $Y = (0, 1)$  от всевозможных 1-периодических функций  $\phi = \phi(y)$ :

$$\langle \phi \rangle_Y = \int_Y \phi(y)dy.$$

**Теорема 3. (О предельном переходе при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .)** Существуют последовательность  $\{(u^\varepsilon, \tau^\varepsilon)\}_{\varepsilon \rightarrow 0}$  слабых обобщённых решений задачи (5) и четвёрка предельных функций  $u_* \in L^2(0, T; H_0^1(0, 1))$ ,  $\tau_* \in L^2(0, T; H_0^1(0, 1))$ ,  $U \in L^2(Q; H_{\#}^1(Y))$ ,  $\Theta \in L^2(Q; H_{\#}^1(Y))$ , такие, что

$$u^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} u_*, \quad \tau^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \tau_* \quad \text{слабо в } L^2(0, T; H_0^1(0, 1)), \quad (15a)$$

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial u_*}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \frac{\partial \tau^\varepsilon}{\partial x} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial \tau_*}{\partial x} + \frac{\partial \Theta}{\partial y} \quad \text{двухмасштабно}, \quad (15b)$$

и четвёрка функций  $(u_*, \tau_*, U, \Theta)$  служит решением нижеследующей двухмасштабной усреднённой модели 2-сc.

**Модель 2-сc. (Двухмасштабная усреднённая модель.)** Требуется найти макроскопические поля смещений  $u_* = u_*(x, t)$  и температуры  $\tau_* = \tau_*(x, t)$  и двухмасштабные поля



смещений  $U = U(x, y, t)$  и температуры  $\Theta = \Theta(x, y, t)$ , удовлетворяющие условиям регулярности

$$\begin{aligned} u_* \in L^2(0, T; H_0^1(0, 1)), \quad \frac{\partial u_*}{\partial t} \in L^2(0, T; H_0^1(0, 1)), \quad \tau_* \in L^2(0, T; H_0^1(0, 1)), \\ U \in L^2(Q; H_{\#}^1(Y)), \quad \frac{\partial U}{\partial t} \in L^2(Q; H_{\#}^1(Y)), \quad \Theta \in L^2(Q; H_{\#}^1(Y)), \end{aligned}$$

интегральному двухмасштабному уравнению баланса количества движения

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \int_0^1 \langle \rho \rangle_Y \frac{\partial u_*}{\partial t} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} dx dt \\ & + \int_0^T \int_0^1 \int_Y a(y) \left( \frac{\partial u_*}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} - \alpha(y) \tau_* \right) \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right) dy dx dt \\ & - \int_0^1 \langle \rho(\cdot) V_0(x, \cdot) \rangle_Y \varphi_1(x, 0) dx = \int_0^T \int_0^1 \langle f(x, \cdot) \rangle_Y \varphi_1 dx dt \end{aligned} \quad (16a)$$

для всевозможных пробных функций  $\varphi_1 = \varphi_1(x, t)$  и  $\varphi_2 = \varphi_2(x, y, t)$ , таких, что  $\varphi_1 \in C^1(\bar{Q})$ ,  $\varphi_2 \in L^2(Q; C_{\#}^1(Y))$ ,  $\varphi_1|_{x=0} = \varphi_1|_{x=1} = 0$  и  $\varphi_1|_{t=T} = 0$ , и интегральному двухмасштабному уравнению баланса тепла

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \int_0^1 \langle \beta \rangle_Y \tau_* \frac{\partial \psi_1}{\partial t} dx dt + \int_0^T \int_0^1 \int_Y \lambda(y) \left( \frac{\partial \tau_*}{\partial x} + \frac{\partial \Theta}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \right) dy dx dt \\ & - \int_0^T \int_0^1 \int_Y a(y) \alpha(y) \left( \frac{\partial u_*}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \right) \frac{\partial \psi_1}{\partial t} dy dx dt \\ & - \int_0^1 \int_Y a(y) \alpha(y) \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial U_0}{\partial y} \right) \psi_1(x, 0) dy dx \\ & - \int_0^1 \langle \beta(\cdot) \Theta_0(x, \cdot) \rangle_Y \psi_1(x, 0) dx = \int_0^T \int_0^1 \langle g(x, \cdot) \rangle_Y \psi_1 dx dt \end{aligned} \quad (16b)$$

для всевозможных пробных функций  $\psi_1 = \psi_1(x, t)$  и  $\psi_2 = \psi_2(x, y, t)$ , таких, что  $\psi_1 \in C^1(\bar{Q})$ ,  $\psi_2 \in L^2(Q; C_{\#}^1(Y))$ ,  $\psi_1|_{x=0} = \psi_1|_{x=1} = 0$  и  $\psi_1|_{t=T} = 0$ .  $\blacktriangle$

*Доказательство теоремы 3.* Предельные соотношения (15) сразу следуют из теоремы 2-sc в силу равномерных оценок (11).

