УДК 519.3

О численной реализации метода штрафных функций в решении задач нелинейного программирования

Плотникова Е.А., Саженков А.Н., Саженкова Т.В.

Новосибирский государственный университет, г. Новосибирск

Алтайский государственный университет, г. Барнаул

pselena@gmail.com, sazhenkov_an@mail.ru, t.sazhenkova@gmail.com

Аннотация

В работе применительно к задачам нелинейного программирования исследуется класс функций штрафа, обладающих хорошими дифференциальными свойствами и в то же время приемлемым порядком стремления в бесконечность вне допустимой области. Для решения задач выпуклого программирования с означенным ниже классом штрафных функций имеют место достаточно строгие теоретические обоснования. Для ряда модельных задач осуществлено численное исследование.

Ключевые слова: нелинейное программирование, экстремальные задачи выпуклого программирования, внешние штрафные функции.

В работе рассматривается задача минимизации выпуклой функции f на компакте $D \subset \mathbb{R}^n$, задаваемом системой неравенств $g_j(x) \leq 0$, $j = 1, 2, \ldots, m$, с выпуклыми функциями g_j, в предположении, что существует точка x_0, в которой $g_j(x_0) < 0$ для всех j (не пустая внутренность D).

Теоретическое обоснование полученных результатов исследования базируется на установленных в [1] достаточных условиях сходимости метода штрафных функций, которые сформулированы ниже в виде теорем 1–2.

Теорема 1. *Пусть* $\Phi_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *– выпуклые функции,*

1. $\lim\limits_{k\to\infty} \Phi_k(x) = 0$ *при* $x \in int\, D$;
2. $\lim\limits_{k\to\infty} \Phi_k(x) = +\infty$ *при* $x \notin D$.

Тогда, начиная с некоторого номера K*, функции* $F_k(x) = f(x) + \Phi_k(x)$ *достигают своего безусловного минимума, последовательность* $\{x^k\}$ *точек минимума функций* $F_k (k \geq K)$ *ограничена, любая ее предельная точка принадлежит множеству* D *и доставляет минимум* f *на* D.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и, кроме того, для граничных точек множества* D

$$\Phi_k(x) \geq C > 0, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Тогда, начиная с некоторого номера K*, точки* x^k *лежат внутри компакта* D.

Далее рассматривается следующая система выпуклых штрафных функций

$$\Phi_k^{(t)}(x) = A_k \sum_{j=1}^{m} \left(g_j(x) + \sqrt{g_j^2(x) + A_k^{-2-t}} \right),$$

где $t \geq 0$ – константа, $A_k > 0$, $A_k \to +\infty$. Данная система удовлетворяет всем условиям теорем 1–2 [2].

В приведённом далее утверждении представляется оценка скорости сходимости метода для данного класса функций штрафа при $t > 0$.

Утверждение 1. *Пусть функции* $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$, $g_j \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $j = 1, 2, \ldots, m$ *– выпуклые,* $(f''(x)h, h) \geq \gamma \|h\|^2$ *при некотором* $\gamma > 0$ *и любых* x *и* h. *Тогда для* $t > 0$ *при применении метода штрафов, с использованием указанных штрафных функций, справедливо неравенство:*

$$\left\|x^k - x^*\right\|^2 \leq \frac{2m}{\gamma} A_k^{-\frac{t}{2}},$$

начиная с некоторого номера K *(*x^* *– точное решение исходной задачи).*

Доказательство. Применяя формулу Тейлора и учитывая, что для точного решения $\nabla f(x^*)(x^k - x^*) \geq 0$, получаем

$$f(x^k) - f(x^*) \geq \nabla f(x^*)(x^k - x^*) + \frac{\gamma}{2}\left\|x^k - x^*\right\|^2 \geq \frac{\gamma}{2}\left\|x^k - x^*\right\|^2,$$

$$f(x^*) + \Phi_k^{(t)}(x^*) \geq f(x^k) + \Phi_k^{(t)}(x^k).$$

Таким образом,

$$\Phi_k^{(t)}(x^*) = f(x^*) + \Phi_k^{(t)}(x^*) - f(x^*) \geq f(x^k) - f(x^*) + \Phi_k^{(t)}(x^k) \geq$$
$$\geq \left(f(x^k) - f(x^*)\right) + \Phi_k^{(t)}(x^k) \geq \Phi_k^{(t)}(x^k) + \frac{\gamma}{2}\left\|x^k - x^*\right\|^2.$$

Значит,

$$\Phi_k^{(t)}(x^*) - \Phi_k^{(t)}(x^k) \geq \Phi_k^{(t)}(x^k) + \frac{\gamma}{2}\left\|x^k - x^*\right\|^2 - \Phi_k^{(t)}(x^k) \geq \frac{\gamma}{2}\left\|x^k - x^*\right\|^2.$$

Поскольку, $\Phi_k^{(t)}(x^k) \geq 0$, выполняется:

$$\Phi_k^{(t)}(x^*) \geq \Phi_k^{(t)}(x^*) - \Phi_k^{(t)}(x^k),$$

$$\Phi_k^{(t)}(x^*) \leq A_k \cdot \sum_{j=1}^{m}\left(-\left|g_j(x^*)\right| + \sqrt{(g_j(x^*))^2} + \sqrt{A_k^{-2-t}}\right) = m \cdot A_k^{-\frac{t}{2}}$$

Окончательно получаем

$$\frac{\gamma}{2}\left\|x^k - x^*\right\|^2 \leq \Phi_k^{(t)}(x^*) - \Phi_k^{(t)}(x^k) \leq \Phi_k^{(t)}(x^*) \leq m \cdot A_k^{-\frac{t}{2}}.$$

Утверждение доказано. □

В приведённом доказательстве предполагается, что задачи на безусловный экстремум функций F_k решаются точно. На практике же задачи на безусловный экстремум тоже решаются приближённо.

