УДК 519.83

Об определении оптимальных стратегий налоговых проверок в иерархических играх

Григорьев Д.С.
Алтайский государственный университет, г. Барнаул
danila.grigoryev.2019@mail.ru

Аннотация

В данной работе рассматривается игра двух лиц исследуемая с применением модели взаимодействия налоговой службы и налогоплательщика. Поиск наилучшего гарантированного результата, оптимального выбора стратегий и их интерпретация осуществляют решение иерархических игр.

Исследование проводится методами математического и компьютерного моделирования.

Ключевые слова: иерархические игры, налоговые проверки, оптимальные стратегии, гарантированный результат.

1. Введение

Рассмотрим игру 2-х лиц в нормальной форме

$$\Gamma = \langle X, Y, F(x,y), G(x,y) \rangle ,$$

где X, Y – множества стратегий первого и второго игроков, соответственно, являющиеся компактами; $F(x,y)$, $G(x,y)$ – непрерывные функции выигрыша игроков [1, 2].

Пусть $T(I)$ – налоговое обязательство, соответствующее доходу I. Тогда поведение налогоплательщика описывается функцией, определяющей величину декларируемого дохода в зависимости от реального дохода I. Налоговой службой устанавливается частота проверок налогоплательщиков $p(r)$, где r – декларируемый доход налогоплательщика.

В случае уклонения устанавливается штраф пропорциональный скрытому доходу в размере $H(I,r) = T(I) - T(r) + \delta(I-r)$. Проверка всегда выявляет реальный доход налогоплательщика.

Налоговое обязательство задаётся функцией вида $T(I) = tI$. Тогда штраф за уклонение имеет вид $H(I,r) = (t+\delta)(I-r)$, где $t, \delta \in [0,1]$ – ставка налога и штрафная ставка соответственно [3].

Функция выигрыша налогоплательщика представляет собой разницу между истинным доходом и налоговыми выплатами, которую налогоплательщик стремится максимизировать:

$$G(p,r) = I - tr - p(t+\delta)(I-r), \quad r \in [0, I].$$

Пусть c – стоимость налоговой проверки налогоплательщика. Чистый доход налоговых органов состоит из суммы дохода от налогообложения (выплаты с декларируемого дохода налогоплательщика) и собранных штрафов (по результатам проверок) за вычетом общей стоимости проверки. Цель налоговых органов – максимизация их ожидаемого дохода [3]:

$$F(p,r) = tr + p(t+\delta)(I-r) - pc, \quad p \in [0,1].$$

Для описанной модели налоговой службы и налогоплательщика ставится задача применения методов математического и компьютерного моделирования взаимодействия игроков. А именно, задача определения гарантированного результата (дохода) налоговой службы на основе иерархических игр Γ_1, Γ_2 и определения ε-оптимальных стратегий.

2. Оптимальные стратегии взаимодействия налоговой службы и налогоплательщика

Игра Γ_1. Налоговая служба сообщает частоту проверок $p \in [0,1]$ налогоплательщику. Затем налогоплательщик декларирует доход $r \in [0, I]$, зная p. Схематичная запись: $p\ 2 \to r$.

Тогда гарантированный доход налоговой службы определяется

$$F_1 = F(p, r),$$

где $R(p) = G(p, r)$ – множество наилучших ответов второго игрока на выбор первого игрока.

Обозначим гарантированный результат стратегии p через

$$W(p) = F(p, r).$$

Определение 1. *Пусть задано $\varepsilon > 0$. Стратегия первого игрока p^ε называется ε-оптимальной в игре Γ_1, если $W(p^\varepsilon) \geq F_1 - \varepsilon$ [2].*

Множество наилучших ответов налогоплательщика находится с помощью линейной по переменной r функции $G(p, r) = I - p(t+\delta) I + [p(t+\delta) - t] r$. Следовательно, в зависимости от углового коэффициента вычисляется максимум функции G на отрезке $[0, I]$.

Если $p(t+\delta) - t < 0$, налогоплательщик декларирует доход $r = 0$ и его прибыль составляет $G = I - p(t+\delta) I$, что соответствует штрафу, накладываемому на весь доход. В случае $p(t+\delta) - t > 0$ в точке $r = I$ функция G имеет максимальное значение равное $(1-t) I$, что соответствует честной уплате налогов. При $\widetilde{p} = \frac{t}{t+\delta}$ налогоплательщик не может принять решения, уклоняться или нет, поэтому он может декларировать любое значение из $[0, I]$. В связи с этим данный случай объединяется со случаем $p > \frac{t}{t+\delta}$. Тогда

$$r(p) = \begin{cases} 0, & p < \widetilde{p}, \\ i, & p \geq \widetilde{p}. \end{cases}$$

