УДК 517.765

К условию сходимости монотонных последовательностей на гипердействительных структурах

Дронов С.В.
Алтайский государственный университет
dsv@math.asu.ru

Аннотация

В рамках аксиоматики альтернативной теории множеств (AST) построение структуры, служащей аналогом класса действительных чисел, главную роль играет выбор основного сегмента класса N. При этом, если выбранный сегмент обладает достаточной степенью нечеткости, то в итоговой гипердействительной структуре даже монотонные ограниченные последовательности не обязаны иметь пределов. В работе предлагаются условия, которые гарантируют наличие или отсутствие предела в этих структурах. Уточняются предыдущие результаты автора.

1. Постановка задачи

Работа выполнена в рамках аксиоматики альтернативной теории множеств (AST) и продолжает цикл работ автора (см. [1, 2] и библиографию там), посвященный переосмыслению основных теорем математического анализа с точки зрения этой теории. AST постулирует существование внутри класса натуральных чисел нечетких начальных отрезков (сегментов), которые могут исполнять роль некоторых "текущих горизонтов недостижимости" (точнее и подробнее вопрос изложен в [3]).

Сегмент A называют мультипликативным, если он замкнут по отношению к умножению своих элементов: $(\forall n, m)\ n, m \in A \ \Rightarrow\ nm \in A$. Каждый такой сегмент автоматически оказывается также и замкнутым относительно сложения, аддитивным. Сегменты, не являющиеся аддитивными, уже не позволяют строить на своей основе конструкции, хотя бы отдаленно похожие на действительную прямую, поэтому, как правило, не рассматриваются.

Основой для дальнейших, после выбора основного сегмента A, построений служит класс A-ограниченных рациональных чисел $\mathbf{BQ}(A) = \{z \in Q\ :\ (\exists n \in A)\ |x| < n\}$. Говорят, что A-последовательность $z_n,\ n \in A$ элементов $\mathbf{BQ}(A)$ имеет предел, если найдется такой $z \in \mathbf{BQ}(A)$, что

$$(\forall k \in A)(\exists n_0 \in A)(\forall n \in A)\ n \geqslant n_0 \Rightarrow |z_n - z| \leqslant \frac{1}{k}.$$

Это определение фактически то же, что дает классический математический анализ, но оказывается, что даже монотонность и ограниченность последовательности в аксиоматике AST не обеспечивает существование у нее предела (это продемонстрировано в [1], там же обсуждаются причины и механизм этого явления). Поэтому нужны дополнительные условия, гарантирующее его существование, или дающие уверенность в том, что предел не существует.

Основная задача работы – для A-последовательности вида

$$x_n = z - \frac{1}{g(n)}, \quad n \in A, \tag{1}$$

где $z \in \mathbf{BQ}(A)$, $g(n)$ положительна и монотонно возрастает, указать условия, необходимые и достаточные для существования ее предела в указанном смысле. Последовательность рассматриваемого вида, очевидно, ограничена и монотонно возрастает с ростом n.

2. Условия и пример

Всюду далее будем предполагать, что основной сегмент A мультипликативен, рассматриваемая последовательность имеет вид (1), где функция $g(n)$ монотонно возрастает, положительна и $(\forall n \in A)(\exists k_n \in A)\, g(n) \leqslant k_n$. В [1] были рассмотрены следующие условия, влияющие на сходимость последовательности такого вида:

$$(\forall k \in A)\,(\exists n \in A)\; g(n) \geqslant k \tag{2}$$

и

$$(\forall m \in A)(\exists n_m, d_m \in A)\; g(n_m) \geqslant \left(1 + \frac{1}{d_m}\right) g(m). \tag{3}$$

Там же было показано, что (3) является следствием (2).

Понятно, что выполнение (2) для последовательностей вида (1) при сделанных предположениях означает, что z является пределом последовательности. Если же это условие нарушено, то именно это число z пределом не является, хотя какой-то иной предел у нашей последовательности вполне может существовать, даже если при нарушении (2) имеет место нетривиальный рост g (условие (3)). Это подтверждает следующий пример.

Пусть

$$x_n = 1 - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{g(n)}, \quad g(n) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Ясно, что эта последовательность имеет предел, равный 1. При этом $(\forall n \in A)\; g(n) < 1$, и (2) нарушено. Но

$$\frac{g(m+1)}{g(m)} = 1 + \frac{1}{m^2 + 2m} \;\geqslant\; 1 + \frac{1}{2m^2},$$

а следовательно, в (3) можно выбрать $n_m = m + 1$, $d_m = 2m^2$, и это условие выполнено.

Итак, (3) при нарушении (2) может гарантировать отсутствие предела, только если мы убедимся, что эта система условий работает при любом $z \in \mathbf{BQ}(A)$. Рассмотрим более сильное, чем (3), условие

$$(\exists d \in A)(\forall m \in A)(\exists n_m \in A)\; g(n_m) \geqslant \left(1 + \frac{1}{d}\right) g(m). \tag{4}$$

Для последовательности из примера это условие нарушается. Действительно, пусть $d \in A$, $m_d = d$. Тогда при $m \geqslant m_d$ и произвольном $n \geqslant m$, $n \in A$ имеем

$$g(m) = 1 - \frac{1}{m+1} \geqslant 1 - \frac{1}{d+1}, \quad 1 - \frac{1}{d+1} \leqslant g(n) < 1.$$

Отсюда

$$\frac{g(n)}{g(m)} < \frac{1}{1 - \frac{1}{d+1}} = 1 + \frac{1}{d}, \tag{5}$$

что означает

$$(\forall n \in A,\; n \geqslant m) \quad g(n) < \left(1 + \frac{1}{d}\right) g(m),$$

и (4) нарушено.

