УДК 372.851

О некоторых отображениях плоскости в себя

Плотникова Е.А., Саженков А.Н., Саженкова Т.В.
Новосибирский государственный университет, г. Новосибирск
Алтайский государственный университет, г. Барнаул
pselena@gmail.com , sazhenkov_ an@mail.ru, t.sazhenkova@gmail.com

Аннотация

В работе представлен ряд задач про отображения плоскости в себя, предназначенных для дополнительного факультативного практикума по анализу и геометрии для студентов младших курсов. Занятия на практикуме направлены на развитие аналитических способностей по применению функциональных и топологических понятий в решении задач олимпиадного и исследовательского характера.

Ключевые слова: Образы и прообразы множеств при отображениях, выпуклые множества, открытые множества, отрезки и прямые.

Факультативная работа по подготовке студентов к математическим соревнованиям и научно-исследовательской работе даёт определённую возможность выработки у учащихся строгого логически последовательного мышления. Геометрически образные рассуждения позволяют объединять в себе аналитические идеи, а тем самым даёт возможность успешного продвижения в исследованиях [1–4].

Далее представлен ряд задач для факультативного практикума по указанной в названии теме для использования в практической исследовательской работе.

1. Задано отображение плоскости в себя, при котором расстояния между точками сохраняется. Докажите, что образом плоскости при этом отображении является вся плоскость.

Пусть Y – произвольная точка плоскости, A и B – некоторые точки плоскости, A' и B' – их образы. Если Y совпадает с A' или B', то для Y нашёлся её прообраз. Пусть точка Y отлична от обеих точек. Рассмотрим точки C и D такие, что треугольники ACB, ADB и $A'YB'$ равны (C и D – по разные стороны от прямой AB). Тогда одна из точек C или D перейдёт в точку Y.

2. Пусть взаимно однозначное отображение плоскости на себя, переводит окружность в окружность. Докажите, что отображение переводит прямые в прямые.

Заметим, что прообразом прямой является прямая. Во-первых, очевидно, что если точки A', B' и C' лежат на одной прямой, то и их прообразы A, B и C лежат на одной прямой. Отсюда следует, что прообразы точек прямой лежат на одной прямой. Допустим, прообраз прямой l является частью прямой m. Это означает, что найдётся точка X на прямой m, образ которой Y не лежит на l. Выберем три различные точки A', B' и C' на прямой l. Прообразы A, B и C лежат на прямой m. Построим окружности с диаметрами XA, XB и XC. Эти окружности попарно касаются друг друга, и каждая из них имеют единственную общую точку с прообразом прямой l. По условию окружности переходят в окружности, и имеется взаимная однозначность. Это означает, что образы окружностей попарно касаются друг друга в точке Y и должны касаться прямой l. Однако, если три окружности попарно касаются друг друга в одной точке, то, по крайней мере, одна из них должна быть внутри другой.

Теперь легко заметить, что прообразом окружности является окружность. Из этого следует, что обратное к обратному переводит прямые в прямые.

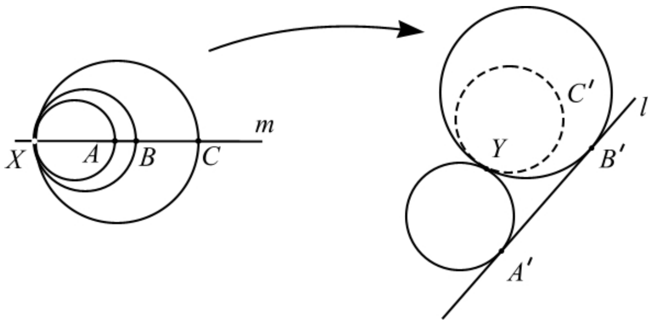

Рисунок 1. Чертеж к задаче 2

3. Взаимно однозначное отображение плоскости в себя переводит отрезки в выпуклые множества. Докажите, что это отображение прямые переводит в прямые.

