

Эффект неоднородного сжатия в математической модели ледового покрова¹

Серых К.С., Сибирякова Т.А., Найденова К.Е

Алтайский государственный университет, г. Барнаул

s.kirill123@mail.ru@mail.ru, sibiryakova.tatiana@mail.ru, kristina-akulova00@mail.ru

Аннотация

Рассмотрена задача о движении внешней нагрузки с постоянной скоростью вдоль замороженного канала с неравномерным сжатием. Лед моделируется как тонкая вязкоупругая пластина постоянной толщины. Края пластины приморожены к стенкам канала. Прогиб ледового покрова описывается в рамках линейной теории упругости. Жидкость под пластиной невязкая и несжимаемая. Течение жидкости, вызванное прогибом пластины, является потенциальным. Внешняя нагрузка моделируется движущимся с постоянной скоростью распределением давления. Задача решается с помощью преобразования Фурье вдоль канала и методом нормальных мод для формы прогибов льда поперек канала. Основным параметром для исследования в данной модели является эффект неоднородного сжатия ледового покрова.

Ключевые слова: ледяной покров, замороженный канал, внешняя нагрузка, неравномерное сжатие, прогибы, удлинения.

1. Постановка задачи

Рассматривается задача о взаимодействии ледового покрова и движущейся внешней нагрузки в прямоугольном канале, который имеет бесконечную длину, ограниченную ширину $2L$ и глубину H . Канал заполнен идеальной несжимаемой жидкостью, а его поверхность покрыта тонким льдом. Схема задачи изображена на рисунке 1.

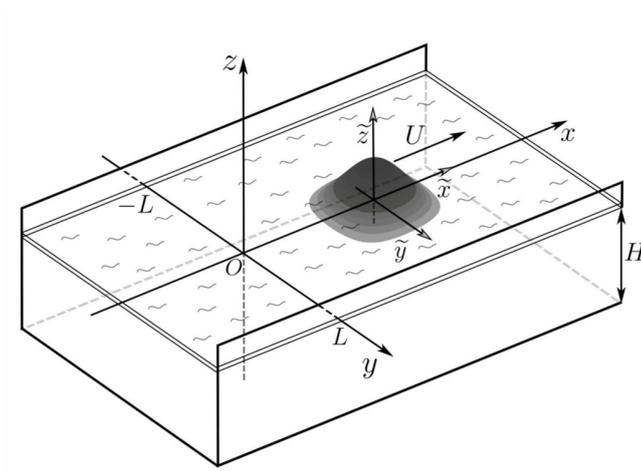


Рисунок 1. Схема задачи.

Ледовый покров рассматривается как тонкая вязкоупругая пластина, описываемая моделью Кельвина-Фойгта

$$Mw_{tt} + D \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t} \right) \Delta^2 w + Q_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + Q_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2Q_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -\rho_l g w - \rho_l \varphi_t + P, \quad (1)$$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (грант № 23-71-01096).

где $\Delta^2 = \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right)$ – оператор Лапласа в квадрате, $w(x, y, t)$ – прогиб ледового покрова, h_i – толщина льда, $D = Eh_i^3 / (12(1 - \nu^2))$ – жесткость, E – модуль Юнга, ν – коэффициента Пуассона, $\tau = \eta/E$ – время запаздывания, соответствующее модели вязкоупругой пластины Кельвина-Фойгта, η – вязкость льда, $M = \rho_l h_i$ – масса льда на единицу площади, ρ_l – плотность льда, P – внешняя нагрузка, Q_x, Q_y – напряжения в плоскости пластины вдоль осей x и y соответственно, Q_{xy} – комбинированные напряжения.

Основная задача состоит в определении прогибов ледового покрова в канале в рамках линейной теории гидроупругости. Ключевым отличием исследуемой задачи, по сравнению с задачей из [1], является наличие сжимающих/растягивающих напряжений. Рассматриваются напряжения только в плоскости пластины вдоль соответствующих осей Q_x, Q_y и комбинированные Q_{xy} . Если эти Q больше 0, то рассматривается сжатие ледового покрова, если $Q < 0$, то растяжение. В данной работе ограничимся исследованием только сжимающих напряжений, при этом сжатие, в главном случае, будет неравномерное $Q_x \neq Q_y \neq Q_{xy}$.

