УДК 517

Математический анализ в задачах студенческих олимпиад

Плотникова Е.А., Саженков А.Н., Саженкова Т.В.

Новосибирский государственный технический университет,

Алтайский государственный университет

pselena@gmail.com, sazhenkov_an@mail.ru

Аннотация

В работе обсуждается вопрос развития аналитических качеств учащихся и осуществляется представление задач творческого характера, способствующих развитию этих качеств.

Мощной формой активизации научного творчества студентов являются студенческие олимпиады и конкурсы. Предлагаемые на них задачи носят нестандартный характер и требуют от студента не только прочных знаний по программе, но и изобретательного, творческого подхода. Как правило, они иллюстрируют в упрощенной форме ту или иную глубокую математическую идею.

На таких соревнованиях особенно успешно проявляют себя студенты, способные осуществлять поиск идеи решения задачи. Без такого качества даже знание университетского курса в полном объёме не гарантирует успеха.

Развитию таких качеств способствует соответствующая подготовка, направленная развитие умения анализировать условия задачи, определять этапы решения, выяснять теоретическую тематику, позволяющую обосновывать те или иные предположения, возникающие при выполнении условий данной задачи. Для приобретения опыта работы над задачами творческого характера необходимы достаточные объёмы таких подготовительных задач, которые были бы уровнево (от простого к более сложному) и тематически систематизированы [1-7].

В данной работе представляются задачи по ряду тем математического анализа: многочлены; последовательности, суммы и пределы; непрерывность; топология прямой; функциональные уравнения.

Это задачи, адресованные студентам, интересующимся оригинальными математическими доказательствами и неожиданными идеями.

Многочлены:

Задача. Найти все такие натуральные числа n, для которых $\sin nx$ является многочленом от $\sin x$.

Ответ: n – нечётное число.

Пусть n – четное, и $\sin nx = P(\sin x)$ для некоторого многочлена P. Тогда

$$1 = \sin\left(\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = P\left(\sin\left(\pi + \frac{\pi}{2n}\right)\right) = P\left(\sin\left(-\frac{\pi}{2n}\right)\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

Пусть $n = 2k+1$. Воспользуемся формулой Муавра и биномом Ньютона:

$$\cos nx + i\sin nx = (\cos x + i\sin x)^n = \sum_{m=0}^{m=n} C_n^m \cos^{n-m} x \cdot i^m \sin^m x.$$

Слагаемые в правой части при нечётных m собираются в мнимой части.

Считая $m = 2i + 1$, получаем:

$$\sin nx = \sum_{i=0}^{i=k} (-1)^i C_{2k+1}^{2i+1} \cos^{2(k-i)} x \sin^{2i+1} x,$$

следовательно,

$$\sin nx = \sum_{i=0}^{i=k} (-1)^i C_{2k+1}^{2i+1} \left(1 - \sin^2 x\right)^{(k-i)} x \sin^{2i+1} x.$$

Суммы и пределы:

Задача. Докажите, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} = \frac{2}{9}$, где a_n – количество цифр, не меньших пяти, в десятичной записи числа 2^n.

Лемма 1. *Пусть* $A = \overline{a_m a_{m-1} ... a_{k+1} a_k ... a_1 a_0}$ *– натуральное число. Тогда*

$$\alpha_k(A) = \left[\frac{2A}{10^{k+1}}\right] - 2\left[\frac{A}{10^{k+1}}\right] = \begin{cases} 1 & a_k \in \{5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\} \\ 0 & a_k \in \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\} \end{cases}, \text{ где } k = 0,\ 1.\ 2,\ ...,\ m.$$

Доказательство очевидно.

Положим $\alpha_k(A) = 0$, если $k \geqslant m + 1$. Тогда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \alpha_k(A)$ – количество цифр, не меньших пяти, в десятичной записи числа A.

