УДК 514.765

О сигнатурах квадратичной формы секционной кривизны на трехмерных группах Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой[1]

Клепиков П.Н., Клепикова С.В., Хромова О.П.
Алтайский государственный университет
askingnetbarnaul@gmail.com, pastukhova.svetlana.1992@gmail.com, khromova.olesya@gmail.com

Аннотация

Данная работа посвящена изучению некоторых свойств квадратичной формы секционной кривизны на трехмерных метрических группах Ли. Определены сигнатуры квадратичной формы секционной кривизны K, реализуемые для всевозможных лоренцевых скалярных произведений на произвольной трехмерной алгебре Ли.

Одной из важных проблем римановой геометрии является задача об установлении связей между топологией и кривизной риманова многообразия. В однородном случае хорошо известны результаты Дж. Милнора [1], В.Н. Берестовского [2], Е.Д. Родионова, В.В. Славского [3,4] о связи между кривизной Риччи, одномерной кривизной, секционной кривизной и топологией однородного риманова пространства.

Кривизны левоинвариантных римановых метрик на группах Ли исследовались Дж. Милнором [1]. В случае 3-мерных групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой им были найдены возможные сигнатуры оператора Риччи. Ю.Г. Никоноровым и А.Г. Кремлевым были определены возможные сигнатуры оператора Риччи на 4-мерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой (см. [5, 6]). Аналогичные результаты для оператора одномерной кривизны, а также для оператора секционной кривизны получены Д.Н. Оскорбиным, Е.Д. Родионовым, О.П. Хромовой [4, 7, 8].

В случае левоинвариантных лоренцевых метрик на группах Ли ситуация представляется менее очевидной, так как в этом случае самосопряженный оператор не обязательно имеет симметричную матрицу. Поэтому в данном случае необходимо рассматривать вопрос о сигнатурах соответствующих квадратичных форм, что в случае римановой метрики совпадает с сигнатурами оператора кривизны. Так например, в работе [9] исследовались сигнатуры квадратичной формы кривизны Риччи, а в работе [10] изучались сигнатуры квадратичной формы одномерной кривизны.

Пусть (G, g) — группа Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой размерности n, $\{\mathfrak{g}, [\cdot\cdot]\}$ — соответствующая алгебра Ли. Обозначим, через $\langle\cdot,\cdot\rangle$ левоинвариантную лоренцеву метрику на M, а через ∇ — связность Леви-Чивита.

Тензор кривизны Римана R определим равенством $R(X,Y)Z = [\nabla_Y, \nabla_X]Z + \nabla_{[X,Y]}Z$. (Псевдо)риманова метрика g индуцирует скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на расслоении $\Lambda^2 G$ по правилу $\langle X_1 \wedge X_2, Y_1 \wedge Y_2\rangle = \det(\langle X_i, Y_i\rangle)$. Поэтому, риманов тензор кривизны в любой точке можно рассматривать как оператор $\mathcal{K}\colon \Lambda^2 G \to \Lambda^2 G$, называемый оператором секционной кривизны и определяемый равенством

$$\langle X \wedge Y, \mathcal{K}(Z \wedge T)\rangle = g(R(X,Y)Z, T).$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты: №16–01–00336А, №16–31–00048мол_а), Минобрнауки РФ в рамках базовой части государственного задания в сфере научной деятельности ФГБОУ ВПО «Алтайский государственный университет» (код проекта: 1148).

Далее определим квадратичную форму секционной кривизны $\mathtt{K}$ с помощью равенства

$$\mathtt{K}(X \wedge Y) = K(X \wedge Y, X \wedge Y).$$

Под сигнатурой квадратичной формы $\mathtt{K}$ будем понимать упорядоченный набор $(\operatorname{sgn}(\tau_1), \operatorname{sgn}(\tau_2), \ldots, \operatorname{sgn}(\tau_n))$, где $\tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant \ldots \leqslant \tau_n$ — собственные значения матрицы квадратичной формы $\mathtt{K}$, и $\operatorname{sgn}(x)$ означает знак (вещественного) числа x.

Занумеруем все возможные сигнатуры для трехмерного случая так, как это указано в таблице 1.

Таблица 1

Возможные сигнатуры операторов на трехмерных группах Ли

№	1	2	3	4	5
Сигнатура	$(-,-,-)$	$(-,-,0)$	$(-,-,+)$	$(-,0,0)$	$(-,0,+)$
№	6	7	8	9	10
Сигнатура	$(-,+,+)$	$(0,0,0)$	$(0,0,+)$	$(0,+,+)$	$(+,+,+)$

Также нам потребуется следующая лемма.