Будем обозначать A' – образ точки A при рассматриваемом отображении; l_{AB} и $l_{A'B'}$ – прямые, проходящие через точки A и B, A' и B' соответственно; I_{AB} и $I_{A'B'}$ – отрезки с концами в точках A и B, A' и B' соответственно; l'_{AB} и I'_{AB} образы l_{AB} и I_{AB}; α' – образ всей плоскости при заданном отображении.

Из условия задачи и определения выпуклого множества непосредственно следует, что образ выпуклого множества есть выпуклое множество. В частности, $I_{A'B'} \subset I'_{AB}$, I'_{AB}, l'_{AB} и α' – выпуклые множества.

Лемма 1. *I'_{AB} как множество плоскости не имеет внутренних точек.*

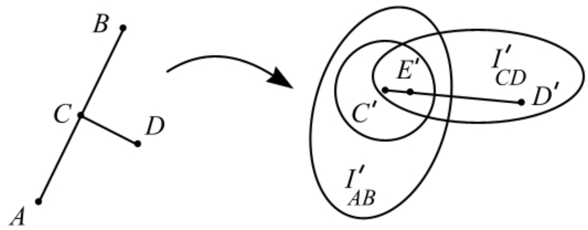

Рисунок 2. Чертеж к лемме 1

Доказательство. Пусть для некоторой точки C её образ C' является внутренней точкой множества I'_{AB}, то есть круг ненулевого радиуса с центром в точке C' содержится в I'_{AB}. Выберем точку $D \notin l_{AB}$. В силу взаимной однозначности отображения имеет место $D' \notin I'_{AB}$. Поскольку $I_{C'D'} \subset I'_{CD}$, найдётся точка E' внутри круга, отличная от центра круга, принадлежащая $I_{C'D'}$. Это означает, что точка E, отличная от C лежит на обоих отрезках AB и CD. □

Лемма 2. $I'_{AB} \subset l_{A'B'}$.

Доказательство. В противном случае I'_{AB} имеет внутреннюю точку. □

Лемма 3. $I'_{AB} = I_{A'B'}$

Доказательство. Допустим, точка C при отображении из отрезка I_{AB} попала вне отрезка $I_{A'B'}$. Можно считать, что точка B' лежит между точками A' и C'. Тогда $B \notin I_{AC}$, следовательно $B' \notin I'_{AC}$. Противоречие. □

Лемма 4. $l'_{AB} = l_{A'B'} \cap \alpha'$.

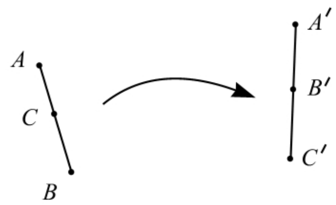

Рисунок 3. Чертеж к лемме 3

Доказательство. Очевидно, что $l'_{AB} \subset \alpha'$. Включение $l'_{AB} \subset l_{A'B'}$ доказывается аналогично доказательству леммы 3. Итак, $l'_{AB} \subset l_{A'B'} \cap \alpha'$. Пусть теперь $C' \in l_{A'B'} \cap \alpha'$. Если точка C' лежит на отрезке $I_{A'B'}$, то по лемме 3 она лежит на отрезке I'_{AB} и, значит, на прямой l'_{AB}. Пусть точка C' лежит вне отрезка $I_{A'B'}$, Без ограничения общности можно считать, что точка B' лежит между точками A' и C'. Предположим, что точка C не лежит на прямой l_{AB}. Тогда отрезок I_{AC} имеет единственную общую точку с отрезком I_{AB}. Следовательно, отрезки $I_{A'C'}$ и $I_{A'B'}$ тоже должны иметь единственную общую точку. Противоречие. $\square$

Лемма 5. *Множество α' является выпуклым непустым открытым множеством на плоскости.*

