

Вычисление собственных частот колебаний упругой балки¹

Валяев К.Е., Сибирякова Т.А., Найденова К.Е.

Алтайский государственный университет, г. Барнаул

kirill.valyaev1999@gmail.ru, sibiryakova.tatiana@mail.ru, kristina-akulova00@mail.ru

Аннотация

В работе исследуются колебания упругой балки с переменной толщиной, находящейся в полном контакте с жидкостью (гидроупругие колебания) или при отсутствии жидкости (упругие колебания). Гидроупругие и упругие прогибы балки являются двумерными. Задача рассматривается без демпфирования колебаний и внешнего воздействия. Упругая балка тонкая, конечной длины, и с заданными краевыми условиями. Вычислены моды упругих и гидроупругих колебаний балки в случае линейной и кусочно-линейной толщины.

Ключевые слова: прогибы балки, периодические колебания, собственные частоты балки, собственные моды балки.

1. Постановка задачи для балки с постоянной толщиной

Рассматривается упругая балка переменной толщины $h'(x')$, помещенная на поверхность невязкой и несжимаемой жидкости бесконечной глубины. Штрих здесь обозначает размерные переменные. Длина балки $2L$ намного больше толщины балки h' . В состоянии покоя свободная поверхность жидкости плоская и горизонтальная. Балка плавает на поверхности жидкости, причем ее осадка меньше толщины балки. Течение и прогиб балки $w'(x', t')$ описываются в декартовой системе координат $Ox'y'$. Линия $y' = 0$ соответствует положению равновесия свободной поверхности жидкости. Центр системы координат находится в центре балки. Положение балки аппроксимируется в главном приближении интервалом $y' = 0$, $-L < x' < L$. Края балки свободны от изгибных моментов, $M'(\pm L, t') = 0$, и перерезывающих сил, $V'(\pm L, t') = 0$, где

$$\begin{aligned} M'(x', t') &= D' x' \frac{\partial^2 w'}{\partial x'^2}, \\ V'(x', t') &= \frac{\partial M'}{\partial x'}, \quad D'(x') = \frac{E h'^3(x')}{12(1 - \nu^2)} \end{aligned} \quad (1)$$

изгибный момент, перерезывающая сила и коэффициент жесткости вдоль балки соответственно, E – модуль Юнга и ν – коэффициент Пуассона материала балки. Прогиб балки, $w'(x', t')$, описывается уравнением балки Эйлера [1],

$$m'(x') \frac{\partial^2 w'}{\partial t'^2} + \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \left(D'(x') \frac{\partial^2 w'}{\partial x'^2} \right) = p'(x', 0, t') \quad (-L < x' < L,) \quad (2)$$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (грант № 23-71-01096).

с краевыми условиями,

$$D'(x') \frac{\partial^2 w'}{\partial x'^2} = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \left(D'(x') \frac{\partial^2 w'}{\partial x'^2} \right) = 0 \quad (x' = \pm L,) \quad (3)$$

где $m'(x') = \rho_p h'(x')$ – масса балки на единицу площади, ρ_p – плотность материала балки, а $p'(x', 0, t')$ – гидродинамическое давление, действующее на смачиваемую поверхность балки. В рамках линейной теории гидроупругости гидродинамическое давление задается линейризованным уравнением Бернулли, $p'(x', y', t') = -\rho \partial \varphi' / \partial t$, где ρ – плотность жидкости, а $\varphi'(x', y', t')$ – потенциал скорости, который является решением следующей краевой задачи

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi' &= 0 \quad (y' = 0), \\ \varphi'(x', 0, t') &= 0 \quad (y' = 0, |x'| > L), \\ \frac{\partial \varphi'}{\partial y'}(x', 0, t') &= \frac{\partial w'}{\partial t'}(x', t') \quad (y' = 0, |x'| < L), \\ \varphi' &\rightarrow 0 \quad (x'^2 + y'^2 \rightarrow \infty). \end{aligned} \quad (4)$$

В данной формулировке начальные условия не требуются. Мы определим периодические во времени решения связанной задачи (1)–(4)

$$\omega'(x', t') = W'(x') \cos(\omega t'), \quad \varphi(x', y', t') = -\Phi'(x', y') \sin(\omega t'), \quad (5)$$

и соответствующие частоты ω . В данной постановке отсутствуют внешние силы. Ненулевые вещественные решения такой спектральной задачи называются мокрые моды балки.

