

# Методы составления прогноза с помощью нечетких математических моделей

Шпонарская А.С., Пономарев И.В.

Алтайский государственный университет, г. Барнаул  
owlanna09@mail.ru, igorpon@mail.ru

## Аннотация

В работе рассматриваются и сравниваются некоторые методы составления прогноза, основанные на нечетких математических моделях, рассматриваются преимущества и недостатки того или иного метода.

*Ключевые слова:* нечеткая логика, нечеткая математическая модель, прогноз.

## 1. Нечеткие математические модели

Теория нечетких множеств дистанцирована от традиционной четкой математики и Аристотелевой логики, оперирующих с четкими понятиями «принадлежит – не принадлежит», «истина – ложь». Понятие нечеткого множества – попытка формализации лингвистической информации для построения математических моделей. В основе этого понятия лежит представление о том, что составляющие данное множество элементы, обладающие общим свойством, могут обладать им в различной степени и, следовательно, принадлежать к этому множеству с различной степенью.

Введем несколько определений, являющихся важными элементами теории нечетких множеств.

**Определение 1.** *Нечетким множеством  $A$  на универсальном множестве  $U$  называется совокупность пар  $(\mu_A(u), u)$ , где  $\mu_A(u)$  – степень принадлежности элемента  $u \in U$  нечеткому множеству  $A$ . Степень принадлежности – это число из диапазона  $[0, 1]$ . Чем выше степень принадлежности, тем большей мерой элемент универсального множества соответствует свойствам нечеткого множества.*

Если универсальное множество является конечным  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ , тогда нечеткое множество запишется так:

$$A = \sum_{i=1}^k \mu_A(u_i) / u_i.$$

В случае непрерывного множества  $U$  используют такое обозначение:

$$A = \int \mu_A(u) / u.$$

Знаки  $\sum$  и  $\int$  в этих формулах означают совокупность пар  $\mu_A(u)$  и  $u$ .

**Определение 2.** *Функцией принадлежности называется функция, позволяющая для произвольного элемента универсального множества вычислить степень его принадлежности нечеткому множеству.*

Также введем несколько определений, необходимых для работы с нечеткими математическими моделями.

**Определение 3.** Дефаззификацией называется преобразование нечеткого множества в четкое число.

В теории нечетких множеств дефаззификация аналогична нахождению характеристик положения случайных величин (математического ожидания, моды, медианы) в теории вероятностей. Простейшим способом дефаззификации является выбор четкого числа с максимальной степенью принадлежности. Пригодность этого способа ограничивается лишь одноэкстремальными функциями принадлежности. Для многоэкстремальных функций принадлежности применяются такие методы дефаззификации: центр тяжести, медиана, центр максимумов, наибольший из максимумов, наименьший из максимумов. Расчетные формулы этих методов дефаззификации для нечетких множеств на непрерывных и дискретных носителях приведены в таблице 1.

Таблица 1

Дефаззификация различными методами

Метод дефаззификации	$A = \int_{u \in (\underline{u}, \bar{u})} \mu_A(u) / u$	$A = \left( \frac{\mu_A(u_1)}{u_1}, \dots, \frac{\mu_A(u_k)}{u_k} \right)$
Центр тяжести	$\frac{\int_{\underline{u}}^{\bar{u}} u \mu_A(u) du}{\int_{\underline{u}}^{\bar{u}} \mu_A(u) du}$	$\frac{\sum_{i=1}^k u_i \mu_A(u_i)}{\sum_{i=1}^k \mu_A(u_i)}$
Медиана	Найти такое число $a$ , чтобы: $\int_{\underline{u}}^a \mu_A(u) du = \int_a^{\bar{u}} \mu_A(u) du$	$\min(u_j)$ для $\forall j$ : $\sum_{i=1}^j \mu_A(u_i) \geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \mu_A(u_i)$
Центр максимумов	$\frac{\int_G u du}{\int_G du}$ , где $G = \arg u(\mu_A(u))$ $\sup(u')$	$\frac{\sum_{u_j \in G} u_j}{ G }$
Наименьший из максимумов	$\min(G)$	$\min(G)$
Наибольший из максимумов	$\max(G)$	$\max(G)$

## 2. Модель нечеткого вывода

**Определение 4.** Нечеткий логический вывод – это аппроксимация зависимости «входы-выход» на основе лингвистических высказываний <Если – то> и логических операций над нечеткими множествами.