Если $p < \widetilde{p}$, то налогоплательщик уклоняется и декларирует $r = 0$. Тогда $F(p) = p(t+\delta) I - pc = [(t+\delta) I - c] p$. Предположим, что выполняется условие $(t+\delta) I - c > 0$, тогда наибольшее значение функции налоговой службы будет достигать в точке $p \to \widetilde{p}^-$:

$$F(p) = F(\widetilde{p}) = \left(I - \frac{c}{t+\delta}\right) t.$$

Если $p \geq \widetilde{p}$, то $r = I$. При этом $F = tI - pc$, и функция убывает, так как $c > 0$, следовательно, максимума функция достигает в точке $\widetilde{p}$:

$$F = \left(I - \frac{c}{t+\delta}\right) t,$$

а наилучший гарантированный результат налоговой службы в игре Γ_1 равен $F_1 = \left(I - \frac{c}{t+\delta}\right) t$ и $p^\varepsilon = \frac{t}{t+\delta} + \varepsilon$. Получена ε-оптимальная стратегия.

Вывод: для обеспечения гарантированного дохода налоговой службы равного $\left(I - \frac{c}{t+\delta}\right) t$ необходимо проводить проверок налогоплательщиков больше, чем $\frac{t}{t+\delta}$ на величину ε.

Игра Γ_2. Налоговая служба перед выбором p имеет полную информацию об r. Осуществляя первый ход, налоговая служба сообщает налогоплательщику стратегию вида $f : Y \to X$. Схема последовательности ходов имеет запись: $f \xrightarrow{2} r \xrightarrow{1} p = f(r)$. Для определения гарантированного дохода налоговой службы F_2 потребуется определение следующих величин и множеств:

- $G_2 = \max\limits_{r\in[0,I]} \min\limits_{p\in[0,1]} G(p,r)$ – гарантированная прибыль налогоплательщика, если налоговая служба применяет по отношению к нему стратегию «наказания» f^H : $f^H(r) \in \operatorname{Arg}\max\limits_{p\in[0,1]} G(p,r), \forall r \in [0, I]$;
- $E = \operatorname{Arg}\max\limits_{r\in[0,I]} \min\limits_{p\in[0,1]} G(p,r)$ – множество максиминных стратегий налогоплательщика;
- $D = \{(p,r) \in [0,1] \times [0,I] |\, G(p,r) > G_2\}$;
- $K = \begin{cases} \sup\limits_{(p,r)\in D} F(p,r), & D \neq \emptyset \\ -\infty, & D = \emptyset \end{cases}$;
- $M = \min\limits_{r\in E} \max\limits_{p\in[0,1]} F(p,r)$.

Теорема 1 (теорема Гермейера)**.** *Наилучший гарантированный результат первого игрока в игре* Γ_2 *равен* $F_2 = [K, M]$.

Определение 2. *Пусть задано* $\varepsilon > 0$. *Стратегия первого игрока* p^ε *называется* ε*-оптимальной в игре* Γ_2, *если* $W(p^\varepsilon) \geq F_2 - \varepsilon$ *[2].*

Гарантированная прибыль налогоплательщика

$$G_2 = \max_{r\in[0,I]} \min_{p\in[0,1]} \{I - tr - p(t+\delta)(I-r)\}.$$

Так как G линейно зависит от p и $(t+\delta)(I-r) > 0$, то минимум функции принимается при $p = 1$.

$$G_2 = \max_{r\in[0,I]} \{I - tr - (t+\delta)(I-r)\} = \max_{r\in[0,i]} \{[1-t-\delta] I + r\delta\} = (1-t) I.$$

Отсюда следует, что множество максиминных стратегий $E = \{I\}$.

Теперь определим множество D:

$$I - tr - p(t+\delta)(I-r) > (1-t) I$$

при ограничениях для r:

$$tr + p(t+\delta)(I-r) < tI \Rightarrow r < I$$

и ограничениях для p:

$$tr + p(t+\delta)(I-r) < tI \Rightarrow p < \frac{t}{t+\delta}.$$

Поскольку множество $D \neq \emptyset$, то $K = \{tr + p(t+\delta)(I-r) - pc\}$. При $r = I - \varepsilon$

$$K = \{t(I-\varepsilon) + p(t+\delta)(I-(I-\varepsilon)) - pc\} = \{tI - pc + (p(t+\delta) - t)\varepsilon\}.$$