Задача решается в безразмерных переменных $x' = Lx$, $y' = Ly$, $t' = \frac{t}{\omega}$, $W' = W_{sc} W(x)$, $\Phi' = \omega w_{sc} L \Phi(x, y)$. Кроме того, $h'(x') = h_c h(x)$, где h_c – средняя толщина балки,

$$h_c = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L h'(x') dx', \quad \int_{-1}^1 h(x) dx = 2. \quad (6)$$

Связная задача (1)–(5) в безразмерных переменных имеет вид

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(h^3(x) \frac{d^2 W}{dx^2} \right) = \Omega [\alpha h(x) W + \Phi(x, 0)] \quad (x < 1), \quad (7)$$

$$\frac{d^2 W}{dx^2} = \frac{d^3 W}{dx^3} = 0 \quad (x = \pm 1),$$

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (y < 0),$$

$$\Phi = 0 \quad (y = 0, |x| > 1), \quad \Phi_y = W(x) \quad (y = 0, |x| < 1), \quad (8)$$

где $\alpha = (\rho_p h_c) / (\rho L)$, $\Omega = \rho L^5 \omega^2 / D_c$ и $D_c = E h_c^3 / [12(1 - \nu^2)]$. Существуют два «статических» ненулевых решения задачи на собственные значения (7)–(8), $W_1(x) = C_1$ и $W_2(x) = C_2 x$, где C_1 и C_2 – любые константы, соответствующие собственным значениям $\Omega_1 = \Omega_2 = 0$. Другие решения $W_k(x)$ соответствуют $\Omega_k > 0$. Решения $W_k(x)$ называются мокрыми жесткими ($k = 1, 2$) и упругими ($k > 3$) модами плавающей балки в безразмерных переменных. Эти моды не нормированы и не ортогональны в стандартном смысле. Размерные частоты мокрых упругих мод определяются формулой $\omega_k = [\Omega_k D_c / (\rho L^5)]^{\frac{1}{2}}$.

Ненулевыми решениями краевой задачи (5) с $\Phi(x, 0) = 0$ являются сухие моды $\psi_n(x)$. Сухие моды являются решениями спектральной задачи

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(h^3(x) \frac{d^2 \psi_n}{dx^2} \right) = \lambda_n^4 h(x) \psi_n \quad (x < 1), \quad \frac{d^2 \psi_n}{dx^2} = \frac{d^3 \psi_n}{dx^3} = 0 \quad (x = \pm 1), \quad (9)$$

где λ_n – спектральный параметр, $n > 1$. Сухие моды $\psi_n(x)$ ортогональны и нормированы с весом, где в качестве весовой функции выступает толщина балки

$$\int_{-1}^1 h(x) \psi_n(x) \psi_m(x) dx = \delta_{nm}, \quad (10)$$

где $\delta_{nn} = 1$ и $\delta_{nm} = 0$ для $n \neq m$. Существуют две моды, $\psi_1(x) = 1/\sqrt{2}$ и $\psi_2(x) = a(x - c)$, которые удовлетворяют (9), ортонормальны и соответствуют $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, они являются жесткими модами сухой свободной балки с коэффициентами

$$c = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x h(x) dx, \quad a = \left(\int_{-1}^1 x^2 h(x) dx - 2c^2 \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (11)$$

Сухие безразмерные упругие моды, $\psi_n(x)$, $n > 3$, и соответствующие собственные значения λ_n зависят от толщины балки $h(x)$.

Задача (9) может быть решена аналитически для балки с линейной толщиной, см. рисунок 1.

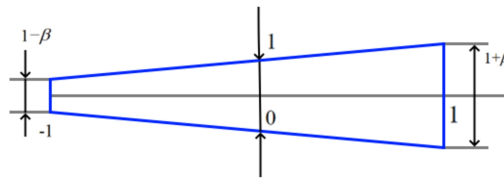


Рисунок 1. Упругая балка с линейной толщиной в безразмерных переменных

2. Сухие моды упругой балки с линейной толщиной

Общее решение дифференциального уравнения (9) с $h(x) = 1 + \beta x$, $|\beta| < 1$, определяется через функции Бесселя [2, 3],

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\xi} M_n(\xi), \quad \xi = \frac{2}{\beta} \lambda_n \sqrt{1 + \beta x}, \quad (12)$$

$$M_n(\xi) = A_n J_1(\xi) + B_n Y_1(\xi) + C_n I_1(\xi) + D_n K_1(\xi),$$

где $J_1(\xi)$ и $Y_1(\xi)$ – функции Бесселя первого и второго порядка соответственно, а $I_1(\xi)$ и $K_1(\xi)$ – модифицированные функции Бесселя первого и второго порядка соответственно. Краевые условия свободного края в (9) записываются в терминах функции $M_n(\xi)$ как

$$\xi \frac{d^3 M_n}{d\xi^3} = \frac{d^2 M_n}{d\xi^2}, \quad \frac{1}{3} \xi \frac{d^2 M_n}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} M_n = \frac{dM_n}{d\xi} \quad (\xi_n^\pm),$$