Нечеткий логический вывод применяется при моделировании объектов с непрерывным и с дискретным выходом. Объекты с непрерывным выходом соответствуют задачам аппроксимации гладких функций, возникающим в прогнозировании, многокритериальном анализе, управлении техническими объектами и т.п. Объекты с дискретным выходом соответствуют задачам классификации в медицинской и технической диагностике, в распознавании образов, в ситуационном управлении и при принятии решений в других областях.

Типовая структура системы нечеткого вывода содержит следующие модули:

- фаззификатор, преобразующий фиксированный вектор влияющих факторов  $X$  в вектор нечетких множеств  $X'$ , необходимых для нечеткого вывода;
- нечеткая база знаний, содержащая информацию о зависимости  $Y = f(X)$  в виде лингвистических правил <Если – то>;
- функции принадлежности, используемые для представления лингвистических термов в виде нечетких множеств;
- машина нечеткого логического вывода, которая на основе правил базы знаний определяет значение выходной переменной в виде нечеткого множества  $Y'$ , соответствующего нечетким значениям входных переменных  $X'$ ;
- дефаззификатор, преобразующий выходное нечеткое множество  $Y'$  в четкое число  $Y$ .

**Определение 5.** *Нечеткой базой знаний называется совокупность нечетких правил <Если – то>, задающих взаимосвязь между входами и выходами исследуемого объекта. Формат нечетких правил такой: ЕСЛИ <посылка правила>, ТО <заключение правила>.*

Посылка правила, или антецедент представляет собой утверждение типа « $x$  есть низкий», где «низкий» – это терм, заданный нечетким множеством на универсальном множестве лингвистической переменной  $x$ . Квантификаторы «очень», «не», «почти», «более – менее» и другие могут использоваться для модификации термов антецедента.

Заключение правила, или консеквент – это факт типа « $y$  есть  $d$ », в котором значение выходной переменной может задаваться:

- нечетким термом – « $y$  есть высокий»;
- классом решений – « $y$  есть бронхит»;
- четкой константой – « $y = 5$ »;
- четкой функцией от входных переменных – « $y = 5 + 4x$ ».

Если выходная переменная задана нечетким множеством, тогда правило может быть представлено нечетким отношением. Следующий алгоритм шагов актуален для пакета прикладных программ для решения задач технических вычислений MATLAB. Процесс нечеткого вывода состоит из следующих шагов:

- фаззификация входных переменных;
- применение нечеткого оператора (И/ИЛИ) в антецеденте;
- вывод от предшествующего к последующему;
- агрегирование следствий по правилам;
- дефаззификация.

### 3. Модель нечеткого вывода Мамдани

Ознакомимся с некоторыми определениями, которые понадобятся для работы с моделью нечеткого вывода Мамдани.

**Определение 6.** *Нечеткая переменная – это кортеж вида  $\langle \alpha, X, ? \rangle$ , где  $\alpha$  – имя нечеткой переменной,  $X$  – область определения нечеткой переменной,  $A$  – нечеткое множество на универсуме  $X$ .*

**Определение 7.** *Лингвистическая переменная – это кортеж  $\langle \beta, T, X, G, M \rangle$ , где  $\beta$  – имя лингвистической переменной,  $T$  – множество значений лингвистической переменной (термов),  $X$  – универсум нечетких переменных,  $G$  – синтаксическая процедура образования новых термов,  $M$  – семантическая процедура, формирующая нечеткие множества для каждого терма данной лингвистической переменной.*