Далее, подставляем в интегральное равенство (9) значение  $t_* = T$  и пробную функцию

$$\varphi = \varphi_\varepsilon(x, t) = \varphi_1(x, t) + \varepsilon \varphi_2\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, t\right)$$

и в интегральное равенство (10) — значение  $t_* = T$  и пробную функцию

$$\psi = \psi_\varepsilon(x, t) = \psi_1(x, t) + \varepsilon \psi_2\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, t\right),$$

где  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\psi_1$  и  $\psi_2$  имеют те же свойства, что и в формулировке модели 2-sc. После этого переходим к пределу в этих интегральных равенствах при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , используя слабые и двухмасштабные предельные соотношения (15). Этим самым выводим интегральные равенства (16). Теорема 3 доказана.  $\square$

## 7. Асимптотическая декомпозиция

В модели 2-sc проведём *асимптотическую декомпозицию* — разделение микроскопического и макроскопического масштабов.

В (16a) берём  $\varphi_1 = 0$  и  $\varphi_2 := \varphi_{21}(x, t)\varphi_{22}(y)$ , где  $\varphi_{21} \in L^2(Q)$  и  $\varphi_{22} \in C_{\#}^1(Y)$  — произвольные пробные функции, и в силу произвольности  $\varphi_{21}$  приходим к интегральному уравнению

$$\int_Y a(y) \left( \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial u_*}{\partial x} - \alpha(y)\tau_* \right) \frac{\partial \varphi_{22}(y)}{\partial y} dy = 0 \quad \forall \varphi_{22} \in C_{\#}^1(Y), \quad (17)$$

которое представляет собой вариационную задачу для отыскания функции  $U$  в предположении, что функции  $u_*$  и  $\tau_*$  являются заданными. Переменные  $x$  и  $t$  в эту постановку входят параметрически. В теории гомогенизации эта задача называется *задачей на ячейке*  $Y$ . Уравнение (17) легко интегрируется и мы находим

$$\frac{\partial U(x, y, t)}{\partial y} = \left( \frac{1}{\langle a^{-1} \rangle_Y a(y)} - 1 \right) \left( \frac{\partial u_*(x, t)}{\partial x} - \langle \alpha \rangle_Y \tau_*(x, t) \right). \quad (18)$$

В (16b) берём  $\psi_1 = 0$  и  $\psi_2 := \psi_{21}(x, t)\psi_{22}(y)$ , где  $\psi_{21} \in L^2(Q)$  и  $\psi_{22} \in C_{\#}^1(Y)$  — произвольные пробные функции, и в силу произвольности  $\psi_{21}$  приходим к интегральному уравнению

$$\int_Y \lambda(y) \left( \frac{\partial \Theta}{\partial y} + \frac{\partial \tau_*}{\partial x} \right) \frac{\partial \psi_{22}(y)}{\partial y} dy = 0 \quad \forall \psi_{22} \in C_{\#}^1(Y), \quad (19)$$

которое представляет собой вариационную задачу на ячейке  $Y$  для отыскания функции  $\Theta$  в предположении, что функция  $\tau_*$  является заданной. Интегрируя (19), мы легко находим

$$\frac{\partial \Theta(x, y, t)}{\partial y} = \left( \frac{1}{\langle \lambda^{-1} \rangle_Y \lambda(y)} - 1 \right) \frac{\partial \tau_*(x, t)}{\partial x}. \quad (20)$$

Таким образом, мы полностью решили микроструктуру. Заметим, что нам достаточно было ограничиться нахождением производных  $\partial U/\partial y$  и  $\partial \Theta/\partial y$ , поскольку именно они, а не сами функции  $U$  и  $\Theta$ , входят в двухмасштабные уравнения (16a) и (16b). Теперь, используя решение микроструктуры, выводим макроскопические уравнения для  $u_*$  и  $\tau_*$  и как результат формулируем предельную эффективную макроскопическую модель.

В (16a) берём  $\varphi_2 = 0$  и подставляем представление для  $\partial U/\partial y$  из (18) и  $\partial \Theta/\partial y$  из (20). После элементарных упрощений выводим интегральное равенство

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \int_0^1 \langle \rho \rangle_Y \frac{\partial u_*}{\partial t} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} dx dt + \int_0^T \int_0^1 \langle a^{-1} \rangle_Y^{-1} \left( \frac{\partial u_*}{\partial x} - \langle \alpha \rangle_Y \tau_* \right) \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} dx dt \\ & - \int_0^1 \langle \rho(\cdot) V_0(x, \cdot) \rangle_Y \varphi_1(x, 0) dx = \int_0^T \int_0^1 \langle f(x, \cdot) \rangle_Y \varphi_1 dx dt, \end{aligned} \quad (21)$$

выполняющееся для всевозможных пробных функций  $\varphi_1 = \varphi_1(x, t)$ , таких, что  $\varphi_1 \in C^1(\bar{Q})$ ,  $\varphi_1|_{x=0} = \varphi_1|_{x=1} = 0$  и  $\varphi_1|_{t=T} = 0$ .