Лемма 1 (Уточненное правило Декарта [11])**.** *Если все корни многочлена $P(x)$ с вещественными коэффициентами вещественны (в частности, это условие выполнено для характеристического многочлена вещественной симметричной матрицы), а его свободный член отличен от нуля, то число положительных корней этого многочлена равно числу перемен знаков в системе его коэффициентов.*

Теорема 1. *Пусть G — трехмерная группа Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой, $\mathfrak{g}$ — метрическая алгебра Ли группы G, s — произвольная сигнатура из таблицы 1. Тогда s реализуется в качестве сигнатуры квадратичной формы K для некоторого лоренцева скалярного произведения на $\mathfrak{g}$ в том и только в том случае, если в таблице 2 на пересечении строки, соответствующей алгебре Ли $\mathfrak{g}$, и столбца, соответствующего сигнатуре s, находится знак "+".*

Доказательство. Приведем доказательство для некоторых случаев базисов на трехмерных метрических алгебрах Ли, которые приведены в работах [9, 12–14].

Пусть имеет место случай A3. С помощью известных математических моделей (см. например [8–10, 15–17]) вычислим матрицу квадратичной формы секционной кривизны и ее характеристический многочлен

$$x^3 + \left(4 - \frac{1}{4}\lambda^2\right) x^2 - \left(3\lambda^2 - \frac{1}{16}\lambda^4\right) x + \frac{1}{64}\lambda^6 = 0,$$

Пусть $\lambda = 0$, т.е. алгебра Ли — алгебра $e(1,1)$. Тогда характеристический многочлен будет иметь вид $x^2(4+x) = 0$. Он имеет следующие решения: $x = 0$, $x = -4$. Следовательно, получаем реализацию сигнатуры 4 таблицы 1.

Далее пусть $\lambda \neq 0$, т.е. алгебра Ли — алгебра $sl(2,\mathbb{R})$. Рассмотрим произведение $k_1 k_2 k_3 = -\frac{1}{64}\lambda^6 < 0$. Получаем, что могут реализоваться сигнатуры 1, 6 таблицы 1.

Предположим, что реализуется сигнатура 1 таблицы 1. Тогда, по уточненному правилу Декарта, должно выполняться $-\frac{1}{16}\lambda^4 - 3\lambda^2 > 0$, что, очевидно, неверно. Следовательно, сигнатура 1 таблицы 1 нереализуема.

Таблица 2

Возможные сигнатуры квадратичной формы K левоинвариантных лоренцевых метрик на трехмерных группах Ли

Алгебра Ли		№ сигнатуры 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Алгебра Ли унимодулярна											
A1	$su(2)$	−	−	+	−	+	+	−	−	+	+
	$sl(2,\mathbb{R})$	+	+	+	−	+	+	−	−	+	+
	$e(2)$	−	−	+	−	+	+	+	−	+	+
	$e(1,1)$	+	+	+	−	−	−	+	−	−	+
	h	−	−	+	−	−	−	−	−	−	+
	$\mathbb{R}^3$	−	−	−	−	−	−	+	−	−	−
A2	$sl(2,\mathbb{R})$	−	−	+	−	+	+	−	−	−	−
	$e(1,1)$	−	−	+	+	−	−	−	+	−	−
	h	−	−	−	−	−	−	+	−	−	−
A3	$sl(2,\mathbb{R})$	−	−	−	+	−	−	−	−	−	−
	$e(1,1)$	−	−	−	−	−	+	−	−	−	−
A4	$sl(2,\mathbb{R})$	−	−	+	−	+	+	−	−	−	−
	$e(1,1)$	−	−	+	−	−	−	−	−	−	−
Алгебра Ли неунимодулярна											
A		−	−	+	+	+	+	−	−	−	−
B		−	−	+	+	−	−	+	+	−	−
C1		−	−	+	+	+	+	−	+	−	−
C2		−	−	+	−	+	+	−	−	+	+

Пусть имеет место случай A. Тогда главные значения квадратичной формы K имеют вид

$$
\begin{aligned}
k_1 &= -\frac{1}{4}\lambda^2\cos^2\varphi - \frac{1}{2}\mu\lambda\cos^2\varphi - \frac{1}{4}\mu^2\cos^2\varphi + \mu\lambda,\\
k_2 &= -\frac{1}{4}\lambda^2\sin^2\varphi - \frac{1}{2}\lambda\mu\sin^2\varphi - \frac{1}{4}\mu^2\sin^2\varphi - \frac{3}{4}\lambda^2 + \frac{1}{2}\mu\lambda + \frac{1}{4}\mu^2,\\
k_3 &= -\frac{1}{4}\lambda^2\sin^2\varphi - \frac{1}{2}\lambda\mu\sin^2\varphi - \frac{1}{4}\mu^2\sin^2\varphi + \frac{1}{4}\lambda^2 + \frac{1}{2}\mu\lambda - \frac{3}{4}\mu^2.
\end{aligned}
$$

Рассмотрим сумму главных значений

$$
k_1 + k_2 + k_3 = \frac{1}{4}\cos^2\varphi\lambda^2 + \frac{1}{2}\cos^2\varphi\mu\lambda + \frac{1}{4}\cos^2\varphi\mu^2 - \lambda^2 - \mu^2 + \mu\lambda.
$$

Поскольку $\cos^2\varphi < 1$, то $k_1 + k_2 + k_3 < -\frac{3}{4}(\lambda-\mu)^2 \leqslant 0$. Следовательно, сигнатуры 7–10 таблицы 1 в данном случае нереализуемы.