где $\xi_n^\pm = 2\lambda_n\sqrt{1 \pm \beta}/\beta$. Для коэффициентов A_n, B_n, C_n, D_n получаются следующие четыре уравнения из краевых условий

$$A_n \left\{ \left(\frac{8}{\xi^2} - 3 \right) J_1(\xi) + \left(\xi - \frac{4}{\xi} \right) J_0(\xi) \right\} + B_n \left\{ \left(\frac{8}{\xi^2} - 3 \right) Y_1(\xi) + \left(\xi - \frac{4}{\xi} \right) Y_0(\xi) \right\} +$$

$$+ C_n \left\{ \left(\frac{8}{\xi^2} + 3 \right) I_1(\xi) + \left(\xi + \frac{4}{\xi} \right) I_0(\xi) \right\} +$$

$$+ D_n \left\{ \left(\frac{8}{\xi^2} + 3 \right) K_1(\xi) + \left(\xi + \frac{4}{\xi} \right) K_0(\xi) \right\} = 0, \quad (13)$$

$$A_n \left\{ \left(2 - \frac{\xi^2}{4} \right) J_1(\xi) - \xi J_0(\xi) \right\} + B_n \left\{ \left(2 - \frac{\xi^2}{4} \right) Y_1(\xi) - \xi Y_0(\xi) \right\} +$$

$$+ C_n \left\{ \left(2 + \frac{\xi^2}{4} \right) I_1(\xi) - \xi I_0(\xi) \right\} + D_n \left\{ \left(2 - \frac{\xi^2}{4} \right) K_1(\xi) - \xi K_0(\xi) \right\} = 0,$$

где $\xi = \xi_n^\pm$. Ненулевые решения однородной системы (13) существуют только в том случае, если определитель системы равен нулю, что дает дисперсионное уравнение относительно λ_n как функции параметра β , описывающего тангенс угла наклона толщины балки в безразмерных переменных. Решение системы (13) определено до постоянного множителя, который получается с помощью условия нормировки (10). Такие интегралы могут быть вычислены аналитически [4].

Уравнения (11) дают параметры второй жесткой сухой моды $\psi_2(x)$ для линейной толщины балки, $c = \beta/3$ и $a = 3/\sqrt{2(3 - \beta^2)}$. Ожидается, что $\lambda_n(\beta) \rightarrow \bar{\lambda}_n$ и $\psi_n(x) \rightarrow \bar{\psi}_n(x)$, $n \geq 3$, при $\beta \rightarrow 0$, где $\bar{\psi}_n(x)$ – решения следующей спектральной задачи для упругой балки постоянной толщины с соответствующими собственными значениями $\bar{\lambda}_n$

$$\frac{d^4\psi_n}{dx^4} = \lambda_n^4\psi_n \quad (|x| < 1), \quad \frac{d^2\psi_n}{dx^2} = \frac{d^3\psi_n}{dx^3} = 0 \quad (x = \pm 1).$$

Сухие моды $\psi_n(x)$ для $n = 3, 4, 5, 6$ и $\beta = 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1.0$ показаны на рисунке 2. Можно видеть сходимость упругих мод к $\bar{\psi}_n(x)$ при $\beta \rightarrow 0$.

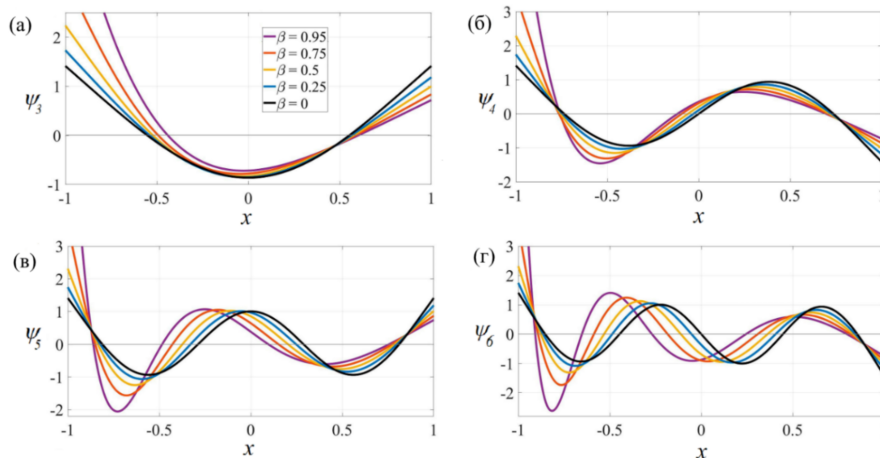


Рисунок 2. Сухие упругие моды, $n = 3, 4, 5, 6$ для значений $\beta = 0, 0.25, 0.5, 0.75, 0.95$