Процесс численного решения экстремальных задач методом штрафных функций представляет собой двухступенчатый итерационный процесс. При отыскании решения задачи на безусловный экстремум применяются, как правило, итерационные градиентные методы. Поэтому скорость сходимости композиции методов оценивается числом больших шагов (методом штрафов), каждый из которых состоит из отыскания точки x_ε^k – точки минимума функции $F_k(x) = f(x) + \Phi_k(x)$, полученной градиентным методом с заданной точностью ε.

Численные исследования демонстрируют возможность использования рассматриваемого класса штрафных функций и для задач, не подпадающих строго под описанные выше в утверждении требования. Дальнейшие примеры для численного исследования с указанными функциями штрафа взяты из [3], где их решение осуществлялось с помощью квадратичной и логарифмической функций штрафа.

Получающиеся задачи на безусловный экстремум решались методом наискорейшего спуска с градиентным критерием останова: $\left\| grad\, f(x^{k+1}) \right\| < \varepsilon$, ($\varepsilon = 10^{-6}$).

В примерах t взято равным единице.

Пример 1. *Найти минимум функции* $f(x, y) = -xy$ *при условиях* $x + y^2 - 1 \leq 0$, $-x - y \leq 0$.

Точное решение задачи:

$$(x^*; y^*) = \left(\frac{2}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \approx (0,667; 0,577),$$

$$f^* = -\frac{2\sqrt{3}}{9} \approx -0,3849.$$

Численные результаты с использованием коэффициентов $A_k = k^{k-1}$ представлены в таблице:

k	x	y	$F(x,y)$	$f(x,y)$
1	0,525748	0,509974	0,944355	-0,268118
2	0,435419	0,470846	0,227288	-0,205015
3	0,599608	0,547333	-0,263514	-0,328186
4	0,657058	0,573103	-0,36879	-0,376562
5	0,664966	0,577533	-0,384040	-0,383179
6	0,673607	0,571203	-0,384697	-0,384766
7	0,667040	0,577019	-0,384890	-0,384895

Пример 2. *Найти минимум функции* $f(x, y) = \ln x - y$ *при условиях* $1 - x \leq 0$, $x^2 + y^2 - 4 = 0$.

Точное оптимальное решение задачи:

$$(x^*; y^*) = (1; \sqrt{3}), \quad f^* = -\sqrt{3} \approx -1,7321.$$

Здесь получены следующие численные результаты с использованием коэффициентов $A_k = 2^{k-1}$:

k	x	y	$F(x,y)$	$f(x,y)$
4	1,059744	1,696395	-0,814586	-1,638386
5	1,032600	1,712857	-1,123939	-1,680777
6	1,016953	1,722159	-1,323716	-1,705348
7	1,008632	1,727039	-1,454479	-1,718444
8	1,004352	1,729531	-1,541443	-1,725188
9	1,002180	1,730791	-1,600124	-1,728614
10	1,001087	1,731423	–1,640196	–1,730336
11	1,000536	1,731741	-1,667816	-1,731205
15	1,000020	1,732040	-1,716300	-1,732020

Полученные результаты решения примеров 1 и 2 наглядно демонстрируют сходимость последовательных приближений к точному решению.

Пример 3. *Найти минимум функции* $f(x, y) = e^{x^2 + 5y^2} + x^2 + 80y^2$ *при условиях* $x + 2y^2 - 1 \leq 0$, $x^2 + y^2 - 4x + 1 \leq 0$, $x^2 + y^2 - x - y \leq 0$.

Приближённые вычисления с коэффициентами $A_k = 2^{k-1}$ дают следующие результаты:

k	x	y	$F(x,y)$	$f(x,y)$
1	0,39028	0,00434	3,33818	1,31846
2	0,38258	0,00498	2,14385	1,30612
3	0,34261	0,00284	1,53453	1,24262
4	0,30892	0,00096	1,29738	1,19564
5	0,28934	0,00027	1,20950	1,17104
6	0,27890	0,00007	1,17462	1,15868
7	0,27350	0,00002	1,15960	1,15247
8	0,27074	0,00000	1,15271	1,14936
9	0,26935	0,00000	1,14924	1,14780

Расчёты этого примера для оценивания отклонений приближённых решений осуществлялись с $\varepsilon = 10^{-5}$.

Список литературы

1. Каплан А.А. Характеристические свойства функций штрафа // Докл. АН СССР. — 1973. — Т. 210, № 5. — С. 1018–1021.

2. Гроссман К., Каплан А.А. Нелинейное программирование на основе безусловной минимизации. — Новосибирск : Наука, 1981. — 183 с.

3. Фиакко А., Мак-Кормик Г. Нелинейное программирование. Методы последовательной безусловной минимизации. — М. : Мир, 1972. — 240 с.