Ледовый покров закреплен на стенках канала, что моделируется условиями жесткого защемления для функции, описывающей прогибы льда

$$w = w_y = 0 \quad (-\infty < x < \infty, y = \pm L). \quad (2)$$

Давление жидкости на границе раздела лед-жидкость задается линейризованным интегралом Коши-Лагранжа

$$p(x, y, 0, t) = -\rho_l \varphi_t - \rho_l g w \quad (-\infty < x < \infty, -L < y < L), \quad (3)$$

где g – модуль ускорения силы тяжести и $\varphi(x, y, z, t)$ – потенциал скорости течения жидкости в канале, вызванного прогибом пластины. Течение жидкости в канале вызвано прогибом пластины и считается потенциальным, соответственно, потенциал скорости $\varphi(x, y, z, t)$ удовлетворяет уравнению Лапласа в области течения и граничным условиям на дне, стенках канала и на границе лед-жидкость. В линейной теории гидроупругости, граница между льдом и жидкостью приближается линией $z = 0$

$$\Delta \varphi = 0, \quad \varphi_t = w_t \quad (z = 0), \quad \varphi_z = 0 \quad (z = -H), \quad \varphi_y = 0 \quad (y = \pm L). \quad (4)$$

Коэффициент τ при старшей производной в уравнении вязкоупругой пластины отвечает за затухание колебаний ледового покрова в отдалении от нагрузки

$$w, \varphi \rightarrow 0, \quad \left| \frac{x - Ut}{L} \right| \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Внешняя нагрузка моделируется движущимся с постоянной скоростью U вдоль центральной линии канала в положительном направлении x и имеет заданный вид распределением давления по верхней поверхности льда

$$P = -P_0 P_1 \left(\frac{x - Ut}{L} \right) P_2 \left(\frac{y}{L} \right), \quad (6)$$

$$P_1 = \begin{cases} \frac{1 + \cos(\pi c_1 (\frac{x-Ut}{L}))}{2} & c_1 \frac{x-Ut}{L} \leq 1, \\ 0 & c_1 \frac{x-Ut}{L} > 1, \end{cases}, \quad P_2 = \begin{cases} \frac{1 + \cos(\pi c_2 (\frac{y}{L}))}{2} & c_2 \frac{y}{L} \leq 1, \\ 0 & c_2 \frac{y}{L} > 1, \end{cases}$$

где P_0 – амплитуда внешнего давления, c_1 и c_2 – безразмерные параметры внешней нагрузки, характеризующие размер области приложения давления к ледовой пластине. В данной работе рассматривается случай симметричного движения нагрузки, $P_1 \left(\frac{x-Ut}{L} \right) = P_1 \left(-\frac{x-Ut}{L} \right)$, $P_2 \left(\frac{y}{L} \right) = P_2 \left(-\frac{y}{L} \right)$, однако аналогичное исследование может быть проведено и для случая, когда внешняя нагрузка движется с вблизи одной из стенок канала.

Задача (1) – (6) решается в безразмерных переменных. Движущаяся совместно с нагрузкой система координат $\tilde{O}\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ задаётся соотношениями $\tilde{x} = (x-Ut)/L$, $\tilde{y} = y/L$, $\tilde{z} = z/L$ и $\tilde{t} = tU/L$.

Считаем, что нагрузка движется достаточно долго, чтобы решение установилось и стало независимым от времени. Тогда можем искать решение в системе координат $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ в следующем виде

$$w(x, y, t) = w_{sc} \tilde{w}(\tilde{x}, \tilde{y}), \quad \varphi(x, y, z, t) = \varphi_{sc} \tilde{\varphi}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}), \quad P(x, y, t) = -P_0 P_1(\tilde{x})P_2(\tilde{y}),$$

где w_{sc} и φ_{sc} – соответствующие масштабы, которые определяются следующим образом: $w_{sc} = P_0/\rho_l$, следовательно, $\varphi_{sc} = UP_0/\rho_l$, безразмерная глубина канала H/L обозначена h . Запишем систему уравнений (1) – (6) в безразмерных переменных (знак \sim опускаем)

$$\alpha h^2 Fr^2 w_{xx} + \beta \left(1 - \varepsilon \frac{\partial}{\partial x}\right) \Delta^2 w + [q_1 w_{xx} + q_2 w_{yy} + q_3 w_{xy}] + w = h Fr^2 \varphi_x - P_1 P_2 \quad (7)$$

$$(-\infty < x < \infty, \quad -1 < y < 1, \quad z = 0),$$

$$w = w_y = 0 \quad (y = \pm 1), \quad (8)$$

$$\Delta \varphi = 0 \quad (-\infty < x < \infty, \quad -1 < y < 1, \quad (-h < z < 0), \quad (9)$$

$$\varphi_z = 0 \quad (z = -h), \quad \varphi_z = -w_x \quad (z = 0), \quad \varphi_y = 0 \quad (y = \pm 1), \quad (10)$$

$$\varphi, w \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow \pm \infty). \quad (11)$$

$$\alpha = \frac{M}{\rho_l H}, \quad Fr = \frac{U}{\sqrt{gH}}, \quad \beta = \frac{D}{L^4 \rho_l g},$$

$$\varepsilon = \frac{\tau U}{L}, \quad q_1 = \frac{Q_x}{L^2 \rho_l g}, \quad q_2 = \frac{Q_y}{L^2 \rho_l g}, \quad q_3 = \frac{2Q_{xy}}{L^2 \rho_l g},$$

где α – отношение масс, Fr – число Фруда (отношение скоростей нагрузки и скорости распространения возмущений в жидкости), β – безразмерная жесткость пластины, ε – безразмерное время запаздывания, q_1, q_2 – безразмерное сжатие вдоль осей x и y , q_3 – безразмерное комбинированное сжатие.

