УДК 514.765

Исследование уравнения солитона Риччи на лоренцевых многообразиях Уокера малой размерности[1]

Оскорбин Д.Н., Родионов Е.Д., Эрнст И.В.
Алтайский государственный университет
oskorbin@yandex.ru, edr2002@mail.ru, igeh@yandex.ru

Аннотация

В данной работе исследуются солитоны Риччи на трехмерных локально однородных и четырехмерных конформно плоских лоренцевых многообразиях Уокера.

1. Общие сведения

Определение 1. *Псевдоримановым многообразием называется гладкое многообразие $\mathcal{M}$, на котором задан гладкий невырожденный симметричный метрический тензор g. Если метрический тензор имеет сигнатуру $(1, n-1)$, то $(\mathcal{M}, g)$ называется лоренцевым многообразием.*

Пусть $(\mathcal{M}, g)$ – псевдориманово многообразие размерности n, ∇ – соответствующая связность Леви-Чивита. Тензор кривизны опеределим как $R(X,Y)Z = [\nabla_Y, \nabla_X]Z + \nabla_{[X,Y]}Z$ и тензор Риччи как $r(X,Y) = \mathrm{tr}(V \to R(X,V)Y)$, где X, Y, Z, V – гладкие векторные поля на $\mathcal{M}$.

Определение 2. *Полное псевдориманово многообразие $(\mathcal{M}, g)$ называется солитоном Риччи, если метрика g удовлетворяет уравнению:*

$$\pounds_X g + r = \lambda g, \tag{1}$$

где r – тензор Риччи, $\lambda \in \mathrm{R}$ – некоторая константа, $L_X g$ производная Ли метрики g в направлении полного дифференцируемого векторного поля X.

Число λ называется константой солитона. При $\lambda > 0, \lambda = 0$ или $\lambda < 0$ солитон называют сжимающимся, стабильным или расширяющимся соответственно.

Определение 3. *Гладкое распределение $\mathcal{D}$ на $\mathcal{M}$ называется параллельным, если для любых векторных полей $X \in \mathcal{D}$, $Y \in \mathcal{TM}$ имеем $\nabla_Y X \in \mathcal{D}$.*

Определение 4. *Псевдориманово многообразие, допускающее гладкое параллельное распределение изотропных векторов, называется многообразием Уокера. (см. [1, 2])*

Для тензора кривизны Римана имеет место разложение (см. [3]):

$$R = \mathcal{W} + A \owedge g,$$

где $\owedge$ – произведение Кулкарни-Номидзу, $A = \frac{1}{n-2}\left(\mathrm{Ric} - \frac{sg}{2(n-1)}\right)$ – тензор одномерной кривизны, s – скалярная кривизна.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты: №16–01–00336А, №16–31–00048мол_а), Минобрнауки РФ в рамках базовой части государственного задания в сфере научной деятельности ФГБОУ ВПО «Алтайский государственный университет» (код проекта: 1148).

Определение 5. *Тензор $\mathcal{W}$ из вышеописанного разложения называется тензором Вейля метрики g.*

Определение 6. *Псевдориманово многообразие размерности $n \geq 4$ называется конформно-плоским, если его тензор Вейля тривиален:*

$$\mathcal{W} = 0.$$

На многообразии Уокера $(\mathcal{M}, g)$ размерности $n+2 \geq 4$ в окрестности любой точки существуют локальные координаты $v, x^1, ..., x^n, u$, в которых метрика g принимает вид (см. [2]):

$$g = 2dvdu + h + 2Adu + H(du)^2, \tag{2}$$

где $h = h_{ij}(x^1, ..., x^n, u)dx^i dx^j$ – семейство римановых метрик, зависящее от u, $A = A_i(x^1, \ldots, x^n, u)dx^i$ – семейство 1-форм, зависящее от u, H – гладкая функция на M. Векторное поле ∂_v определяет параллельное распределение изотропных векторов.