Лемма 2. *Пусть число a положительное. Тогда существует*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{[2^n a]}{2^n} = a.$$

Утверждение леммы следует из неравенства

$$0 \leqslant a \cdot 2^n - [2^n a] < 1.$$

Лемма 3. *Если* $b_{i,j} \geqslant 0$, *то*

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} b_{i,j} = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} b_{i,j}.$$

Решение задачи. Выше заметили, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(2^n).$$

По лемме 3

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(2^n) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_k(2^n)}{2^n}.$$

Во-первых, заметим, что

$$\frac{\alpha_k(2^n)}{2^n} = \frac{\left[\frac{2\cdot 2^n}{10^{k+1}}\right] - 2\left[\frac{2^n}{10^{k+1}}\right]}{2^n} = 2\cdot\left(\frac{[2^{n+1}a]}{2^{n+1}} - \frac{[2^n a]}{2^n}\right) = 2\cdot(c_{n+1} - c_n),$$

где $a = \frac{1}{10^{k+1}}$, $c_n = \frac{[2^n a]}{2^n}$. Поскольку

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_k(2^n)}{2^n} = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \frac{\alpha_k(2^n)}{2^n},$$

рассматривая частичную сумму

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{\alpha_k(2^n)}{2^n} = 2 \cdot \sum_{n=1}^{m} (c_{n+1} - c_n) = 2c_{m+1} - 2c_1,$$

получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_k(2^n)}{2^n} = \lim_{m\to\infty} (2c_{m+1} - 2c_1) = 2a - 2c_1 = \frac{2}{10^{k+1}} - 2 \cdot \frac{\left[\frac{2}{10^{k+1}}\right]}{2} = \frac{2}{10^{k+1}}.$$

Таким образом,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_k(2^n)}{2^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{10^{k+1}} = \frac{2}{9}.$$

Непрерывность:

Задача. Функция $f(x)$ непрерывна и $f(f(f(x))) = x$. Докажите, что $f(x) = x$. Приведите пример разрывной функции, для которой тождество выполняется, но $f(x) \neq x$ для любых x.

Во-первых, соотношение $f(x_1) = f(x_2)$ после двукратного применения функции приводит к соотношению $x_1 = fff(x_1) = fff(x_2) = x_2$. То есть функция взаимно однозначная. В силу непрерывности она строго монотонная. Например, если $a < b < c$ и $f(a) < f(b)$, $f(b) > f(c)$, $f(a) < f(c)$, то по теореме Коши о промежуточных значениях в некоторой точке d из интервала (a, b) имеет место $f(d) = f(c)$, что противоречит взаимной однозначности. Пусть f возрастает и в некоторой точке x выполнено неравенство $x < f(x)$. Тогда последовательно получаем $f(x) < ff(x)$, $ff(x) < fff(x) = x$. Противоречие.

Топология прямой:

Задача. На отрезке находятся несколько меньших отрезков, покрывающих его целиком. Докажите, что если у каждого из отрезков отбросить какую-либо половину – правую или левую, – то оставшиеся половины покрывают не менее трети длины исходного отрезка.

Считаем, что данный отрезок это $[0, 1]$. Для отрезка I из покрытия будем обозначать I^-, I^+ – его левую и правую половину, соответственно. Применяем обозначение I^σ для произвольной из половин и $l(A)$ – длина множества A.

Индукция по количеству отрезков покрытия.

$n = 2$. Пусть $I_1 = [0, b]$, $I_2 = [a, 1]$.

Если $b \geqslant 2/3$ или $a \leqslant 1/3$, то $l\left(I_1^{\pm}\right) \geqslant 1/3$ и $l\left(I_2^{\pm}\right) \geqslant 1/3$. В первом случае $l\left(I_1^\sigma \cup I_2^\sigma\right) \geqslant l\left(I_1^\sigma\right) \geqslant 1/3$, во втором – аналогично. Если $1/3 < a \leqslant b < 2/3$, то I_1^- не пересекается с I_2^σ, а I_2^+ не пересекается с I_1^σ и общая длина оставшихся половин не меньше $1/2$.