В рамках данной модели искомыми для исследования функциями являются прогибы ледового покрова w и потенциал скорости течения жидкости φ . Поведение прогибов льда зависит от безразмерных параметров задачи, в частности от безразмерных коэффициентов сжатия q_1, q_2 и q_3 .

2. Метод решения

Задача (7) – (11) решается с использованием преобразования Фурье вдоль оси x

$$w^F(\xi, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} w(x, y) e^{-i\xi x} dx, \quad w(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} w^F(\xi, y) e^{-i\xi x} d\xi.$$

Применяя преобразование Фурье к уравнению пластины, получим

$$-\alpha h^2 Fr^2 \xi^2 w^F + \beta (1 - i\xi \varepsilon) [w_{yyyy}^F - 2\xi^2 w_{yy}^F + \xi^4 w^F] + [- q_1 \xi^2 w^F + q_2 w_{yy}^F + i q_3 \xi w_y^F] + w = i h Fr^2 \xi \varphi^F(\xi, y, 0) - P_1^F P_2. \quad (12)$$

Решение уравнения (12) ищется в виде разложения

$$w^F = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(\xi) \psi_i(y), \quad (13)$$

где $a_j(\xi)$ – коэффициенты разложения, $\psi_j(y)$ – нормальные моды колебаний упругой балки, которые являются решением следующей спектральной задачи

$$\psi_j^{IV} = \lambda_j^4 \psi_j \quad (-1 < y < 1), \quad \psi_j = \psi_j' = 0 \quad (y = \pm 1).$$

Разложение (13) использовалось в [2], [3] для определения дисперсионных соотношений периодических гидроупругих волн с постоянной амплитудой, распространяющихся вдоль замороженного канала. Легко показать, что решение этой спектральной задачи представимо в виде суммы четных и нечетных функций. Поскольку $P_2(y)$ является четной функцией, то можно предположить, что в разложении (13) будут использоваться только четные функции $\psi_j^e(y)$

$$\psi_j^e(y) = A_j^e(\cos(\lambda_j^e y) - B_j^e \cosh(\lambda_j^e y)),$$

где

$$A_j^e = \frac{1}{\sqrt{1 + (B_j^e)^2}}, \quad B_j^e = \frac{\cos(\lambda_j^e)}{\cosh(\lambda_j^e)}$$

и собственные значения λ_n^e являются решениями уравнения

$$\tan(\lambda_j^e) = -\tanh(\lambda_j^e), \quad j = 1, 2, \dots$$

Однако, так как рассматривается неравномерное сжатие и $q_3 \neq 0$, то ожидается, что прогибы льда могут быть несимметричными. Для этого необходимо рассмотреть и нечетные моды ψ_n^o

$$\psi_j^o(y) = A_j^o(\cos(\lambda_j^o y) - B_j^o \cosh(\lambda_j^o y)),$$

где

$$A_j^o = \frac{1}{\sqrt{1 - (B_j^o)^2}}, \quad B_j^o = \frac{\sin(\lambda_j^o)}{\sinh(\lambda_j^o)}$$

и собственные значения λ_n^o являются решениями уравнения

$$\tan(\lambda_j^o) = \tanh(\lambda_j^o), \quad j = 1, 2, \dots$$

В итоге образ Фурье прогибов льда ищется в виде

$$w^F = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^e(\xi) \psi_i^e(y) + a_i^o(\xi) \psi_i^o(y). \quad (14)$$

Функции ψ^e и ψ^o являются ортонормированными (как четные с нечетными, так и между собой). Для поиска образа Фурье потенциала скорости течения жидкости сначала введем функцию ϕ такую, что $\phi = -i\xi \varphi^F$. Решение для ϕ предлагается искать также в виде ряда четных и нечетных функций, которые раскладываются по аналогичным образом прогибов коэффициентам

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^e(\xi) \phi_n^e(\xi, y, z) + a_n^o(\xi) \phi_n^o(\xi, y, z).$$

Далее четные и нечетные функции описываются одинаково, поэтому запись будет вестись без индексов e и o . Функции $\phi_n(\xi, y, z)$ удовлетворяют краевой задаче

$$\phi_{n,yy} + \phi_{n,zz} = \xi^2 \phi_n,$$

$$\phi_{n,y} = 0 \quad (y = \pm 1), \quad \phi_{n,z} = 0 \quad (z = -h), \quad \phi_{n,z} = \psi_n \quad (z = 0).$$