Отношения частот сухих мод балки с линейной толщиной, $\omega_n^{(d)}(\beta)$, и балки с постоянной средней толщиной $h_c, \bar{\omega}_n^{(d)}$, которые равны $\lambda_n^2(\beta)/\bar{\lambda}_n^2$, как функции параметра β ,

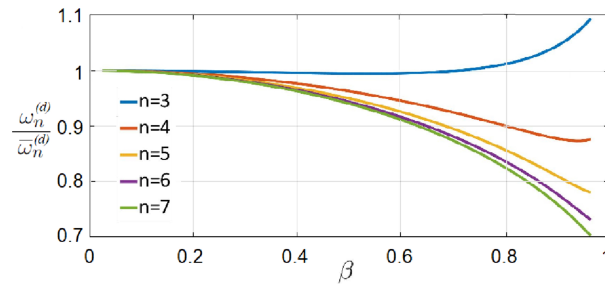


Рисунок 3. Отношения частот сухих мод для балки с линейной толщиной и для балки с постоянной средней толщиной как функции параметра β

показаны на рисунке 3 для $3 \leq n \leq 7$. Видно, что частоты всех мод, кроме $n = 3$, ниже частот балки с постоянной средней толщиной.

Для упрощения расчетов балки с линейной толщиной, сухие моды с переменной толщиной $\psi_n(x)$ представляются как суперпозиция сухих мод с постоянной толщиной

$$\psi_n(x) = \sum_{k=1}^{k_{\max}} C_{nk} \bar{\psi}_k(x). \quad (14)$$

Коэффициенты C_{nk} рассчитываются численно по формуле

$$C_{nk} = \int_{-1}^1 \psi_n(x) \bar{\psi}_k(x) dx, \quad (15)$$

где использовалось условие ортогональности (10). Приближенные значения $\psi_n(x)$ для $n = 3$ и $n = 4$ с различным числом мод $\bar{\psi}_k(x)$ показаны на рисунке 4 (а) и (б) соответственно. На рисунке 4 (в) и (г) показана максимальная разница,

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} \left| \psi_n(x) - \sum_{k=1}^{k_{\max}} C_{nk} \bar{\psi}_k(x) \right|, \quad (16)$$

в зависимости от k_{\max} , где k_{\max} – число членов, сохраняемых в ряду (14). Видно, что аппроксимация упругих мод балки с линейной толщиной (14) с $k_{\max} = 40$ является точной даже для больших значений параметра β . Необходимое число k_{\max} слагаемых в (14) увеличивается с ростом номера моды n .

3. Мокрые моды упругих балок с линейной толщиной

Мокрые жесткие моды, $W_1(x) = 1/\sqrt{2}$ и $W_2(x) = a(x - c)$, где $c = \beta/3$ и $a = 3/\sqrt{2}(3 - \beta^2)$, и их частоты, $\omega_1 = \omega_2 = 0$, такие же, как и для сухой балки с той же толщиной. Мокрые упругие моды $W_k(x)$, $k > 3$, ищутся как суперпозиция

$$W_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} W_{kn} \psi_n(x), \quad (17)$$

с коэффициентами W_{kn} и собственными значениями Ω_k , которые необходимо определить. Подставляя ряд (17) в уравнение балки (7), используя дифференциальное уравнение (9) для сухих мод, умножая обе стороны полученного уравнения на $\psi_m(x)$, и интегрируя по

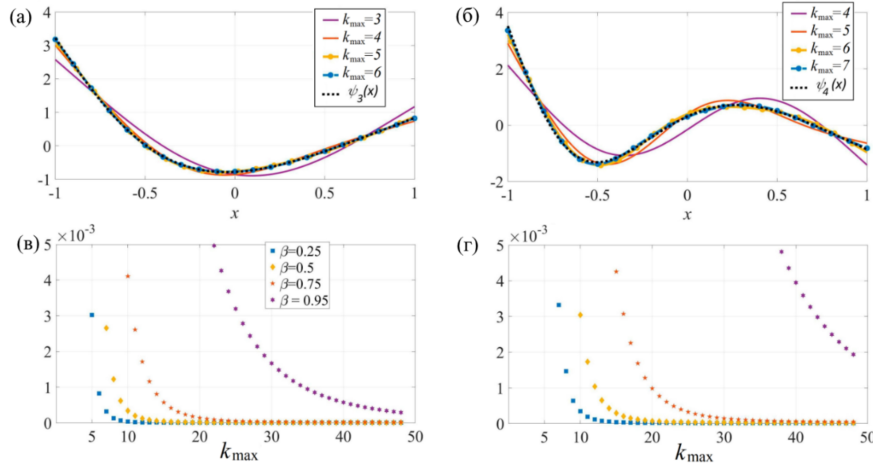


Рисунок 4. Аппроксимации сухих мод $\psi_n(x)$ балки с линейной толщиной для $n = 3$ (а) и $n = 4$ (б) сухими модами $\bar{\psi}_k(x)$ балки со средней постоянной толщиной. Погрешность (16) аппроксимации (14) для различных значений параметра β