Важным подклассом метрик на многообразиях Уокера являются pp-waves, определяемые локально уравнением (2), где $A = 0$, $h = \sum_{i=1}^n (dx^i)^2$, $\partial_v H = 0$.

Если, к тому же, H является квадратичной формой от $x^1, ..., x^n$ с коэффициентами, зависящими от u, то $(\mathcal{M}, g)$ называется плоской волной:

$$H(u, x^1, \ldots, x^n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(u)x^i x^j.$$

Функции h, H и 1-форма A в классе конформно плоских лоренцевых многообразий Уокера со слабо неприводимыми группами голономии описаны с работе [4]. Эту систему координат мы далее будем называть специальной системой координат Уокера.

Пусть $(\mathcal{M}, g)$ – четырехмерное многообразие с метрикой плоской волны. Тогда в специальной системе координат Уокера (v, x, y, u) метрика будет иметь вид:

$$g = 2dvdu + dx^2 + dy^2 + a(u)(x^2 + y^2)(du)^2,$$

где $a(u)$ – гладкая функция, не равная тождественно нулю ни на каком открытом подмножестве M. Метрики плоских волн соответствуют коммутативным алгебрам голономии конформно плоских многообразий Уокера (см. [4]).

Теорема 1. *Пусть $(\mathcal{M}, g)$ – четырёхмерное конформно плоское лоренцево многообразие Уокера, где g – метрика плоской гравитационной волны, имеющая в специальной системе координат Уокера вид:*

$$g = 2dvdu + dx^2 + dy^2 + a(u)(x^2 + y^2)(du)^2.$$

Тогда для любой константы λ существует решение уравнения солитона Риччи.

Доказательство. Пусть $X = (K, L, M, N)$ – произвольное векторное поле на $\mathcal{M}$. Запишем уравнение (1) в специальной системе координат Уокера (v, x, y, u):

$$\left\{ \begin{array}{rcl} N_v &=& 0 \\ N_x + L_v &=& 0 \\ N_y + M_v &=& 0 \\ (x^2+y^2)N_v(u) + N_u + K_v &=& \lambda \\ 2L_x &=& \lambda \\ M_x + L_y &=& 0 \\ (x^2+y^2)a(u)N_x + L_u + K_x &=& 0 \\ 2M_y &=& \lambda \\ (x^2+y^2)a(u)N_y + M_u + K_y &=& 0 \\ (x^2+y^2)(2a(u)N_u + a'(u)N) + && \\ +2K_u + 2x\,a(u)L + 2y\,a(u)M - 2a(u) &=& \lambda(x^2+y^2)a(u) \end{array} \right. \tag{3}$$

Уравнения 5 и 8 интегрируются:

$$L(v,x,y,u)=\frac{\lambda}{2}x+L_1(v,y,u),$$

$$M(v,x,y,u)=\frac{\lambda}{2}y+M_1(v,x,u)$$

Подставим полученные выражения в уравнение 6:

$$(M_1)_x(v,x,u)+(L_1)_y(v,y,u)=0$$

Отсюда видно, что $(M_1)_x(v,x,u)$ не зависит от x, а $(L_1)_y(v,y,u)$ не зависит от y. Поэтому функция M_1 линейна по x, а L_1 линейна по y:

$$M(v,x,y,u)=\frac{\lambda}{2}y+F_1(v,u)x+F_2(v,u),$$

$$L(v,x,y,u)=\frac{\lambda}{2}x-F_1(v,u)y+F_3(v,u)$$

Уравнения (12.5), (12.6), (12.8) выполнены.