Рассмотрим, к примеру, субъективную оценку массы бронезилета, которая может быть получена от военнослужащих, выступающих в роли экспертов. Формализовать эту оценку можно с помощью следующей лингвистической переменной  $\langle \beta, T, X, G, M \rangle$ , где  $\beta$  – это бронезилет,  $T$  – «Легкий бронезилет (Light)», «Бронезилет средней массы (Medium)», «Тяжелый бронезилет (Heavy)»,  $X = [0; 35]$ ,  $G$  – процедура образования новых термов при помощи логических связок и модификаторов (например, «очень тяжелый бронезилет»),  $M$  – процедура задания на универсуме  $X = [0; 35]$  значений лингвистической переменной, то есть термов из множества  $T$ . Алгоритм Мамдани описывает несколько последовательно выполняющихся этапов:

- Формирование базы правил;
- Фаззификация;
- Агрегирование подусловий и активизация подзаключений;
- Аккумуляирование заключений;
- Дефаззификация.

При этом каждый последующий этап получает на вход значения, полученные на предыдущем шаге.

Нечеткий вывод Мамдани выполняется по следующей базе знаний:

$$(x_1 = a'_{1j} \theta_j \dots \theta_j x_n = a'_{nj} \text{ с весом } w_j) \rightarrow y = d'_j, \quad j = 1 \dots m,$$

в которой все значения входных и выходной переменных заданы нечеткими множествами.

База знаний Мамдани может трактоваться как разбиение пространства влияющих факторов на подобласти с размытыми границами, внутри которых функция отклика принимает нечеткое значение. Правило в базе знаний представляет собой «информационный сгусток», отражающий одну из особенностей зависимости «входы - выход». Такие «сгустки насыщенной информации» могут рассматриваться как аналог вербального кодирования, которое происходит в человеческом мозге при обучении.

Введем некоторые обозначения, необходимые для дальнейшего понимания работы алгоритма Мамдани:

- $\mu_j(x_i)$  – функция принадлежности входа  $x_i \in [\underline{x}_i, \bar{x}_i]$  нечеткому терму  $a'_{ij}$ , т.е.  $a'_{ij} = \int_{x_i \in [\underline{x}_i, \bar{x}_i]} \mu_j(x_i) / x_i$ ;
- $\mu_{d'_j}(y)$  – функция принадлежности выхода  $y \in [\underline{y}, \bar{y}]$  нечеткому терму  $d'_j$ , т.е.  $d'_j = \int_{y \in [\underline{y}, \bar{y}]} \mu_{d'_j}(y) / y$ .

Степень выполнения посылки  $j$ -го правила для текущего входного вектора  $X^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$  рассчитывается следующим образом:

$$\mu_j(X^*) = w_j (\mu_j(x_1^*) X_j \dots \mu_j(x_n^*) X_j), j = 1 \dots m,$$

где  $X_j$  обозначает  $t$ -норму, если в  $j$ -м правиле базы знаний используется логическая операция  $\theta_j = \text{И}$ , и соответствует  $s$ -норме при  $\theta_j = \text{ИЛИ}$ . В нечетком выводе Мамдани треугольные нормы реализуются операциями минимума ( $t$ -норма) и максимума ( $s$ -норма).

Результат нечеткого вывода представляется в виде

$$y^{*'} = \left( \frac{\mu_1(X^*)}{d_1'}, \dots, \frac{\mu_m(X^*)}{d_m'} \right).$$

Особенность этого нечеткого множества заключается в том, что его носителем является множество нечетких термов  $\{d_1', \dots, d_m'\}$ . Для перехода к нечеткому множеству на носителе  $[y, \bar{y}]$  выполняется операция импликации и агрегирования.

В результате логического вывода по  $j$ -му правилу базы знаний получается следующее нечеткое значение выходной переменной  $y$ :

$$d_j^{*'} = \int_{y \in [y, \bar{y}]} \min(\mu_j(X^*), \mu_{d_j}(y)) / y,$$

так как импликация в нечетком выводе реализуется операцией минимума, т.е. «срезанием» функции принадлежности  $\mu_{d_j}(y)$  по уровню  $\mu_j(X^*)$ .