В (16b) берём  $\psi_2 = 0$  и подставляем представление для  $\partial U/\partial y$  из (18) и  $\partial \Theta/\partial y$  из (20). После элементарных упрощений выводим интегральное равенство

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \int_0^1 \langle \beta \rangle_Y \tau_* \frac{\partial \psi_1}{\partial t} dx dt + \int_0^T \int_0^1 \langle \lambda^{-1} \rangle_Y^{-1} \frac{\partial \tau_*}{\partial x} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} dx dt \\ & - \int_0^T \int_0^1 \left[ \langle a^{-1} \rangle_Y^{-1} \langle \alpha \rangle_Y \frac{\partial u_*}{\partial x} + \langle a \alpha^2 \rangle_Y - \langle a^{-1} \rangle_Y^{-1} \langle \alpha \rangle_Y^2 \right] \tau_* \frac{\partial \psi_1}{\partial t} dx dt \\ & - \int_0^1 \left( \langle a \alpha \rangle_Y \frac{\partial u_0}{\partial x} + \langle a(\cdot) \alpha(\cdot) \frac{\partial U_0}{\partial y}(x, \cdot) \rangle_Y \right) \psi_1(x, 0) dx \\ & - \int_0^1 \langle \beta(\cdot) \Theta_0(x, \cdot) \rangle_Y \psi_1(x, 0) dx = \int_0^T \int_0^1 \langle g(x, \cdot) \rangle_Y \psi_1 dx dt, \end{aligned} \quad (22)$$

выполняющееся для всевозможных пробных функций  $\psi_1 = \psi_1(x, t)$ , таких, что  $\psi_1 \in C^1(\bar{Q})$ ,  $\psi_1|_{x=0} = \psi_1|_{x=1} = 0$  и  $\psi_1|_{t=T} = 0$ .

Заметим, что интегральные равенства (21) и (22) в качестве искомого содержат только функции  $u_*$  и  $\tau_*$  и что микроскопическая переменная  $y$  сублимирована в коэффициентах в подынтегральных выражениях. Таким образом, мы полностью разделили масштабы в модели 2-с. Главными результатами проведённых в этом и предыдущем параграфах процедур гомогенизации и асимптотической декомпозиции являются постановка усреднённой эффективной нестационарной модели антиплоского сдвига слоистого композита и обоснование теоремы о сходимости последовательности слабых обобщённых решений задачи (5) к слабому обобщённому решению усреднённой задачи. Изложим эти постановку и теорему в следующем параграфе.

## 8. Усреднённая эффективная модель

В §§ 6-7 в итоге установлен следующий результат.

**Теорема 4.** В семействе слабых обобщённых решений задачи (5) существует последовательность  $\{(u^\varepsilon, \tau^\varepsilon)\}_{\varepsilon \rightarrow 0}$ , слабо сходящаяся в  $L^2(0, T; H_0^1(0, 1)) \times L^2(0, T; H_0^1(0, 1))$  к слабому обобщённому решению  $(u_*, \tau_*)$  нижеследующей модели Н — усреднённой эффективной нестационарной модели антиплоского сдвига слоистого композита.

**Модель Н.** В пространственно-временном прямоугольнике  $Q = (0, 1) \times (0, T)$  требуется определить макроскопические поля смещений  $u_* = u_*(x, t)$  и температуры  $\tau_* = \tau_*(x, t)$ , удовлетворяющие эффективному уравнению баланса количества движения

$$\langle \rho \rangle_Y \frac{\partial^2 u_*}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \langle a^{-1} \rangle_Y^{-1} \frac{\partial u_*}{\partial x} - \langle a^{-1} \rangle_Y^{-1} \langle \alpha \rangle_Y \tau_* \right) + \langle f \rangle_Y, \quad (x, t) \in Q, \quad (23a)$$

эффективному уравнению баланса тепла

$$\left( \langle \beta \rangle_Y + \langle a \alpha^2 \rangle_Y - \langle a^{-1} \rangle_Y^{-1} \langle \alpha \rangle_Y^2 \right) \frac{\partial \tau_*}{\partial t} = \langle \lambda^{-1} \rangle_Y^{-1} \frac{\partial^2 \tau_*}{\partial x^2} - \langle a^{-1} \rangle_Y^{-1} \langle \alpha \rangle_Y \frac{\partial^2 u_*}{\partial t \partial x} + \langle g \rangle_Y, \quad (x, t) \in Q, \quad (23b)$$