Решение этой краевой задачи строится для ϕ_n методом разделения переменных и имеет вид

$$\phi_n = \frac{A_{0n}}{2} \cosh(\xi(z+h)) + \sum_{i=1}^{\infty} (A_{jn} \cos(\pi j y) \cosh(\mu_j^{(c)}(z+h)) + B_{jn} \sin((\pi j - \frac{\pi}{2})y) \cosh(\mu_j^{(s)}(z+h))),$$

где $\mu_j^{(c)} = \sqrt{\xi^2 + (\pi j)^2}$, $\mu_j^{(s)} = \sqrt{\xi^2 + (\pi j - \frac{\pi}{2})^2}$. Коэффициенты A_{jn}, B_{jn} определяются из преобразованного кинематического условия $\phi_{n,z} = \psi_n$. Тогда коэффициенты A_{jn}, B_{jn} имеют вид

$$A_{0n} = \frac{\int_{-1}^1 \psi_n dy}{\xi \sinh(\xi h)}, \quad A_{jn} = \frac{\int_{-1}^1 \psi_n \cos(\pi j y) dy}{\mu_j^{(c)} \sinh(\mu_j^{(c)} h)}, \quad B_{jn} = \frac{\int_{-1}^1 \psi_n \sinh((\pi j - \frac{\pi}{2})y) dy}{\mu_j^{(s)} \sinh(\mu_j^{(s)} h)}.$$

Подставим разложения (13) и (14) в уравнение пластины (12), получим

$$\begin{aligned} & -\alpha h^2 Fr^2 \xi^2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n^e \psi_n^e + \beta(1 - i\xi\varepsilon) \sum_{n=1}^{\infty} a_n^e [\psi_{n,yyyy}^e - 2\xi^2 \psi_{n,yy}^e + \xi^4 \psi_n^e] \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^e [-1_1 \xi^2 \psi_n^e + q_2 \psi_{n,yy}^3 + iq_3 \xi \psi_{n,y}^e] + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^e \psi_n^e - \\ & -\alpha h^2 Fr^2 \xi^2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n^o \psi_n^o + \beta(1 - i\xi\varepsilon) \sum_{n=1}^{\infty} a_n^o [\psi_{n,yyyy}^o - 2\xi^2 \psi_{n,yy}^o + \xi^4 \psi_n^o] + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^o [-1_1 \xi^2 \psi_n^o + q_2 \psi_{n,yy}^3 + iq_3 \xi \psi_{n,y}^o] + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^o \psi_n^o = \\ & = h\xi^2 Fr^2 (\sum_{n=1}^{\infty} a_n^e \phi_n^e(\xi, y, 0) + a_n^o \psi_n^o(\xi, y, 0)) - P_1^F P_2. \end{aligned} \quad (15)$$

Умножим (15) на $\psi_m^e(y)$ и проинтегрируем результат по y от -1 до 1, с учетом ортогональности мод получим бесконечную систему алгебраических уравнений (аналогично для нечётных мод)

$$\begin{aligned} & -\alpha h^2 Fr^2 \xi^2 a_m^e + \beta(1 - i\xi\varepsilon) [a_m^e (\lambda_m^e)^4 + a_m^e \xi^4 - 2\xi^2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n^e C_{nm}^e] + \\ & + [-q_1 \xi^2 a_m + q_2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n^e C_{nm}^e] + a_m^e + iq_3 \xi \sum_{n=1}^{\infty} a_n^o S_{nm} = \\ & = h\xi^2 Fr^2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n^e M_{nm}^e - P_1^F P_m, \quad m = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} C_{nm}^e &= - \int_{-1}^1 \psi_{n,y}^e(y) \psi_{m,y}^e(y) dy, \quad M_{nm}^e(\xi) = \int_{-1}^1 \psi_n^e(\xi, y, 0) \psi_m^e(y) dy, \\ S_{nm} &= \int_{-1}^1 \psi_{n,y}^o(y) \psi_m^e(y) dy, \quad P_m^e = \int_{-1}^1 P_2(y) \psi_m^e(y) dy. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем две бесконечных системы алгебраических уравнений для поиска a_n^e и a_n^o . Системы перевязаны из-за наличия слагаемых с $iq_3 \xi$ в обеих системах.

Если $q_3 = 0$, т.е. $Q_{xy} = 0$, то искать разложение по нечётным модам не нужно и прогиб льда будем симметричным по y . В ином случае нечётные моды останутся, и прогиб льда уже не будет симметричным. Полученную систему уравнений можно представить в матричной форме

$$A^e \vec{d}^e + iS \vec{d}^o = -\vec{P}, \quad A^o \vec{d}^o + i\bar{S} \vec{d}^e = 0, \quad (16)$$

где матрицы A имеют вид

$$A^e = [(1 - \alpha h^2 Fr^2 \xi^2)I + \beta(1 - i\xi\varepsilon)D^e + Q^e - h\xi^2 Fr^2 M^e],$$

$$A^o = [(1 - \alpha h^2 Fr^2 \xi^2)I + \beta(1 - i\xi\varepsilon)D^o + Q^o - h\xi^2 Fr^2 M^o].$$