Из уравнений 2 и 3 выразим N_x и N_y:

$$N_x=-L_v=(F_1)_v y-(F_3)_v$$

$$N_y=-M_v=-(F_1)_v x-(F_2)_v$$

Так как $N_v=0$ (из уравнения 1), то $(F_2)_v,(F_3)_v$ не зависят от v:

$$F_2(v,u)=v\alpha(u)+\beta(u),F_3(v,u)=v\mu(u)+\eta(u)$$

Продифференцируем уравнение 2 по y, а уравнение 3 по x. Поскольку $N_{xy}=N_{yx}$, получим:

$$N_{xy}-N_{yx}=L_{vy}-M_{vx}=-2(F_1)_v=0$$

Получили следующее:

$$F_1(v,u)=F_1(u),$$
$$M(v,x,y,u)=\frac{\lambda}{2}y+F_1(u)x+v\alpha(u)+\beta(u),$$
$$L(v,x,y,u)=\frac{\lambda}{2}x-F_1(u)y+v\mu(u)+\eta(u),$$
$$N(v,x,y,u)=-\mu(u)x-\alpha(u)y+\omega(u).$$

Это гарантирует выполнение уравнений 1, 2, 3, 5, 6, 8.

Продифференцируем теперь уравнение 7 по y, а уравнение 9 по x. Запишем разность полученных выражений:

$$-2F_1'(u)-2x\alpha(u)a(u)+2y\mu(u)a(u)=0.$$

Это равенство выполнено для всех x,y, поэтому $F_1'(u)\equiv 0,\alpha(u)a(u)\equiv 0,\mu(u)a(u)\equiv 0$. Тогда $F_1(u)$ – константа и мы обозначим её C_1. Далее предполагаем, что $a(u)$ не обращается в нуль на открытом множестве в области определения. Это позволяет заключить, что $\mu(u)\equiv 0,\alpha(u)\equiv 0$.

Из уравнений 4, 7 и 9 находим частные производные функции K:

$$K_x=-L_u=-\eta'(u),K_y=-M_u=-\beta'(u),K_v=\lambda-N_u=\lambda-\omega'(u)$$

Отсюда находим вид K:

$$K(v,x,y,u) = (\lambda - \omega'(u))v - \eta'(u)x - \beta'(u)y + \gamma(u)$$

Выполнены все уравнения, за исключением последнего. Перепишем это уравнение с новыми функциями:

$$(x^2+y^2)(2\omega'(u)a(u) + a'(u)\omega(u)) - 2\omega''(u)v + 2y(a(u)\beta(u) - \beta''(u)) +$$

$$+ 2x(a(u)\eta(u) - \eta''(u)) + 2\gamma'(u) - 2a(u) = 0$$

Это выражение тождественно равно 0, поэтому коэффициенты при v, x, y тождественно равны нулю:

$$2\omega'(u)a(u) + a'(u)\omega(u) = 0,$$
$$\omega''(u) = 0,$$
$$2a(u)\beta(u) - 2\beta''(u) = 0,$$
$$2a(u)\eta(u) - 2\eta''(u) = 0,$$
$$\gamma'(u) = a(u).$$

Последние уравнения локально разрешимы при любой $a(u)$, в частности, $\omega(u) = \omega_1 u + \omega_0$.

Если $a(u) \equiv 0$ в координатной окрестности, тензор Риччи тривиален и уравнение солитона Риччи разрешимо при любых λ с линейными K, L, M, N. □

Следствие 1. *В условиях предыдущей теоремы векторное поле X в специальной системе координат Уокера v, x, y, u имеет вид $X = (K, L, M, N)$, где:*

$$K(v,x,y,u) = (\lambda - \omega_1)v - \eta'(u)x - \beta'(u)y + \gamma(u),$$

$$L(x,y,u) = \frac{\lambda}{2}x - C_1 y + \eta(u),$$

$$M(x,y,u) = \frac{\lambda}{2}y + C_1 x + \beta(u),$$

$$N(u) = \omega_1 u + \omega_0,$$

при этом выполнены равенства:

$$2\omega_1 a(u) + (\omega_1 u + \omega_0)a'(u) = 0,$$

$$2a(u)\beta(u) - 2\beta''(u) = 0,$$

$$2a(u)\eta(u) - 2\eta''(u) = 0,$$

$$\gamma'(u) = a(u).$$

Здесь ω_1, ω_0, C_1 – некоторые константы.