x от -1 до 1, используя соотношение ортогональности (10), получаем бесконечную систему алгебраических уравнений для коэффициентов W_{kn} в ряду (17),

$$[D - \Omega_k (\alpha I + S)] W_k = 0. \tag{18}$$

Здесь $W_k = (W_{k1}, W_{k2}, W_{k3}, \dots)^T$ – вектор коэффициентов в ряду (17), D – диагональная матрица, $D_{nm} = 0$ для $n \neq m$, $D_{nn} = \lambda_n^4$, где λ_n – спектральные значения из (9), I – единичная матрица, $I_{nm} = \delta_{nm}$.

Упругая k -я мокрая мода, $k > 3$, задается рядом (17), где коэффициенты W_{kn} являются решениями алгебраической системы (15). Значение Ω_k является решением уравнения

$$\det [D - \Omega_k (\alpha I + S)] = 0. \tag{19}$$

Это решение зависит от единственного параметра α , описывающего отношение масс балки и жидкости. Решения вещественны, поскольку матрица системы (18) симметрична. Система (18) решается для каждого корня Ω_k .

Решения уравнения (18) для $3 \leq k \leq 12$ приведены в таблице 1 для $\alpha = 0.01$ и $\beta = 0.5$. Обратите внимание, что мы задаем $W_{kk} = 1$ для каждого $k \geq 3$, удаляем k -е уравнение, переносим k -й столбец в правую часть и решаем полученные неоднородные уравнения с коэффициентами W_{kn} , где $1 \leq n \leq k - 1$ и $k + 1 \leq n \leq k_{\max}$. Коэффициенты показаны с тремя значащими цифрами. Видно, что мокрые моды имеют примерно те же формы, что и соответствующие сухие моды для балки с линейной толщиной.

Таблица 1

Коэффициенты W_{kn} k -й мокрой моды $\psi_k(x)$ как суперпозиция сухих мод $\bar{\psi}_n(x)$.

n/k	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	1	-0.042	-0.098	-0.004	0.032	0.001	0.015	0.000	-0.008	0.000
4	0.048	1	0.052	0.064	-0.008	-0.021	-0.003	0.009	0.002	0.005
5	0.099	-0.061	1	0.077	-0.149	-0.007	-0.065	0.002	0.035	0.001
6	-0.005	-0.060	-0.095	1	-0.085	-0.081	-0.013	0.032	0.005	0.017
7	-0.019	-0.003	0.152	0.106	1	0.110	0.164	-0.009	-0.079	-0.002
8	0.002	0.016	-0.011	0.073	-0.142	1	0.117	-0.088	-0.016	0.038
9	-0.006	-0.002	0.045	-0.004	-0.170	-0.148	1	-0.143	-0.171	-0.011

10	-0.001	-0.006	0.004	-0.027	-0.014	0.072	0.186	1	0.149	0.092
11	0.002	0.001	-0.018	0.003	0.061	-0.004	0.173	-0.189	1	0.177
12	0.000	-0.003	0.002	-0.012	-0.007	0.033	-0.016	-0.067	-0.230	1

Основной вклад в k -ую мокрую моду исходит от k -ой сухой моды, следующей модой, которая дает наибольший вклад, является $(k + 1)$ -ая мода, но ее вклад составляет менее 15% для $3 \leq k \leq 8$ и менее 23% для $9 \leq k \leq 12$.

4. Сухие и мокрые моды упругой балки с кусочно-линейной толщиной

Для поиска мод балки с произвольной толщиной $h(x)$ она может быть аппроксимирована кусочно-линейными функциями. Пусть длина балки разбита на N_p интервалов, $a_j < x < a_{j+1}$, $1 \leq j \leq N_p$, $a_1 = -1$ и $a_{N_p+1} = 1$ в безразмерных переменных. Толщина балки аппроксимируется по формуле

$$h(x) \approx h_j + T_j(x - a_j), \quad T_j = \frac{h_{j+1} - h_j}{a_{j+1} - a_j} \quad (a_j < x < a_{j+1}), \quad (20)$$