Здесь

$$\begin{aligned} D^e &= \text{diag}((\lambda_m^e)^4 + \xi^4) - 2\xi^2 C^e, \quad C^e = C_{nm}^e, \\ Q^e &= \text{diag}(-q_1 \xi^2) + q_2 C^e, \quad M^e = M_{nm}^e, \quad S = q_3 \xi S_{nm}, \\ D^o &= \text{diag}((\lambda_m^o)^4 + \xi^4) - 2\xi^2 C^o, \quad C^o = C_{nm}^o, \\ Q^o &= \text{diag}(-q_1 \xi^2) + q_2 C^o, \quad M^o = M_{nm}^o, \quad \bar{S} = q_3 \xi \bar{S}_{nm}, \end{aligned}$$

diag – диагональная матрица. Для поиска решения матричных уравнений (16) мы ограничиваем число уравнений в полученной бесконечно системе уравнений, оно же число мод в разложении (14), конечным числом N_{mod} . Затем, так как в уравнения (16) входят комплексные коэффициенты, \vec{d}^e и \vec{d}^o будем искать в виде $\vec{d}^e = \vec{d}^{eR} + i\vec{d}^{eI}$ и $\vec{d}^o = \vec{d}^{oR} + i\vec{d}^{oI}$. Первыми определяются коэффициенты $\vec{d}^{eR}(\xi)$. Затем последовательно определяются $\vec{d}^{oR}(\xi)$, $\vec{d}^{eI}(\xi)$ и $\vec{d}^{oI}(\xi)$. После определения этих коэффициентов прогибы льда $w(x, y)$ в системе координат, движущейся с нагрузкой, восстанавливаются через обратное преобразование Фурье

$$w(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=1}^{N_{mod}} \int_{-\infty}^{\infty} (a^{eR} + ia^{eI}) \psi_n^e(y) e^{i\xi x} + (a^{oR} + ia^{oI}) \psi_n^o(y) e^{i\xi x} d\xi. \quad (17)$$

Верхний и нижний пределы интегрирования в несобственных интегралах в (17) ограничивается конечным значением N_ξ и $-N_\xi$ соответственно, и полученные определенные интегралы вычисляются численно.

3. Численные результаты

Задача определения прогибов ледового покрова с неравномерным сжатием, вызванного движущейся нагрузкой, решается численно для пресноводного льда со следующими параметрами: $\rho_i = 917 \text{ кг/м}^3$, $E = 4.2 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$, $\nu = 0.3$, $\tau = 0.1 \text{ с}$, $P_0 = 1000 \text{ Па}$, $h_i = 0.1 \text{ м}$, $L = 10 \text{ м}$ и $H = 5 \text{ м}$. Рассматривается внешняя нагрузка (6), приложенная к площадке $2 \text{ м} \times 2 \text{ м}$. Скорость движения нагрузки $U = 3 \text{ м/с}$. Ее значение выбирается в соответствии с критическими скоростями гидроупругих волн, распространяющихся в замороженном канале, которые были вычислены в [4], и характеристической длиной ледового покрова $(D/\rho_l g)^{1/4}$, равной 2.48 м в рассматриваемом случае. Основными варьируемыми параметрами в расчетах являются безразмерные параметры сжатия q_1 , q_2 и q_3 . В линейной теории гидроупругости, если максимальное значение сжимающих напряжений Q в плоскости xy превышает значение $2\sqrt{\rho_l g D}$, то скорости распространения гидроупругих волн, создаваемых волн, могут стать отрицательными (см. [5]). В этом случае модель становится нефизичной. В этой работе будут рассматриваться только сжимающие напряжения, не превышающие критического значения $2\sqrt{\rho_l g D}$. Значения Q регулируются значениями \bar{Q} по формулам $Q_x = \bar{Q}_x \sqrt{\rho_l g D}$, $Q_y = \bar{Q}_y \sqrt{\rho_l g D}$ и $Q_{xy} = \bar{Q}_{xy} \sqrt{\rho_l g D}$, где $0 < \bar{Q}_{x,xy,y} < 2$.