Предположим, что реализуется сигнатуры 1, 2, 4 таблицы 1. Тогда суммы главных значений $k_1 + k_2 \leqslant 0$ и $k_1 + k_3 \leqslant 0$, что возможно лишь при $\lambda = \mu$, либо $\lambda = 0$, либо $\mu = 0$.

В случае, когда $\lambda = \mu$, реализуется сигнатура 3 таблицы 1. При $\lambda = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ реализуется сигнатура 4 таблицы 1. Если $\lambda = 0, \varphi \neq \frac{\pi}{2}$, то реализуется сигнатура 3 таблицы 1. При $\mu = 0$ рассуждения аналогичны.

Следовательно, сигнатуры 1, 2, 4 таблицы 1 нереализуемы. Сигнатура 3 реализуется при $\lambda = 1$, $\mu = 4 + 2\sqrt{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$; сигнатура 4 — при $\lambda = 0$, $\mu = 2\sqrt{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$; сигнатура 5 — при $\lambda = 1$, $\mu = 3 + 2\sqrt{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$; сигнатура 6 — при $\lambda = 1$, $\mu = 2 + 2\sqrt{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$. □

Список литературы

1. Milnor J. Curvature of left invariant metric on Lie groups // Advances in mathematics. — 1976. — Vol. 21. — P. 293–329.

2. Berestovsky V.N. Homogenious Riemannian manifolds of positive Ricci curvature // Mat. Zametki. — 1995. — Vol. 55, no. 3.

3. Rodionov E.D., Slavkii V.V. Curvature estimations of left invariant Riemannian metrics on three dimensional Lie groups // Differential Geometry and Application. Proceeding of the 7th International Conference. — Brno, 1999.

4. Никоноров Ю.Г., Родионов Е.Д., Славский В.В. Геометрия однородных римановых многообразий // Современная математика и ее приложения. Геометрия. — 1995. — Т. 37. — С. 1–78.

5. Никоноров Ю.Г., Кремлев А.Г. Сигнатура кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных группах Ли. Унимодулярный случай // Мат. труды. — 2008. — Т. 11, № 2. — С. 115–147.

6. Никоноров Ю.Г., Кремлев А.Г. Сигнатура кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных группах Ли. Неунимодулярный случай // Мат. труды. — 2009. — Т. 12, № 1. — С. 40–113.

7. Гладунова О.П., Оскорбин Д.Н. Применение пакетов символьных вычислений к исследованию спектра оператора кривизны на метрических группах Ли // Известия АлтГУ. — 2013. — № 77(1/1). — С. 19–23.

8. Воронов Д.С., Гладунова О.П. Сигнатура оператора одномерной кривизны на трехмерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой // Известия АлтГУ. — 2010. — № 1/2. — С. 24–28.

9. Пастухова С.В., Хромова О.П. О сигнатуре оператора тензора кривизны Риччи трехмерных групп Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой // Известия АлтГУ. — 2015. — № 1/2. — С. 141–146.

10. Клепиков П.Н., Клепикова С.В., Хромова О.П. О спектре операторов одномерной кривизны левоинвариантных лоренцевых метрик трехмерных групп Ли // Известия АлтГУ. — 2016. — № 89(1). — С. 117–122.

11. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. — М. : Наука, 1968.

12. Родионов Е.Д., Славский В.В., Чибрикова Л.Н. Локально конформно однородные псевдоримановы пространства // Математические труды. — 2006. — Т. 9(1). — С. 130–168.

13. Calvaruso G., Kowalski O. On the Ricci operator of locally homogeneous Lorentzian 3-manifolds // Cent. Eur. J. Math. — 2009. — Vol. 7(1). — P. 124–139.

14. Calvaruso G., Kowalski O. Homogeneous structures on three-dimensional Lorentzian manifolds // J. Geom. Phys. — 2007. — Vol. 57. — P. 1279–1291.

15. Клепиков П.Н., Клепикова С.В., Хромова О.П. Об операторах кривизны метрических групп Ли // Известия АлтГУ. — 2016. — № 1/1. — С. 129–137.

16. Клепиков П.Н., Хромова О.П. Четырехмерные группы Ли с левоинвариантной римановой метрикой и гармоническим тензором концикулярной кривизны // Известия АлтГУ. — 2014. — № 1/2. — С. 35–40.

17. Клепиков П.Н., Родионов Е.Д., Хромова О.П. Применение пакетов символьных вычислений при исследовании инвариантных тензорных полей на метрических группах Ли // Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование: тезисы докладов международной научной конференции (пос. Дивноморское, 7-13 июля 2014г.). — Владикавказ : ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2014. — С. 114.