УДК 514.765

О дифференциально геометрических соотношениях на трехмерных унимодулярных группах Ли

Григорьев Д.С., Куркина М.В., Родионов Е.Д.
Алтайский государственный университет, г. Барнаул
Ханты-Мансийская государственная медицинская академия, г. Ханты-Мансийск
danila.grigoryev.2019@mail.ru, mavi@inbox.ru, edr2002@mail.ru

Аннотация

В данной работе изучается симметрический поток Риччи на трехмерных унимодулярных группах Ли с полусимметрической связностью. Уравнение потока в системе координат Дж.Милнора приводится к системе алгебраических и дифференциальных уравнений. Решая последовательно сначала подсистему из алгебраических уравнений и после подставляя полученное решение в систему дифференциальных уравнений, мы находим ограничение на симметрический поток Риччи на трехмерной унимодулярной группе с метрикой Дж. Милнора относительно полусимметрической связности. В качестве тестового примера рассматривается трехмерная группа $SU(2)$.

Ключевые слова: Симметрический поток Риччи, трехмерные унимодулярные группы Ли, группа $SU(2)$.

1. Введение

В данной работе симметрические потоки Риччи определяются на трехмерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой с полусимметрической связностью.

Пусть M — риманово многообразие размерности n. Определим на M полусимметрическую связность ∇ формулой

$$\nabla_X Y = \nabla^g_X Y + g(X,Y)V - g(V,Y)X,$$

где V – некоторое фиксированное левоинвариантное векторное поле, X и Y – произвольные векторные поля, ∇^g – связность Леви-Чивиты, $g(X,Y)$ – метрический тензор. Связность ∇ является метрической и впервые описана Э. Картаном в [1].

Определим на M однопараметрическое семейство римановых метрик $g(t)$ и запишем уравнение потока Риччи

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t) = -Ric(g(t)). \tag{1}$$

Уравнение (1) впервые исследовалось Р. Гамильтоном для связности Леви-Чивиты в [2]. Известно, что тензор Риччи полусимметрической связности, вообще говоря, не является симметрическим. Поэтому естественным является рассмотрение симметрической части тензора Риччи и симметрического потока Риччи вида

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t) = -Sym(Ric(g(t))). \tag{2}$$

Рассмотрен случай, когда G – трехмерная унимодулярная группа Ли. Тогда в алгебре Ли группы G существует ортобазис $\{E_1, E_2, E_3\}$, называемый базисом Дж. Милнора [3].

Рассмотрим на G семейство левоинвариантных римановых метрик Дж. Милнора, которые ранее изучались K.Onda и Д.Кнопфом-К.Мак'Леодом, при изучении потоков Риччи в случае связности Леви-Чивиты [4, 5].

$$g = A(\theta^1)^2 + B(\theta^2)^2 + C(\theta^3)^2,$$

где $\{\theta^i\}$ – кобазис к базису Дж. Милнора $\{E_i\}$ и $A, B, C > 0$.

Определим компоненты тензора Риччи в базисе Дж.Милнора метрики $g(t)$ в случае полусимметрической связности. Тогда система уравнений симметрического потока Риччи преобразуется в систему, содержащую три алгебраических и три дифференциальных уравнения (более подробно см. [6, 7]). В качестве тестового примера рассмотрим группу $SU(2)$. Случаи других унимодулярных групп Ли рассматриваются аналогично.

2. Случай SU(2)

Изучим симметрический поток Риччи группы $SU(2)$. Для этого определим компоненты тензора Риччи метрики $g(t)$

$$\begin{aligned}
Ric_{11} &= \frac{2BC - C^2 - B^2 + A^2 - 2Av_3^2 B\, C^2 - 2Av_2^2 B^2 C}{2BC},\\
Ric_{12} &= -\frac{1}{2}Bv_3 + \frac{1}{2}Av_3 - \frac{1}{2}Cv_3 + Bv_2Av_1,\\
Ric_{13} &= \frac{1}{2}Cv_2 - \frac{1}{2}Av_2 + \frac{1}{2}Bv_2 + v_1Av_3C,\\
Ric_{21} &= \frac{1}{2}Av_3 - \frac{1}{2}Bv_3 + \frac{1}{2}Cv_3 + Bv_2Av_1,\\
Ric_{22} &= -\frac{C^2 - 2AC - B^2 + A^2 + 2Av_3^2 B\, C^2 + 2Bv_1^2 A^2 C}{2AC},\\
Ric_{23} &= -\frac{1}{2}Cv_1 - \frac{1}{2}Av_1 + \frac{1}{2}Bv_1 + Bv_2v_3C,\\
Ric_{31} &= -\frac{1}{2}Av_2 - \frac{1}{2}Bv_2 + \frac{1}{2}Cv_2 + v_1Av_3C,\\
Ric_{32} &= \frac{1}{2}Bv_1 + \frac{1}{2}Av_1 - \frac{1}{2}Cv_1 + Bv_2v_3C,\\
Ric_{33} &= -\frac{-2AB + B^2 - C^2 + A^2 + 2Av_2^2 B^2 C + 2Bv_1^2 A^2 C}{2AB},
\end{aligned}$$