Точность вычислений зависит от числа N_{mod} и метода вычисления интегралов в (17). Сходимость интеграла оценивается нормой $\max|w_{N_{\xi 1}, \nabla_{\xi 1}}(x, y) - w(x, y)_{N_{\xi 2}, \nabla_{\xi 2}}|$, где N_{xi} – верхний предел интегрирования, ∇_{ξ} – размер шага по ξ в интегралах (17). Численные расчеты показали, что все функции от ξ , входящие в интегралы, быстро затухают и являются достаточно гладкими для всех наборов параметров задачи, исследуемых в данной работе. Поэтому интегралы в обратном преобразовании Фурье вычисляются методом трапеций. Тестовые расчеты показали, что для значения указанной нормы, не превышающей 10^{-5} , достаточно взять $N_{\xi} = 50$ и 600 шагов по ξ от 0 до N_{ξ} . Сходимость численного решения в целом оценивается нормой $\max|w_{N_{mod 1}}(x, y) - w(x, y)_{N_{mod 2}}|$. Тестовые расчеты показали, что для сходимости решения с точностью до 10^{-5} достаточно взять 5 мод, с точностью до 10^{-6} 10 мод. На сходимость решения еще может влиять уменьшение параметра времени запаздывания τ и увеличение ширины канала с сохранением области приложенной нагрузки 2×2 метра (в этом случае необходимо аккуратнее вычислять преобразование Фурье для нагрузки). Однако эти параметры не изменяются в данной работе.

Вычисления проводились на языке MatLab версии R2021b. В процессе расчетов использовались только базовые операции и элементарные встроенные функции. Функции для вычисления интегралов и т.п. написаны самостоятельно.

Расчеты прогибов и деформаций проведены для наборов значений, показанных в таблице ниже

	U [м/с]	Q_x [Па м]	Q_y [Па м]	Q_{xy} [Па м]
I	3	0	0	0
Ia	3	$1.5 \cdot \sqrt{\rho_l g D}$	$0.1 \cdot \sqrt{\rho_l g D}$	$0.05 \cdot \sqrt{\rho_l g D}$
Iб	3	$0.1 \cdot \sqrt{\rho_l g D}$	$1.5 \cdot \sqrt{\rho_l g D}$	$0.1 \cdot \sqrt{\rho_l g D}$
Iв	3	$0.05 \cdot \sqrt{\rho_l g D}$	$0.1 \cdot \sqrt{\rho_l g D}$	$1.5 \cdot \sqrt{\rho_l g D}$
Iг	3	$0.95 \cdot \sqrt{\rho_l g D}$	$0.95 \cdot \sqrt{\rho_l g D}$	$0.95 \cdot \sqrt{\rho_l g D}$

Случай I соответствует движению нагрузки по ледовому покрову в канале без сжатия. Результаты вычислений показаны на рисунке 2. Прогибы показаны на рисунках (а) – трехмерный график и (в) – контурный график, удлинения соответственно на (б) и (г). Прогиб наблюдается локализованно под нагрузкой. Максимальные удлинения также наблюдаются под нагрузкой. И прогибы, и удлинения затухают в отдалении от нагрузки.

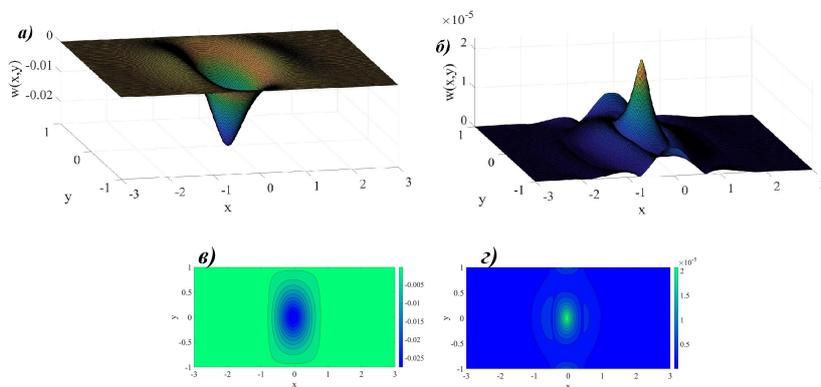


Рисунок 2. Безразмерные прогибы ледовой пластины (а), размерные удлинения в ледовой пластине (б). Соответствующие (а) и (б) контурные графики – (в) и (г). Результаты показаны для случая I.

Исследуем влияние продольного сжатия Q_x в рассматриваемом случае. Рассмотрим набор параметров Ia. Результаты вычислений для этого случая показаны на рисунке 3.

Значение Q_x в данном случае близко к критическому $2 \cdot \sqrt{\rho_l g D}$. Качественно форма прогибов и удлинений не отличаются от соответствующих величин в случае ледяного покрова без сжатия. Возмущенная часть ледового покрова немного увеличена вдоль оси x , по которой и рассматривается сжатие ледового покрова (появились два небольших пика сверху). Визуально, если судить по контурным графикам, длина "волны" немного уменьшается. Амплитуда прогибов стала больше примерно на 30 процентов. Значения амплитуд удлинений тоже увеличились.