Решения уравнения солитона Риччи в случае потенциальных векторных полей в случае четырехмерных локально конформно плоских лоренцевых многообразий Уокера были ранее получены в работе [5]. Было показано, что либо такие метрики разложимы, либо солитон является стабильным.

Переходим к рассмотрению уравнения солитона Риччи на трехмерных многообразиях Уокера.

Пусть $\mathcal{M}$ – трёхмерное лоренцево многообразие Уокера. Тогда, согласно [2], существуют локальные координаты (t, x, y), в которых метрика принимает следующий вид:

$$g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 1 & 0 & \varphi(x,y) \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где $\varphi(x, y)$ – некоторая гладкая функция, $\varepsilon = \pm 1$.

Пусть X – векторное поле на $\mathcal{M}$ с координатами $A(t,x,y), B(t,x,y), C(t,x,y)$, где A, B, C – гладкие функции.

Уравнение солитона $\pounds_X g + \mathrm{Ric} = \lambda g$ примет вид:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}C_t &= 0 \\ C_x + \varepsilon B_t &= 0 \\ C_y + C_t\varphi + A_t &= \lambda \\ 2B_x &= \lambda \\ C_x\varphi + \varepsilon B_y + A_x &= 0 \\ 2C_y\varphi + 2A_y + B\varphi_x + C\varphi_y - \frac{\varepsilon}{2}\varphi_{xx} &= \lambda\varphi \end{cases} \tag{5}$$

Справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть $(\mathcal{M}, g)$ – трёхмерное лоренцево многообразие Уокера. Тогда в специальной системе координат Уокера для любой константы $\lambda \neq 0$ существует решение уравнения солитона Риччи при условии, что тензор Риччи ρ зависит только от y.*

Доказательство. В [5, пункт 5.2] доказана

Лемма 1. *В случае, когда $\varphi(x, y) \not\equiv 0$ система (5) приводится к виду:*

$$X(t,x,y) = \left(t(\lambda - \beta) - \varepsilon x\omega'(y) + \mu(y), \frac{1}{2}\lambda x + \omega(y), \beta y + \gamma\right), \tag{6}$$

где β, γ – константы, а ω, μ – гладкие функции, удовлетворяющие дифференциальному уравнению:

$$2\beta\varphi - \lambda\varphi + 2\mu'(y) - 2\varepsilon x\omega''(y) + \varphi_y(\beta y + \gamma) + \varphi_x\left(\frac{\lambda}{2}x + \omega(y)\right) = \frac{\varepsilon}{2}\varphi_{xx} \tag{7}$$

Пусть $C(t, x, y) \equiv 0$, $\lambda \neq 0$. Тогда уравнение (7) принимает следующий вид:

$$\frac{\varepsilon}{2}\varphi_{xx} - \varphi_x\left(\frac{\lambda}{2}x + \omega(y)\right) + \lambda\varphi - 2\mu'(y) + 2\varepsilon x\omega''(y) = 0, \tag{8}$$

Уравнение (8) есть ОДУ, где x - переменная, y - параметр. Частное решение этого уравнения имеет вид:

$$\varphi(x,y) = \left(\lambda - \varepsilon(\lambda x + 2\omega(y))^2\right)F(y) + \frac{2}{\lambda}\mu'(y) + \frac{\omega''(y)(\varepsilon\lambda x^2 - 1)}{\omega(y)\lambda},$$

где $F(y)$ – произвольная гладкая функция. Тензор Риччи тогда будет произвольной функцией от y:

$$R_{33} = \lambda^2 F(y) - \frac{\omega''(y)}{\omega(y)}.$$

□

Перейдём к рассмотрению уравнения солитона Риччи на трёхмерном локально однородном лорецевом ($\varepsilon = 1$) многообразии Уокера.