Заметим, что, тем не менее, (4) по-прежнему следует из (2). Действительно, если бы (4) нарушалось, то, в частности, при $d = 2$ нашлось бы такое $m_2 \in A$, что при всех

$n \in A$, $n \geqslant m_2$ имела бы место оценка $g(n) \leqslant 3g(m)/2 \leqslant 3k_m/2 < 3k_m \in A$. Поскольку тогда, в силу монотонности g, $3k_m$ ограничивает сверху ее значения и при $n < m_2$, то получено противоречие (2), что завершает доказательство.

3. Основной результат

Нам потребуется одно вспомогательное неравенство.

Лемма 1. *Пусть условие (2) нарушено:*

$$(\exists k \in A)\,(\forall n \in A)\; g(n) < k, \tag{6}$$

а (4) справедливо. Тогда

$$(\forall n \in A)\;\; g(n) \leqslant \frac{k}{1+d}. \tag{7}$$

Доказательство. Пусть не так, и для некоторого $m \in A$ имеет место неравенство, противоположное (7). Определим, имея в виду (4),

$$n_{(1)} = n_m, \quad n_{(s)} = n_{n_{(s-1)}}, \;\; s \geqslant 2.$$

Тогда $(\forall s \in A)$ $n_s \in A$, и, используя известное неравенство Я. Бернулли, получаем

$$g(n_{(s)}) \geqslant \left(1 + \frac{1}{d}\right)^s \cdot g(m) \geqslant \left(1 + \frac{s}{d}\right) \cdot g(m) > \left(1 + \frac{s}{d}\right) \cdot \frac{k}{1+d} \geqslant k$$

при $s \geqslant d^2$. Это противоречит (6) и доказывает лемму. □

Теорема 1. *Пусть A – мультипликативный сегмент, A-последовательность x_n, $n \in A$ имеет вид (1). Если выполнено (2), то эта последовательность имеет предел, равный z. Если же (2) нарушено, но выполнено (4), то последовательность не имеет предела.*

Доказательство. Первое утверждение уже было проверено. Для обоснования отсутствия предела воспользуемся результатом из [4]: если основной сегмент A аддитивен (а в нашем случае это так) и A-последовательность не обладает свойством A-фундаментальности, т.е.

$$(\exists k \in A)(\forall m \in A)(\exists n_m \in A, n > m)\; |x_{n_m} - x_m| \geqslant \frac{1}{k},$$

то эта последовательность не имеет предела.

Но при выборе n_m с помощью (4), а k с помощью (6), мы выводим из только что доказанной леммы, что

$$|x_{n_m} - x_m| = \frac{1}{g(m)} - \frac{1}{g(n_m)} \geqslant \left(1 - \frac{1}{1+\frac{1}{d}}\right) \cdot \frac{1}{g(m)} = \frac{1}{1+d} \cdot \frac{1}{g(m)} \geqslant \frac{1}{k}.$$

Таким образом, последовательность расходится, и теорема доказана. □

4. Обсуждение и выводы

Как уже отмечалось ранее в [1], феномен отсутствия сходимости у монотонных A-последовательностей имеет тесную связь со скоростью их изменения и степенью нечеткости основного сегмента A. Если этот сегмент достаточно нечеток, то монада (ближайшая окрестность, точное определение приводится в [1] и [3]) числа, претендующего на роль предела, обладает “обширной границей” и, при достаточно медленном изменении изучаемой последовательности x_n, она, попав в эту границу, не успевает попасть собственно в монаду потенциального предела, пока n остается в рамках основного сегмента.

Соотношение необходимой скорости изменения со степенью нечеткости A как раз и описывается с помощью условия, подобного (4). Ясно, что если это условие нарушается, то, следуя тому алгоритму, по которому было выведено (5), можно получить, что значения x_n при больших n практически перестают изменяться, последовательность стабилизируется и, как следствие, предел у нее имеется. Понятно также, что, изменив в (1) знак минус на плюс, мы получаем возможность переформулировать все имеющиеся результаты на случай убывающих последовательностей. При этом требования на g не претерпят никаких изменений.

Таким образом, монотонная ограниченная A-последовательность может иметь предел на гипердействительной структуре лишь в двух случаях: либо она изменяется (растет или убывает) достаточно быстро, либо практически стабилизируется. Если же она начинает изменяться с некоторой “промежуточной” скоростью (условие типа (4)), то становится расходящейся.

Список литературы

1. Дронов С.В. О пределах монотонных последовательностей в AST // Известия АлтГУ. — 2016. — № 1 (89). — С. 101–109.

2. Дронов С.В. Неполные пределы и структура семейства измеримых классов в AST // Известия АлтГУ. — 2013. — № 1/1 (77). — С. 34–38.

3. Вопенка П. Альтернативная теория множеств: Новый взгляд на бесконечность. — Новосибирск : Изд-во Института математики, 2004.

4. Дронов С.В. О свойстве фундаментальности сегментов класса натуральных чисел // Известия АлтГУ. — 2009. — № 1. — С. 46–49.