где $h_j = h(a_j)$ и $h_j > 0$. Для каждого интервала $a_j < x < a_{j+1}$ общее решение дифференциального уравнения (9) можно получить, используя решение (12), которое справедливо для $h(x) = 1 + \beta x$, с четырьмя неопределенными коэффициентами. Эти коэффициенты определяются с помощью четырех краевых условий при $x = \pm 1$ и четырех краевых условий между интервалами. Условия между интервалами такие, чтобы функция $\psi_n(x)$ была непрерывна вместе со своими первой и второй производными на концах интервалов, и также непрерывной перерезывающей силой (1), что дает

$$\left[\frac{d^2\psi}{dx^2} \right] = \left[\frac{d\psi}{dx} \right] = [\psi] = 0, \quad h \left[\frac{d^3\psi}{dx^3} \right] + 3 \frac{d^2\psi}{dx^2} \left[\frac{dh}{dx} \right] = 0 \quad (x = a_j), \quad (21)$$

$2 \leq j \leq N_p$. Действительно, для интервала $a_j < x < a_{j+1}$ и $T_j \neq 0$ уравнение (9) с использованием (20) имеет вид

$$\frac{d^2}{dx^2} \left([h_j + K_j(x - a_j)]^3 \frac{d^2\psi_n^{(j)}}{dx^2} \right) = \lambda_n^4 [h_j + K_j(x - a_j)] \psi_n^{(j)}, \quad (22)$$

где $\psi_n^{(j)}(x)$ – функция $\psi_n(x)$ на рассматриваемом интервале. Мы ограничимся случаем, когда $h_j - T_j a_j \neq 0$. Тогда уравнение (22) может быть записано как

$$\frac{d^2}{dx^2} \left((1 + \beta_j x)^3 \frac{d^2\psi_n^{(j)}}{dx^2} \right) = \tilde{\lambda}_{nj} (1 + \beta_j x) \psi_n^{(j)}, \quad (23)$$

где $\beta_j = \frac{T_j}{h_j - T_j a_j}$ и $\tilde{\lambda}_{nj} = \frac{\lambda_n}{|h_j - T_j a_j|^{\frac{1}{2}}}$.

Общее решение дифференциального уравнения (23) дается формулой (12)

$$\psi_n^{(j)}(x) = \frac{1}{\xi} M_{nj}(\xi), \quad M_{nj}(\xi) = A_{nj} J_1(\xi) + B_{nj} Y_1(\xi) + C_{nj} I_1(\xi) + D_{nj} K_1(\xi), \quad (24)$$

$$\xi = b_{nj} \sqrt{1 + \beta_j x}, \quad b_{nj} = \frac{2\lambda_n}{T_j} |h_j - T_j a_j|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sgn}(h_j - T_j a_j), \quad (25)$$

где $\text{sgn}(x)$ – знаковая функция, $x = |x| \text{sgn}(x)$. Необходимо определить $4N_p$ коэффициентов A_{nj} , B_{nj} , C_{nj} , D_{nj} , $4(N_p - 1)$ условий согласования (21) и четыре краевых условия, как в (9). Поэтому для коэффициентов A_{nj} , B_{nj} , C_{nj} и D_{nj} мы имеем $4N_p$ линейных уравнений с нулевыми правыми сторонами. Эта система имеет ненулевые решения только для λ_n , которые являются корнями определителя системы. Далее система решается численно для каждого λ_n до постоянного множителя, который определяется с помощью условия нормировки (10).

Рассмотрим один простой случай. Линейная кусочная аппроксимация дает три интервала с разной формой льда: левый и правый интервалы, где толщина льда является линейной функцией, и средний интервал, где толщина льда постоянна. Для описания аппроксимации этой формы нам необходимо определить границы отрезков L_ℓ и L_r , а также наклоны α'_l и α'_r . Средняя толщина балки равна h_c . Затем вычисляются средние толщины на каждом сегменте и определяются как h_l , h_m и h_r соответственно. Тогда балка имеет толщину $h(x)$, заданную в безразмерных переменных в виде

$$h(x) = \begin{cases} h_l[1 - \alpha'_l(x - L_\ell)], & (-1 < x \leq L_\ell) \\ h_m, & (L_\ell \leq x \leq L_r) \\ h_r[1 + \alpha'_r(x - L_r)], & (L_r \leq x < 1). \end{cases} \quad (26)$$

Схема толщины показана на рисунке 5.