Так как величина $(p(t+\delta) - t)\varepsilon$ мала при малом ε, то эта величина не значительно влияет на выбор значения p. Таким образом,

$$K = \max_{p<\frac{t}{t+\delta}} \{tI - pc + (p(t+\delta) - t)\varepsilon\} = t(I-\varepsilon),$$

$$M = \min_{r=I} \max_{p\in[0,1]} \{tr + p(t+\delta)(I-r) - pc\} = \max_{p\in[0,1]} \{tI - pc\} = tI.$$

В соответствии с теоремой Гермейера гарантированный доход налоговой службы в игре Γ_2 равен

$$F_2 = \max[t(I-\varepsilon), tI] = M = tI \text{ и } f^{\varepsilon}(r) = \begin{cases} \frac{\varepsilon}{c}, & r = I \\ 1, & r \neq I \end{cases}$$

Здесь $f^{\varepsilon}(r)$ – ε-оптимальная стратегия.

Вывод: гарантированный доход налоговой службы в модели игры Γ_2 больше, чем в игре Γ_1 засчет стратегии наказания, которую применяют в случае, когда декларируемый доход не соответствует доходу I. В ином случае проверки совершаются реже и определяются величиной равной $\frac{\varepsilon}{c}$.

3. Численное исследование взаимодействия налоговой службы и налогоплательщика

В качестве примера для вычислительных экспериментов рассмотрим игру налоговой службы и налогоплательщика, в которой параметры I, t, δ, c принимают следующие значения:

$$I = 100;\ t = 0,225;\ \delta = 0,15;\ c = 10.$$

Далее описываются задачи и методы вычислительных экспериментов. Основной задачей является задача нахождения оптимальной стратегии и оценки выигрыша налоговой службы в игре Γ_1. Вычисления проводятся по схеме решения дискретных игр.

Для каждого игрока в пакете Excel составляется таблица значений (выигрышей). Дискретные значения стратегии первого игрока изменяются от 0 до 1 с шагом 0,05, стратегии второго игрока изменяются от 0 до 100 с шагом 5. В результате матрицы выигрышей игроков имеют размерность 21×21.

Для определения гарантированного результата для налоговой службы в игре Γ_1 находится множество наилучших ответов налогоплательщика, то есть определяется величина декларируемого дохода, которая доставляет максимум прибыли при известной частоте проверок налоговой службы.

Далее определяется минимум по строке в матрице выигрышей первого игрока, учитывая множество наилучших ответов второго игрока, и находится максимум из этих значений.

Гарантированный выигрыш получается численно равным 16,5. Сравним его с аналитически вычисленным:

$$F_1 = \left(i - \frac{c}{t+\delta}\right)t = \left(100 - \frac{10}{0,225 + 0,15}\right) \cdot 0,225 = 16,5.$$

Результаты совпадают.

Определим гарантированный выигрыш налогоплательщика для решения игры Γ_2: находим наибольшую прибыль налогоплательщика, если налоговая служба применяет стратегию «наказания», то есть постоянно осуществляет проверки. Численное значение составляет $G_2 = 77,5$. Отсюда следует, что значение декларируемого дохода, при котором достигается гарантированный выигрыш налогоплательщика, равно 100.

Множество D будет представлять собой пары стратегий, при которых выполняется неравенство $G(p,r) > G_2$, то есть стратегии, где выигрыш налогоплательщика больше, чем его гарантированный выигрыш. Данное условие выполняется, если решения игроков будут в диапазоне: от 0 до 0,55 для налоговой службы и от 0 до 95 у налогоплательщика.

Для определения значений K находится максимум функции $F(p,r)$ на множестве D. Наибольшее значение функция принимает в точке $p = 0$, $r = 95$ и равно 23,375. Для вычисления значения M находится максимум функции $F(p,r)$ при декларируемом доходе налогоплательщика равном 100. Это значение $M = 22,5$ в точке $p = 0$, $r = 100$.

Так как $M > K$, то по теореме Гермейера гарантированный выигрыш налоговой службы равен 22,5. Сравнение полученного значения с аналитическим результатом

$$F_2 = tI = 0,225 \cdot 100 = 22,5$$

даёт их совпадение.

Список литературы

1. Дюбин Г.Н., Суздаль В.Г. Введение в прикладную теорию игр. — М. : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. — 336 с.

2. Васин А.А., Краснощеков П.С., Морозов В.В. Исследование операций: учеб. пособие для студ. вузов. — М. : Издательский центр «Академия», 2008. — 464 с.

3. Буре В.М., Кумачева С.Ш. Теоретико-игровая модель налоговых проверок с использованием статистической информации о налогоплательщиках // Вестник Санкт-Петербургского университета. — 2010. — № 4. — С. 16–24.