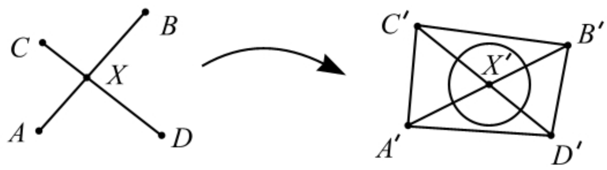

Рисунок 4. Чертеж к лемме 5

Доказательство. Очевидно, что α' непустое множество, оно выпуклое как образ выпуклого множества. Осталось заметить, что оно открытое множество, то есть для любой точки $X' \in \alpha'$ найдётся круг ненулевого радиуса с центром в точке X' содержащийся в α'.

Построим отрезки I_{AB} и I_{CD}, так что эти отрезки пересекаются в точке X, являющейся внутренней точкой для обоих отрезков. Тогда отрезки $I_{A'B'}$ и $I_{C'D'}$ пересекаются в точке X', являющейся внутренней точкой для обоих отрезков. Так как α' выпуклое множество и четырёхугольник с вершинами в точках A', B', C' и D' является невырожденным найдётся круг ненулевого радиуса с центром в точке X' содержащийся в этом четырёхугольнике и, одновременно, в α'. $\square$

Завершаем решение поставленной задачи.

Рассмотрим образ произвольной прямой l'_{AB}. Поскольку $l'_{AB} = l_{A'B'} \cap \alpha'$ (лемма 4), её образом будет прямая, если $l_{A'B'}$ целиком содержится во множестве α'. Если не вся прямая $l_{A'B'}$ содержится во множестве α', то это прямая пересекает границу выпуклого множества α' в некоторой её точке X. Через точку X проведём опорную прямую к множеству α'. Выберем точку D' в α' и через неё проведем две прямых, пересекающих прямую $l_{A'B'}$ в точках Y и Z, лежащих в другой полуплоскости опорной прямой чем α'. Поскольку l'_{AB} и l'_{CD} не имеют общих точек, прямые l_{AB} и l_{CD} - параллельны. Точно также параллельными прямыми являются прямые l_{AB} и l_{ED}, кроме того, прямые l_{CD} и l_{ED} различные. Получили противоречие с пятым постулатом Евклида.

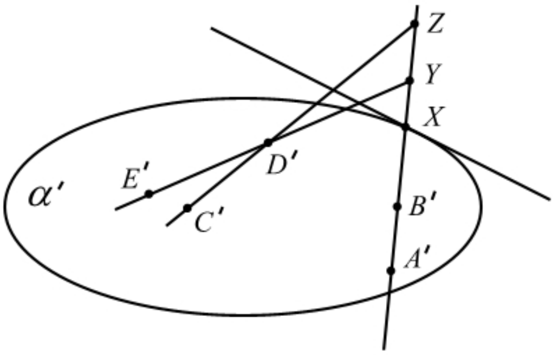

Рисунок 5. Чертеж к задаче 3

Список литературы

1. Саженков А.Н., Саженкова Т.В. О некоторых аспектах подготовки к студенческим математическим соревнованиям // МАК: “Математики - Алтайскому краю”: сборник трудов всероссийской конференции по математике. — Барнаул : Изд-во Алтайского госуниверситета, 2010.

2. Саженков А.Н., Саженкова Т.В. Дополнительное математическое образование как средство развития творческого потенциала студентов и школьников // Сборник научных статей международной школы-семинара “Ломоносовские чтения на Алтае”. — Барнаул : Изд-во Алтайского госуниверситета, 2011.

3. Саженков А.Н. Геометрия и анализ в задачах математических олимпиад // Труды семинара по геометрии и математическому моделированию. — Барнаул : Изд-во Алтайского госуниверситета, 2013.

4. Плотникова Е.А., Саженков А.Н., Саженкова Т.В. Геометрический факультатив-практикум в научно-исследовательской работе старшеклассников и студентов младших курсов // Труды семинара по геометрии и математическому моделированию. — 2017. — № 3.