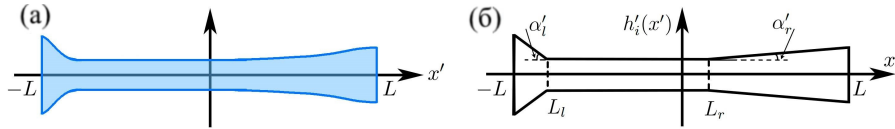


Рисунок 5. Форма балки с переменной толщиной (а). Соответствующая кусочно-линейная аппроксимация (б)

Решение спектральной задачи для сухих удобно искать отдельно на каждом из интервалов $-1 < x \leq L_\ell$, $L_\ell \leq x \leq L_r$, $L_r \leq x < 1$

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \psi_n^{(l)}(x), & (-1 < x \leq L_\ell) \\ \psi_n^{(m)}(x), & (L_\ell \leq x \leq L_r) \\ \psi_n^{(r)}(x), & (L_r \leq x < 1). \end{cases} \quad (27)$$

и затем срастить соответствующие решения на границах $x = L_\ell$ и $x = L_r$.

Упругие моды нумеруются с номера $n = 3$. Для вычисления упругих мод, необходимо найти нетривиальные решения уравнения (22). На среднем участке, где толщина льда не меняется, спектральные функции ψ_n являются решениями спектральной задачи, описывающей колебания упругой балки постоянной толщины.

$$\psi_{n,xxxx}^{(m)} = (\theta_n^4/h_i^2)\psi_n^{(m)}(x) \quad (L_l \leq y \leq L_r). \quad (28)$$

Решением этой спектральной задачи будут стандартные моды колебаний упругой балки с постоянной толщиной.

Для случая линейно меняющейся толщины льда (левый и правый интервалы) функции ψ_n являются решениями спектральной задачи, описывающей колебания упругой балки с линейно меняющейся толщиной

$$h_i^2(x)\psi_{n,xxxx}^{(l)} + 6h_i(x)h_{i,x}\psi_{n,xxx}^{(l)} + 6(h_{i,x})^2\psi_{n,xx}^{(l)} = \theta_n^4\psi_n^{(l)}, \quad (-1 < x < L_l), \quad (29)$$

$$h_i^2(x)\psi_{n,xxxx}^{(r)} + 6h_i(x)h_{i,x}\psi_{n,xxx}^{(r)} + 6(h_{i,x})^2\psi_{n,xx}^{(r)} = \theta_n^4\psi_n^{(r)}, \quad (L_r < x < 1). \quad (30)$$

Наиболее важными параметрами являются α'_l и α'_r , которые описывают углы наклона линейного изменения толщины льда на данном участке. Для размерных переменных эти углы малы. Однако в безразмерных переменных условия $\alpha_{l,r} \ll 1$ не всегда выполняются. Решение последней спектральной задачи имеет вид (26). Краевые условия дают 12 алгебраических уравнений. Последнее необходимое уравнение – это условие ортогональности мод $\psi_n(x)$ с весом, где весовая функция – это кусочно-линейная аппроксимация толщины балки.

Расчеты сухих проводились для двух наборов параметров, см. таблицу 2. Первый (I) набор близок к балке постоянной толщины. Во втором наборе (II) средняя толщина балки на среднем интервале примерно в 4 раза меньше общей средней толщины, а средние толщины льда в левом и правом интервалах соответственно больше в 3 и 1,4 раза.

Таблица 2

Безразмерные параметры расчетов

Номер случая	L_l	L_r	α'_l	α'_r	h_l	h_m	h_r
I	-0.8	0.2	$3.36 \cdot 10^{-4}$	$8.4 \cdot 10^{-5}$	$\approx 1.014h_c$	$\approx 0.98h_c$	$\approx 1.014h_c$
II	-0.8	0.2	0.03	0.0033	$\approx 2.85h_c$	$\approx 0.28h_c$	$\approx 1.43h_c$

Во всех представленных результатах случай I показан слева, а случай II – справа на рисунках. Первые две «жесткие» моды показаны на рисунке 6. Первые две «упругие» моды показаны на рисунке 7. Первая мода показана фиолетовым цветом, вторая – красным, результаты для балки с переменной толщиной льда показаны сплошными линиями, а результаты для балки с постоянной толщиной – маркерами на обоих рисунках. Первая жесткая мода одинакова для балки различной толщины. Вторая жесткая мода имеет заметное отличие угла наклона для неоднородной балки с большим изменением толщины.