Оставшийся случай: $I_1^+ \cup I_2^- = \left[\frac{b}{2}, \frac{1+a}{2}\right]$. В этом случае $l\left(I_1^+ \cup I_2^-\right) = \frac{1+a-b}{2} \geqslant \frac{1+1/3-2/3}{2} = 1/3$.

Предположим, что утверждение выполняется для $n-1$ отрезков.

Рассмотрим покрытие, состоящее из n отрезков $I_1, \ldots, I_n$.

Допустим, нашёлся отрезок покрытия I_j содержащийся в объединении остальных. Тогда

$$\bigcup_{k=1}^{n} I_k^{\sigma_\kappa} \supset \bigcup_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n} I_k^{\sigma_k}$$

и

$$l\left(\bigcup_{k=1}^{n} I_k^{\sigma_\kappa}\right) \geqslant l\left(\bigcup_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n} I_k^{\sigma_k}\right) \geqslant 1/3$$

по индукционному предположению. Теперь считаем, что в покрытии таких отрезков нет. Занумеруем отрезки в порядке возрастания левых концов. Отметим, что если $a_k = a_{k+1}$ или $b_k = b_{k+1}$, то один из отрезков I_k или I_{k+1} содержит другой. Итак, имеем неравенства: $0 = a_1 < a_2 < a_3 < ... < a_n$.

Рассмотрим правые концы отрезков покрытия. Во-первых, $a_2 \leqslant b_1$ – поскольку име-

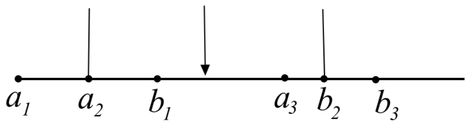

Рисунок 1. Расположение концов отрезков покрытия на прямой

ем дело с покрытием. Если при этом $a_2 = b_1$, отрезок $[a_2, 1]$ покрыт $n-1$ отрезками и применяем индукционное предположение. Пусть $a_2 < b_1$, из аналогичных соображений можно считать, что $b_1 < a_3 < b_2 < b_3$. Пусть некоторым образом выбраны половины отрезков покрытия. Уменьшим отрезок I_2 гомотетичным образом, сохраняя его середину неподвижной так, что система отрезков остаётся покрытием, новый отрезок обозначаем I'_2. Это будет означать, что $a'_2 = b_1$ или $b'_2 = a_3$.

Тогда из включения ${I'}^{\sigma}_2 \subset I^{\sigma}_2$, следует включение

$$I^{\sigma}_1 \cup {I'}^{\sigma}_2 \cup I^{\sigma}_3 \cup \ldots \cup I^{\sigma}_n \subset I^{\sigma}_1 \cup I^{\sigma}_2 \cup I^{\sigma}_3 \cup \ldots \cup I^{\sigma}_n$$

и, соответственно, неравенство

$$l\left(I^{\sigma}_1 \cup {I'}^{\sigma}_2 \cup I^{\sigma}_3 \cup \ldots \cup I^{\sigma}_n\right) \leqslant l\left(I^{\sigma}_1 \cup I^{\sigma}_2 \cup I^{\sigma}_3 \cup \ldots \cup I^{\sigma}_n\right).$$

Отметим, что система отрезков $I_1, I'_2, I_3, \ldots, I_n$ осталась покрытием и поскольку $a'_2 = b_1$ или $b'_2 = a_3$, то можно воспользоваться индукционным предположением, как было сделано выше.

Функциональные уравнения:

Задача. Функция $f : R \to R$ непрерывна, $f(1) > 0$ и удовлетворяет уравнению: $f(xy) = f(x) f(f(y))$ для любых x и y. Найдите все такие функции.