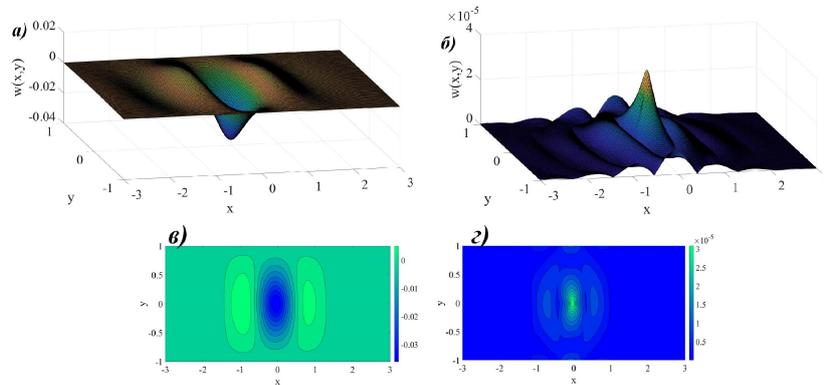


Рисунок 3. Безразмерные прогибы ледовой пластины (а), размерные удлинения в ледовой пластине (б). Соответствующие (а) и (б) контурные графики – (в) и (г). Результаты показаны для случая Ia.

Далее исследуем влияние поперечного сжатия Q_y . Рассмотрим набор параметров Ib. Результаты вычислений для этого случая показаны на рисунке 4. Значение Q_y равно значению Q_x из предыдущего случая, которое в текущем случае на порядок меньше поперечного сжатия. Как и сдвиговое сжатие Q_{xy} . Качественно формы прогибов и удлинений не отличаются от соответствующих величин в случае ледяного покрова без сжатия. Однако прогиб льда под нагрузкой стал более округлым и больше соответствует форме приложенного давления, когда в предыдущем случае была более "сплюснутой" вдоль оси y , и в случае без сжатия форма прогибов льда была более похожей на квадратную. Максимальные удлинения немного меньше, чем в случае большого продольного сжатия. Также на контурных графиках наблюдается небольшая асимметричность.

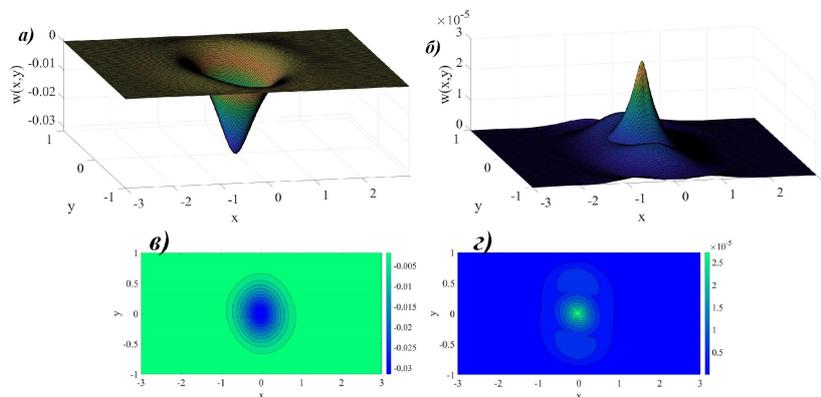


Рисунок 4. Безразмерные прогибы ледовой пластины (а), размерные удлинения в ледовой пластине (б). Соответствующие (а) и (б) контурные графики – (в) и (г). Результаты показаны для случая Ib.

Далее исследуем влияние сдвигового (комбинированного) сжатия Q_{xy} . Рассмотрим набор параметров Iv. Результаты вычислений для этого случая показаны на рисунке 5. В

этом случае значение Q_{xy} максимальное. В первую очередь отметим явную несимметричность прогибов и распределения удлинений относительно центральной линии канала. Сдвиговые удлинения наиболее слабо, из рассмотренных случаев, влияют на амплитуды прогибов. Амплитуды удлинений в целом соответствуют величинам для такого же значения Q_y . Заметим, что в целом продольное сжатие, т.е. сжатие вдоль линии движения нагрузки, влияет больше всего на несущую способность ледяного покрова (наиболее сильно увеличивает удлинения) и уменьшает длину волны (сужает области осцилляций и увеличивает их количество). Поперечные и сдвиговые сжатия влияют больше на форму колебаний. Влияние на значения амплитуд удлинений у них получилось примерно одинаковым.

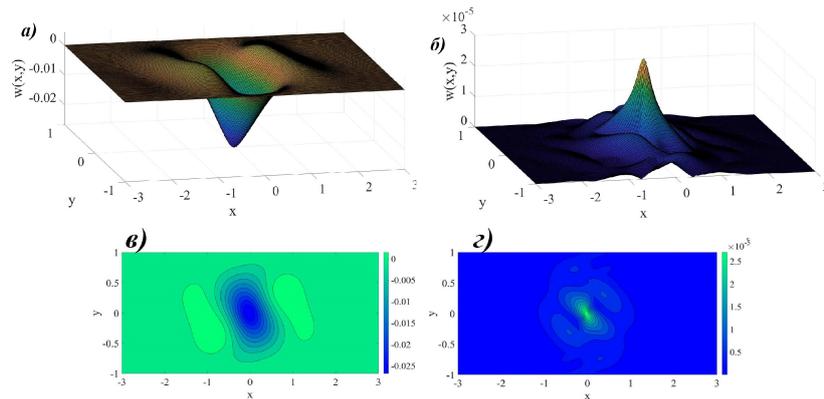


Рисунок 5. Безразмерные прогибы ледовой пластины (а), размерные удлинения в ледовой пластине (б). Соответствующие (а) и (б) контурные графики – (в) и (г). Результаты показаны для случая Iв.