Воспользуемся теоремой работы [6], описывающей локально однородные метрики на трехмерных многообразиях Уокера:

Теорема 3. *([6]) Пусть $(\mathcal{M}, g)$ – трёхмерное локально однородное лоренцево многообразие Уокера. Тогда в специальной системе координат Уокера (t, x, y) имеем $g = 2dtdy + dx^2 + \phi(x, y)dy^2$ (см. 4), где функция ϕ – одна из нижеприведённых:*
(a) $\phi(x, y) = b^{-2}e^{bx}, b \neq 0$
(b) $\phi(x, y) = \frac{1}{2}x^2\alpha(y), \alpha'(y) = c\alpha^{3/2}(y), \alpha(y) > 0$
(c) $\phi(x, y) = sx^2, s = \pm 1$.

Таким образом, уравнение солитона Риччи достаточно рассмотреть для классов метрик из теоремы (3).

Уравнение солитона Риччи сведём к уравнению из леммы (1):

$$X(t, x, y) = \left(t(\lambda - \beta) - \varepsilon x\omega'(y) + \mu(y), \frac{1}{2}\lambda x + \omega(y), \beta y + \gamma\right),$$

где β, γ – константы, а ω, μ – гладкие функции, удовлетворяющие дифференциальному уравнению:

$$2\beta\varphi - \lambda\varphi + 2\mu'(y) - 2\varepsilon x\omega''(y) + \varphi_y(\beta y + \gamma) + \varphi_x\left(\frac{\lambda}{2}x + \omega(y)\right) = \frac{\varepsilon}{2}\varphi_{xx} \tag{9}$$

Лемма 2. *Пусть $\phi(x, y) = b^{-2}e^{bx}, b \neq 0$ (случай (a)). Тогда уравнение солитона Риччи разрешимо и $\lambda = 0$.*

Доказательство. Уравнение солитона (9) сводится к системе:

$$\begin{cases} 2b^2\omega''(y) &= 0 \\ b\lambda &= 0 \\ -2b\omega(y) + b^2 - 4\beta + 2\lambda &= 0 \\ b^2\mu'(y) &= 0 \end{cases}$$

Из первого, второго и четвёртого уравнений, в силу того, что $b \neq 0$ следует:

$$\omega(y) = C_1 y + C_2, \lambda = 0, \mu(y) = const$$

Из третьего уравнения получаем, что $C_1 = 0$. Таким образом, $\omega(y) = C_2 = \omega, \mu(y) = \mu$.

В итоге уравнение солитона для метрики (a) сводится к уравнению:

$$b^2 - 2b\omega - 4\beta = 0,$$

откуда $\beta = \frac{b^2 - 2b\omega}{4}$. Поле X градиентно при $\beta = \gamma = 0$. □

Лемма 3. *Пусть $\phi(x, y) = \frac{1}{2}x^2\alpha(y), \alpha'(y) = c\alpha^{3/2}(y), \alpha(y) > 0$ (случай (b)). Тогда уравнение солитона Риччи разрешимо при любом λ.*

Доказательство. Уравнение (9) принимает вид:

$$\begin{cases} 2\beta + c(\beta y + \gamma)\alpha^{1/2}(y) &= 0 \\ \omega(y)\alpha(y) - 2\omega''(y) &= 0 \\ 4\mu(y) + \alpha(y) &= 0 \end{cases}$$

Откуда $\mu(y) = -\frac{\alpha(y)}{4}$. Второе уравнение этой системы разрешимо при любых $\alpha(y)$. Справедливость первого равенства может быть достигнута выбором констант $\beta = \gamma = 0$. Таким образом, константа λ может иметь любой знак. При этом векторное поле X будет градиентным, если и только если $\lambda = 0, \omega(y) \equiv 0$. □