Ответ: $f \equiv 1$, $f(x) = x$ и $f(x) = |\,x\,|$.

Пусть $f(1) = a$. Подставим $x = 1$ и $y = 1$ получим $f(a) = 1$. Рассмотрим непрерывную функцию $g(x) = f(x) - x$. На отрезке с концами a и 1 она принимает значения $1-a$ и $a-1$, следовательно, на этом отрезке есть точка x^*, в которой функция g обращается в нуль, то есть $f(x^*) = x^*$. Теперь положим $x = 1$ и $y = x^*$ и получим $f(x^*) = f(1) f(x^*)$. Отсюда $f(1) = 1$, кроме того, подставляя $x = 1$ и $y = x$, получаем соотношение $f(x) = f(f(x))$ и, как следствие, $f(xy) = f(x) f(y)$. Отметим, что $f \equiv 1$ – решение задачи.

Пусть существует x_0 в котором $f(x_0) \neq 1$. Поставим в соотношение (3) $x = 0$ и $y = x_0$, получим $f(0) = f(0) f(x_0)$. Значит, $f(0) = 0$ и $f(1) = 1$ по теореме Коши о промежуточных значениях для любого $t \in (0, 1)$ существует $x_t \in (0, 1)$ такое, что $f(x_t) = t$. Из соотношения (3) следует, что $f\left(\frac{1}{x_t}\right) = \frac{1}{t}$.

Итак, для любого $t \in [0, +\infty)$ существует $x_t \in [0, +\infty)$ такое, что $f(x_t) = t$. Отсюда следует, что $f(t) = f(f(x_t)) = f(x_t) = t$ для любых $t \in [0, +\infty)$.

Далее $f(-1)^2 = f(1) = 1$. Возможны два случая.

1). $f(-1) = -1$. Тогда $f(-x) = f((-1) \cdot x) = f(-1) f(x) = -x$ и приходим к ответу $f(x) = x$.

2). $f(-1) = 1$. Тогда $f(-x) = f((-1) \cdot x) = f(-1) f(x) = x$ и приходим к ответу $f(x) = |\,x\,|$.

Список литературы

1. Плотникова Е.А., Саженков А.Н., Саженкова Т.В. Математический анализ в задачах студенческих олимпиад. Практикум. — Барнаул : Изд-во Алт. ун-та, 2011.

2. Плотникова Е.А., Саженкова Е.В. О введении в математические дисциплины в техническом и экономическом вузах // Сборник трудов семнадцатой региональной конференции по математике МАК-2011. — Барнаул : Изд-во Алт. ун-та, 2011.

3. Плотникова Е.А., Саженкова Е.В. О формировании системы задач в курсе "Высшая математика" в техническом и экономическом вузах // Сборник научных статей международной школы-семинара "Ломоносовские чтения на Алтае". — Барнаул : Изд-во Алт. ун-та, 2011.

4. Плотникова Е.А., Саженкова Т.В. О преемственности в преподавании математических дисциплин // Сборник научных статей международной молодёжной школы-семинара "Ломоносовские чтения на Алтае". Барнаул. 5-8 ноября 2013. – Часть III. — Барнаул : Изд-во Алт. ун-та, 2013.

5. Саженков А.Н. Геометрия и анализ в задачах математических олимпиад // Труды семинара по геометрии и математическому моделированию. — Барнаул : Изд-во Алт. ун-та, 2013.

6. Саженков А.Н., Саженкова Т.В. О некоторых аспектах подготовки к студенческим математическим соревнованиям // Сборник трудов тринадцатой региональной конференции по математике МАК-2010. — Барнаул : Изд-во Алт. ун-та, 2010.

7. Саженков А.Н., Саженкова Т.В. Дополнительное математическое образование как средство развития творческого потенциала студентов и школьников // Сборник научных статей международной школы-семинара "Ломоносовские чтения на Алтае". — Барнаул : Изд-во Алт. ун-та, 2011.