где $V = \{v_1, v_2, v_3\}$, и запишем уравнение симметрического потока Риччи на группе Ли $SU(2)$ с полусимметрической связностью. Для этого перепишем уравнение (2) в координатном виде:

$$\begin{aligned}
&- Bv_3 + Av_3 + 2Bv_2Av_1 = 0,\\
&Cv_2 - Av_2 + 2v_1Av_3C = 0,\\
&- Cv_1 + Bv_1 + 2Bv_2v_3C = 0,\\
&\frac{2BC - C^2 - B^2 + A^2 - 2Av_3^2 BC^2 - 2Av_2^2 B^2 C}{BC} = -\frac{2dA}{dt},\\
&- \frac{C^2 - 2AC - B^2 + A^2 + 2Av_3^2 BC^2 + 2Bv_1^2 A^2 C}{AC} = -\frac{2dB}{dt},\\
&- \frac{-2AB + B^2 - C^2 + A^2 + 2Av_2^2 B^2 C + 2Bv_1^2 A^2 C}{AB} = -\frac{2dC}{dt}.
\end{aligned}$$

Выделим подсистему из алгебраических уравнений и найдем ее решения

$$\begin{gathered}1)\ A=A, B=B, C=C, V=(0,0,0).\\ 2)\ A=C, B=B, C=C, V=(0,v_2,0).\\ 3)\ A=A, B=C, C=C, V=(v_1,0,0).\\ 4)\ A=B, B=B, C=C, V=(0,0,v_3).\end{gathered}$$

Заметим, что первый случай исследовался Д.Кнопфом и К.МакЛеодом [5]. Запишем уравнение симметрического потока Риччи для решения 2) алгебраической подсистемы.

$$\begin{cases}\dfrac{dC}{dt}=\dfrac{B}{2C}+v_2^2BC-1\\ \dfrac{dB}{dt}=-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{B^2}{C^2}\end{cases}$$

С начальными условиями $B(0)=B_0$, $C(0)=C_0$

Введем замены $y=\frac{B}{C}$ и $x=v_2^2BC-1$. Вычислим производные:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{d}{dt}\Big(v_2^2BC-1\Big)=v_2^2\cdot\Big(\frac{dB}{dt}\cdot C+B\cdot\frac{dC}{dt}\Big)=v_2^2\cdot\Big(\Big(-\frac{1}{2}\cdot\frac{B^2}{C^2}\Big)\cdot C+B\cdot\Big(\frac{B}{2C}+v_2^2BC-1\Big)\Big)=$$

$$=v_2^2\cdot\Big(-\frac{B^2}{2C}+\frac{B^2}{2C}+B\cdot\Big(v_2^2BC-1\Big)\Big)=v_2^2B\cdot\Big(v_2^2BC-1\Big)=v_2^2Bx$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{d}{dt}\Big(\frac{B}{C}\Big)=\frac{1}{C^2}\cdot\Big(\frac{dB}{dt}\cdot C-B\cdot\frac{dC}{dt}\Big)=\frac{1}{C^2}\cdot\Big(\Big(-\frac{1}{2}\cdot\frac{B^2}{C^2}\Big)\cdot C-B\cdot\Big(\frac{B}{2C}+v_2^2BC-1\Big)\Big)=$$

$$=\frac{1}{C^2}\cdot\Big(-\frac{B^2}{2C}-\frac{B^2}{2C}-B\cdot\Big(v_2^2BC-1\Big)\Big)=\frac{1}{C^2}\cdot\Big(-\frac{B^2}{C}-B\cdot\Big(v_2^2BC-1\Big)\Big)=-\frac{1}{C}\cdot(y^2+xy)$$

Получим систему:

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dt}=-\frac{(y^2+xy)}{C}\\ \dfrac{dx}{dt}=v_2^2Bx\end{cases}$$

В результате получаем дифференциальное уравнение:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{(y^2+xy)}{x}\cdot\frac{1}{v_2^2BC}=-\frac{(y^2+xy)}{x(x+1)}=-\frac{y^2}{x(x+1)}-\frac{y}{x+1}$$