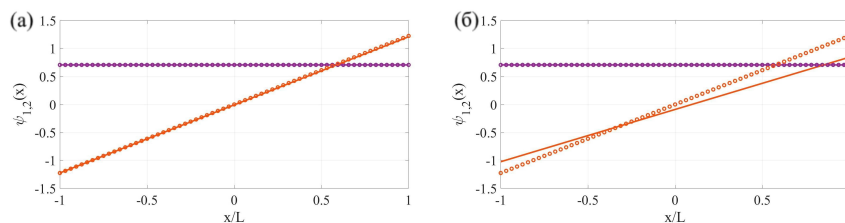


Рисунок 6. Первые две «жесткие» моды. Результаты расчетов показаны для набора параметров (I) на рисунке (а) и для (II) – на рисунке (б)

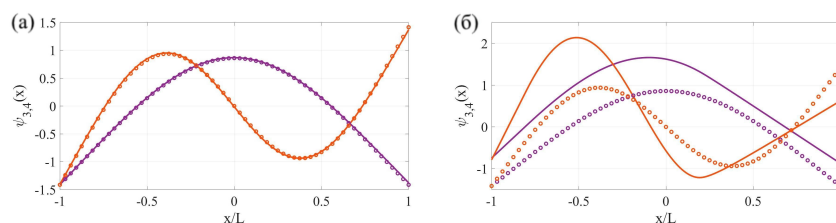


Рисунок 7. Первые две упругие моды. Результаты расчетов показаны для набора параметров (I) на рисунке (а) и для (II) – на рисунке (б)

Коэффициенты разложения W_{kn} разложения упругих мокрых мод по сухим модам для $3 \leq k \leq 12$ вычислены аналогичным образом как для балки с полностью линейной толщиной и приведены в таблице 3 для случая одного набора параметров задачи. Видно,

что мокрые моды $W_k(x)$ имеют примерно те же формы, что и соответствующие сухие моды $\psi_k(x)$. Вклады других сухих мод меньше 8%.

Таблица 3

Коэффициенты W_{kn} k -й мокрой моды $\psi_k(x)$ как суперпозиции сухих мод $\bar{\psi}_n(x)$.

n/k	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	1	0.023	0.056	-0.001	0.012	0.000	0.003	0.000	-0.001	0.000
4	-0.024	1	0.012	0.060	-0.001	0.014	0.002	0.004	-0.001	-0.002
5	-0.056	-0.013	1	-0.012	0.067	-0.003	0.019	0.001	-0.007	-0.001
6	0.002	-0.061	0.014	1	-0.025	0.063	-0.008	0.020	-0.001	-0.007
7	-0.008	0.000	-0.068	0.029	1	-0.041	0.067	-0.009	-0.021	-0.002
8	0.000	-0.011	0.000	-0.064	0.046	1	-0.050	0.063	0.008	-0.020
9	-0.001	-0.002	-0.015	0.004	-0.068	0.057	1	-0.057	-0.064	0.010
10	0.000	-0.003	-0.003	-0.016	0.004	-0.063	0.065	1	0.060	-0.063
11	0.001	0.001	0.005	0.003	0.017	-0.002	0.064	-0.069	1	-0.067
12	0.000	0.002	0.001	0.006	0.004	0.016	-0.004	0.062	0.075	1

5. Заключение

В работе изучены собственные моды и собственные частоты колебаний двумерной балки в контакте с жидкостью или без учета жидкости. В случае контакта, жидкость имеет бесконечную глубину, а ее течение предполагалось двумерным и потенциальным. Рассмотрены два случая распределения упругих характеристик балки: балка с линейной толщиной и балка, имеющая кусочно-заданную толщину. Приведен алгоритм решения задачи, вычислены формы сухих мод и частоты сухих и мокрых мод. Решения для мокрых мод получены в виде ряда сухих мод, которые определяются из соответствующей матричной задачи.

Получено, что основной вклад в мокрые моды вносят соответствующие сухие моды с теми же индексами. Частоты мокрых мод меньше частот сухих и зависят от безразмерного параметра, описывающего отношение масс балки и жидкости. Этот результат позволяет предложить следующий приближенный алгоритм определения мокрых мод и их частот: (а) форма мокрой моды принимается за форму соответствующей сухой моды, (б) частота мокрой моды аппроксимируется соответствующей сухой частотой, умноженной на коэффициент, который находится между нулем и единицей и определяется из отношения квадратов спектральных параметров сухих мод.

Список литературы

1. Timoshenko S., Young D.H. Vibration Problems in Engineering. — 3rd edition. — NY : D. Van Nostrand Co., Inc., 1955.
2. Batyaev E.A., Khabakhpasheva T.I. Hydroelastic waves in an ice-covered channel with linearly varying ice thickness // Fluid Dynamics. — 2022. — Vol. 57, no. 3. — P. 281–294.
3. Сибирякова Т.А., Шишмарев К.А. Решение задачи о движении подводного тела в замороженном канале с линейно изменяющейся толщиной льда // МАК: Математики - Алтайскому краю. — Барнаул : Изд-во Алт ун-та, 2022. — С. 146–150.
4. Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. Tables of Integrals, Sums, Series, and Products. — NY : Acad. Press, 1965.