однородным граничным условиям

$$u_*(0, t) = 0, \quad u_*(1, t) = 0, \quad \tau_*(0, t) = 0, \quad \tau_*(1, t) = 0 \quad (23c)$$

и начальным условиям

$$u_*(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u_*}{\partial t}(x, 0) = \langle \rho \rangle_Y^{-1} \langle \rho V_0(x, \cdot) \rangle_Y, \quad (23d)$$

$$\tau_*(x, 0) = \frac{\langle \beta \Theta_0(x, \cdot) \rangle_Y + \left( \langle a \alpha \rangle_Y - \langle a^{-1} \rangle_Y^{-1} \langle \alpha \rangle_Y \right) \frac{\partial u_0(x)}{\partial x} + \left\langle a \alpha \frac{\partial U_0(x, \cdot)}{\partial y} \right\rangle_Y}{\langle \beta \rangle_Y + \langle a \alpha^2 \rangle_Y - \langle a^{-1} \rangle_Y^{-1} \langle \alpha \rangle_Y^2}, \quad (23e)$$

$x \in (0, 1). \quad \blacktriangle$

Формулировка модели Н основана на том, что в смысле распределений система двух интегральных равенств (21) и (22) эквивалентна системе, состоящей из дифференциальных уравнений (23a) и (23b) и начальных условий (23d) и (23e). Соответственно, слабое обобщённое решение задачи Н понимается в следующем смысле.

**Определение 3.** Пара функций  $(u_*, \tau_*)$  называется слабым обобщённым решением задачи Н, если эти функции удовлетворяют

1) требованиям регулярности

$$u_* \in L^2(0, T; H_0^1(0, 1)), \quad \frac{\partial u_*}{\partial t} \in L^2(0, T; H_0^1(0, 1)), \quad \tau_* \in L^2(0, T; H_0^1(0, 1));$$

2) интегральным равенствам (21) и (22) для всевозможных функций  $\varphi_1$  и  $\psi_1$  из указанных для этих равенств функциональных классов.

**Замечание 4.** Постоянный эффективный коэффициент объёмной удельной теплоёмкости  $\beta_{eff} = \langle \beta \rangle_Y + \langle a\alpha^2 \rangle_Y - \langle a^{-1} \rangle_Y^{-1} \langle \alpha \rangle_Y^2$  строго положителен, поскольку  $\langle \beta \rangle_Y > 0$  в силу (6) и  $\langle a\alpha^2 \rangle_Y - \langle a^{-1} \rangle_Y^{-1} \langle \alpha \rangle_Y^2 \geq 0$  тоже в силу (6) и вследствие неравенства Коши – Буняковского. Также очевидно строго положительны постоянная средняя плотность  $\langle \rho \rangle_Y$  и постоянные эффективные коэффициенты упругости  $\langle a^{-1} \rangle_Y^{-1}$  и теплопроводности  $\langle \lambda^{-1} \rangle_Y^{-1}$ .

В силу этого справедливо утверждение о единственности слабого обобщённого решения задачи Н. Доказывается оно точно так же, как утверждение единственности слабого обобщённого решения задачи (5) (при фиксированном  $\varepsilon$ ).

Соответственно, семейство  $(u^\varepsilon, \tau^\varepsilon)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  имеет единственную предельную точку  $(u_*, \tau_*)$ , и эта точка служит слабым обобщённым решением задачи Н.

## Список литературы

1. Купрадзе В.Д., Гегелиа Т.Г., Башелейшвили М.О., Бурчуладзе Т.В. Трёхмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. — М. : Наука, 1976. — (eBook ISBN: 9780080984636).
2. Francfort G. Pseudospherical surfaces and some problems of mathematical physics // Homogenization and linear thermoelasticity. — 1983. — Vol. 14, no. 4. — P. 696–708. — DOI: <https://doi.org/10.1137/0514053>.
3. Meirmanov A.M., Sazhenkov S.A. Generalized solutions to linearized equations of thermoelastic solid and viscous thermofluid // Electronic Journal of Differential Equations. — 2007. — Vol. 2007, no. 41. — P. 1–29. — <https://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2007/41/meirmanov.pdf>.
4. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. — М. : Наука, 1973. — (<https://doi.org/10.1007/978-1-4757-4317-3>).
5. Nguetseng G. A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization // SIAM J. Math. Anal. — 1989. — Vol. 20, no. 3. — P. 608–623. — DOI: <https://doi.org/10.1137/0520043>.
6. Allaire G. Homogenization and two-scale convergence // SIAM J. Math. Anal. — 1992. — Vol. 23, no. 6. — P. 1482–1518. — DOI: <https://doi.org/10.1137/0523084>.