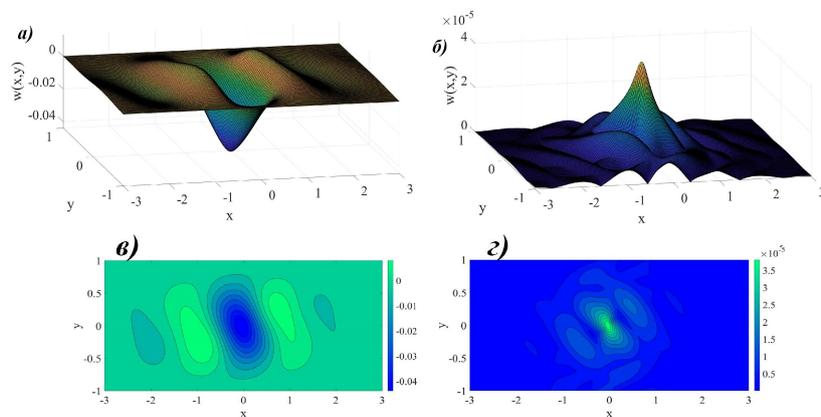


Рисунок 6. Безразмерные прогибы ледовой пластины (а), размерные удлинения в ледовой пластине (б). Соответствующие (а) и (б) контурные графики – (в) и (г). Результаты показаны для случая Iг.

Наиболее большим влиянием обладает комбинированный эффект сразу всех сжатий. Рассмотрим набор параметров Iг. Результаты вычислений для этого случая показаны на рисунке 6. Значения Q_x , Q_y и Q_{xy} равны друг другу и выбраны таким образом, что максимальное сжатие в плоскости xy равно $1.9 \cdot \sqrt{\rho_l g D}$. Визуально наблюдается комбинированный эффект всех трех случаев, описанных выше. Абсолютные значения амплитуд прогибов и максимальные значения удлинений в ледовом покрове в комбинированном случае Iг являются максимальными, несмотря на то, что по отдельности значение каждого сжатия меньше, чем в предыдущих случаях.

4. Заключение

Рассмотрена задача о движении внешней нагрузки с постоянной скоростью вдоль замороженного канала с неравномерным сжатием. Задача решена с помощью преобразования Фурье вдоль канала и методом нормальных мод для формы прогибов льда поперек канала. Решение для прогибов получено в виде интегралов в обратном преобразовании Фурье. Рассмотрен только случай движения нагрузки с постоянной скоростью вдоль центральной линии канала. Задача решена в системе координат, движущейся совместно с нагрузкой.

Для небольшой скорости движения нагрузки получены следующие выводы. Увеличение значений сжатия приводит к увеличению прогибов и удлинений в ледовом покрове для всех случаев. Продольные сжатия Q_x в большей степени влияют на удлинения в ледовом покрове, чем другие, Q_y и Q_{xy} . Продольные сжатия также влияют на область осциллирующих областей спереди и сзади нагрузки. При этом, если рассматривать осцилляции вдоль оси x как волновую структуру, то длина этих колебаний уменьшается. Поперечные и сдвиговые сжатия больше влияют на форму прогибов льда. Сдвиговые сжатия приводят к несимметричным прогибам ледового покрова. Максимальный эффект достигается в случае, когда увеличены все три значения сжимающих усилий.

Список литературы

1. Шишмарев К.А. Влияние ширины канала на вязкоупругие колебания ледового покрова под действием движущейся нагрузки // Известия АГУ. — 2016. — № 1(89). — С. 196–201.
2. Korobkin A.A., Khabakhpasheva T.I., Papin A.A. Waves propagating along a channel with ice cover // Eur J Mech B/Fluids. — 2014. — Vol. 47. — P. 166–175.
3. Shishmarev K.A., Sibiryakova T.A., Naydenova K.E., Virts R.A. The ice response to a pair motion of loads along a frozen channel // AIP Conference Proceedings 2528. — 2022. — 020019.
4. Шишмарев К.А. Поведение ледового покрова канала под действием движущейся внешней нагрузки : Дисс. . . кандидата наук / Шишмарев К.А. — Новосибирск, 2019.
5. Стурова И.В. Влияние неравномерного сжатия упругой пластины, плавающей на поверхности жидкости, на развитие нестационарных изгибно-гравитационных волн // Известия РАН. Механика жидкости и газа. — 2021. — № 2. — С. 63–71.