Для простоты примем $\frac{dy}{dx}=y'$. Тогда получим дифференциальное уравнение Бернулли:

$$y'+\frac{y}{x+1}=-\frac{y^2}{x(x+1)}$$

Сведем уравнение к линейному дифференциальному уравнению введя замену $z=\frac{1}{y}\Rightarrow$ $\frac{dz}{dx}=-\frac{1}{x^2}\cdot\frac{dy}{dx}$. Получаем

$$\frac{dz}{dx}-\frac{z}{x+1}=\frac{1}{x(x+1)}$$

Решением линейного неоднородного дифференциального уравнения первого порядка - $z'+p(x)z=q(x)$ является $z=e^{-P(x)}\cdot\int q(x)e^{P(x)}\,\mathrm{d}x$, где $P(x)=\int p(x)\,\mathrm{d}x$

Посчитаем отдельно:

$$P(x)=\int\limits_0^t-\frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x=-\ln|x+1|+\ln|x_0+1|=\ln\frac{x_0+1}{x+1}$$

$$\int_0^t \frac{1}{x(x+1)} e^{\ln\frac{x_0+1}{x+1}}\,\mathrm{d}x = (x_0+1)\int_0^t \frac{1}{x(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = (x_0+1)\int_0^t \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \left(\ln\frac{|x|}{x+1} + \frac{1}{x+1} - \ln\frac{|x_0|}{x_0+1} - \frac{1}{x_0+1}\right)\cdot(x_0+1)$$

Итак, решение имеет вид

$$z = (x+1)\cdot\left(\ln\frac{|x|}{x+1} + \frac{1}{x+1} - \ln\frac{|x_0|}{x_0+1} - \frac{1}{x_0+1}\right)$$

Возвращаемся к заменам и в итоге получает решение исходного дифференциального уравнения:

$$\frac{C}{B} = v_2^2 BC\cdot\left(\ln\frac{|v_2^2BC-1|}{v_2^2BC} + \frac{1}{v_2^2BC} - \lambda_0\right),$$

где $\lambda_0 = \ln\frac{|v_2^2B_0C_0-1|}{v_2^2B_0C_0} + \frac{1}{v_2^2B_0C_0}$

3. Заключение

В работе получено ограничение на симметричный поток Риччи для полусимметрической связности в случае группы Ли $SU(2)$. Случаи других унимодулярных групп Ли рассматриваются аналогично. Для части из них получено решение в явном виде.

Список литературы

1. Cartan E. Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée (deuxième partie) // Ann. Ecole Norm. Sup. — 1925. — Vol. 42. — P. 17–88.

2. Hamilton R.S. Three-manifolds with positive Ricci curvature // J. Differential Geom. — 1982. — Vol. 17(2). — P. 255–306.

3. Milnor J. Curvature of left invariant metric on Lie groups // Advances in mathematics. — 1976. — Vol. 21. — P. 293–329.

4. Onda K. Ricci Flow on 3-dimensional Lie groups and 4-dimensional Ricci-flat manifolds. — 2010.

5. Knopf D., McLeod K. Quasi-Convergence of Model Geometries Under the Ricci Flow // Communications in analysis and geometry. — 2001. — Vol. 9, no. 4. — P. 879–919.

6. Klepikov P.N., Rodionov E.D., Khromova O.P. Einstein's Equation on Three-Dimensional Metric Lie Groups with Vector Torsion // Journal of Mathematical Sciences. — 2023. — Vol. 276, no. 6. — P. 733–745.

7. Павлова А.А., Хромова О.П. О симметрических потоках Риччи полусимметрических связностей на трехмерных метрических группах Ли // Материалы Международной конференции “Лобачевские чтения”. — Казань : Изд-во КФУ, 2022. — С. 96–97.

8. Клепиков П.Н., Родионов Е.Д., Хромова О.П. Инвариантные солитоны Риччи на метрических группах Ли с полусимметрической связностью // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — М. : ВИНИТИ РАН, 2023. — С. 19–29. — DOI: https://doi.org/10.36535/0233-6723-2023-222-19-29.

9. Клепиков П.Н., Родионов Е.Д., Хромова О.П. Трехмерные неунимодулярные группы Ли с римановой метрикой инвариантного солитона Риччи и полусимметрической метрической связностью // Известия вузов. Математика. — 2022. — № 5. — С. 80–85. — DOI: https://doi.org/10.26907/0021-3446-2022-5-80-85.

10. Клепиков П.Н., Родионов Е.Д., Хромова О.П. Инвариантные солитоны Риччи на трехмерных неунимодулярных группах Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой и полусимметрической связностью // Сибирские электронные математические известия. — 2023. — Т. 20, № 1. — С. 48–61. — DOI: https://doi.org/10.33048/semi.2023.20.005.