Результат логического вывода по всей базе знаний находится агрегированием нечетких множеств, обычно реализующимся операцией максимума:

$$y^{*'} = \text{agg}(d_1^{*'}, \dots, d_m^{*'}).$$

Четкое значение выхода  $y$ , соответствующее входному вектору  $X^*$ , определяется через дефаззификацию нечеткого множества  $y'$ . Наиболее часто применяется дефаззификация по методу центра тяжести.

#### 4. Модель нечеткого вывода Сугено

Нечеткий логический вывод по алгоритму Сугено выполняется по следующей нечеткой базе знаний:

$$(x_1 = a'_{1j} \theta_j \dots \theta_j x_n = a'_{nj}) \rightarrow y = b_{j0} + b_{j1} x_1 + \dots + b_{jn} x_n, j = 1 \dots m,$$

где  $b_{j0}, b_{j1}, \dots, b_{jn}$  – некоторые действительные числа.

База знаний Сугено аналогична базе знаний Мамдани за исключением заключений правил, которые задаются не нечеткими термами, а линейной функцией от входов:

$$d_j = b_{j0} + \sum_{i=1}^n b_{ji} x_i.$$

Правила в базе знаний Сугено являются своего рода переключателями с одного линейного закона «входы - выход» на другой, тоже линейный. Границы подобластей размытые, значит, одновременно могут выполняться несколько линейных законов, но с различными степенями. В базе знаний Сугено нет весовых коэффициентов, так как они были бы линейно зависимы с заключениями правил.

Степени принадлежности входного вектора  $X^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$  к значениям  $d_j = b_{j0} + \sum_{i=1}^n b_{ji}x_i^*$  рассчитываются по формуле

$$\mu_{d_j}(X^*) = \mu_j(x_1^*) \mathbf{X}_j \dots \mu_j(x_n^*) \mathbf{X}_j, j = 1 \dots m.$$

В алгоритме Сугено наиболее часто применяется вероятностное ИЛИ как  $s$ -норма и произведение как  $t$ -норма. В результате вывода по всей базе знаний получается нечеткое множество  $y'$ , соответствующее входному вектору  $X^*$ :

$$y' = \left( \frac{\mu_{d_1}(X^*)}{d_1}, \dots, \frac{\mu_{d_m}(X^*)}{d_m} \right).$$

Результирующее значение выхода  $y$  находится как суперпозиция линейных законов, выполняемых в данной точке  $X^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$   $n$ -мерного факторного пространства. Для этого нечеткое множество  $y'$  дефазсифицируют, находя взвешенное среднее или взвешенную сумму.

## Список литературы

1. Штовба С.Д. Проектирование нечетких систем средствами MATLAB. — М. : Горячая линия – Телеком, 2007. — 288 с.
2. Белов П.Н. Численные методы прогноза погоды. — Л. : Гидрометеиздат, 1975. — 392 с.
3. Кристалинский В.Р. О прогнозировании результатов обучения на основе нечеткого моделирования // Современные информационные технологии и ИТ-образование. — 2021. — Т. 17, № 2. — С. 453–463.
4. Процесс нечеткого вывода. — URL: <https://www.mathworks.com/help/fuzzy/fuzzy-inference-process.html>. Дата обращения: 05.12.2022.
5. Мамдани Э.Х., Ассилиан С. Эксперимент по лингвистическому синтезу с контроллером нечеткой логики // Международный журнал человеко-машинных исследований. — 1975. — № 1. — С. 1–13.
6. Григорьева Д.Р., Гареева Г.А., Басыров Р.Р. Основы нечеткой логики: Учебно-методическое пособие к практическим занятиям и лабораторным работам. — Набережные Челны : Изд-во НЧИ КФУ, 2018. — 42 с.