Лемма 4. *Пусть $\phi(x,y) = sx^2, s = \pm 1$ (случай(c)). Тогда уравнение солитона Риччи разрешимо при любых λ.*

Доказательство. Уравнение (9) сводится к системе:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2\mu'(y) & = & s \\ \omega''(y) - s\omega(y) & = & 0 \end{array} \right.$$

При этом $\beta = 0$. Отсюда получаем, что $\mu(y) = \frac{s}{2}y + \mu_0$. Если $s = 1$, то $\omega(y) = C_1 \cosh(y) + C_2 \sinh(y)$. При $s = -1$ получаем $\omega(y) = C_1 \cos(y) + C_2 \sin(y)$. Таким образом, эта система ОДУ разрешима, константа λ – произвольная. В этом случае поле X будет градиентным тогда и только тогда, когда $\gamma = 0, \lambda = 0, \omega \equiv 0$. □

Из доказанных лемм вытекает теорема:

Теорема 4. *Уравнение солитона Риччи на локально однородном лоренцевом многообразии Уокера $(\mathcal{M}, g)$ локально разрешимо. С учетом обзначений теоремы 3:*

если g локально имеет вид (a), то солитон является стабильным ($\lambda = 0$), если g локально имеет вид (b) или (c), то константа солитона λ может быть любой.

При этом векторное поле X в специальной системе координат Уокера t, x, y соответственно имеет вид:

(a) $X(t,x,y) = (-\beta t + \mu, \omega, \beta y + \gamma)$

(b) $X(t,x,y) = \Big(t(\lambda - \beta) - x\omega'(y) - \frac{\alpha(y)}{4}, \frac{1}{2}\lambda x + \omega(y), \beta y + \gamma\Big)$, *причем выполнены уравнения:*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2\beta + c(\beta y + \gamma)\alpha^{1/2}(y) & = & 0 \\ \omega(y)\alpha(y) - 2\omega''(y) & = & 0 \end{array} \right.$$

(c) $X(t,x,y) = \left(\lambda t - C_1 x \cosh(y) - C_2 x \sinh(y) + \frac{s}{2}y + \mu_0, \frac{1}{2}\lambda x + C_1 \cosh(y) + C_2 \sinh(y), \gamma\right)$, *при $s = 1$,*

$X(t,x,y) = \left(\lambda t + C_1 x \cos(y) - C_2 x \sin(y) + \frac{s}{2}y + \mu_0, \frac{1}{2}\lambda x + C_1 \cos(y) + C_2 \sin(y), \gamma\right)$, *при $s = 1$.*

Список литературы

1. Brozos-Vazquez M., Garcia-Rio E., Gavino Fernandez S. Locally conformally flat lorentzian gradient Ricci soliton // Journal of Geometric Analysis. — 2013. — Vol. 23, no. 3. — P. 1196–1212.

2. Walker A.G. Canonical form for a Riemannian space with a parallel field of null planes // Quart. J. Math. Oxford. — 1950. — Vol. 1, no. 2. — P. 69–79.

3. Бессе А. Многообразия Эйнштейна. — М. : Мир, 1990. — Т. I.

4. Галаев А.С. Группы голономии лоренцевых многообразий и супермногообразий // Матем. сборник. — 2013. — Т. 204, № 9. — С. 29–50.

5. Brozos-Vazquez M., Garcia-Rio E., Gilkey P. et al. The geometry of Walker manifolds // Synthesis Lectures on Mathematics and Statistics. — Morgan & Claypool Publ., 2009. — Vol. 5.

6. Brozos-Vazquez M., Garcia-Rio E., Gavino-Fernandez S., Gilkey P. The structure of the Ricci tensor on locally homogeneous Lorentzian gradient Ricci solitons // arXiv.org. — 2016. — URL: https://arxiv.org/abs/1403.4400v4 (online; accessed: 01.11.2016).