УДК 513.83

Некоторые свойства линий с аффинно эквивалентными дугами

Поликанова И.В.
Алтайский государственный педагогический университет
anirix1@yandex.ru

Аннотация

В статье продолжается изучение линий с аффинно эквивалентными дугами, начатое автором в [1], в частности рассматриваются вопросы, связанные с наличием у таких линий точек уплощения. Доказывается, что линия с аффинно эквивалентными дугами в n-мерном аффинном пространстве, имеющая точку уплощения k-ого порядка, лежит в k-мерной плоскости.

1.

В данном пункте будут рассмотрены общие вопросы, связанные с наличием точек уплощения у кривых в n-мерном аффинном пространстве A^n. Автор не претендует на приоритет относительно приведённых в этом пункте достаточно простых утверждений. Однако считает полезным привести доказательства, поскольку, с одной стороны, ему не удалось найти источники с указанными фактами, с другой – существуют различные трактовки понятия "точка уплощения k-ого порядка". Мы будем придерживаться определения, данного в статье С.Г. Лейко [2].

Будем рассматривать линии в A^n как одномерные многообразия, т.е. в окрестности каждой своей точки линия задаётся в некоторой аффинной системе координат (сокращённо АСК) параметризацией

$$\vec{r} = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)), \qquad (1)$$

где радиус-вектор $\vec{r}$ текущей точки кривой является вектор-функцией от параметра t, пробегающего некоторый числовой промежуток I. Под дугой линии будем понимать вложение числового промежутка $[a, b]$ в это многообразие. Условимся в дальнейшем обозначать дугу линии с концами M и N через MN.

Будем говорить, что линия *принадлежит классу гладкости* C^k, если координаты её локальных параметризаций имеют непрерывные производные до порядка k включительно в области изменения параметра. Это определение не зависит от выбора АСК.

Пусть γ – гладкая класса C^m линия в A^n. При переходе от локальной параметризации (1) к локальной параметризации

$$\vec{\rho} = \vec{r} \circ t(\tau), \quad \tau \in J,$$

в результате допустимой замены параметра $t = t(\tau)$ производные вектор-функции $\vec{\rho}$ выражаются через производные вектор-функции $\vec{r}$ следующим образом:

$$\begin{array}{lcl} \vec{\rho}\,' & = & \vec{r}\,'t' \\ \vec{\rho}\,'' & = & \vec{r}\,''t' + \vec{r}\,'t'' \\ \vec{\rho}\,''' & = & \vec{r}\,'''t' + 2\vec{r}\,''t'' + \vec{r}\,'t''' \\ \dots & \dots & \dots \\ \vec{\rho}\,^{(m)} & = & \sum_{i=0}^{m-1} C_{m-1}^i \vec{r}\,^{(i+1)} t^{(m-i)}. \end{array}$$

Из формул видно, что в случае линейной независимости векторов $\vec{r}\,'$, $\vec{r}\,''$, ..., $\vec{r}^{\,(k)}$ система векторов $\vec{\rho}\,'$, $\vec{\rho}\,''$, ..., $\vec{\rho}^{\,(k)}$, $k < m$, также линейно независима, поскольку определитель матрицы перехода от первой системы векторов ко второй равен $(t')^k \neq 0$. Поэтому k-мерная плоскость, определяемая любым из этих наборов и соответствующей тому же параметру точкой, не зависит от выбора параметризации. Будем называть её *k-ой соприкасающейся плоскостью.* В частности, 1-ую соприкасающуюся плоскость принято называть касательной прямой. Из определения следует, что k-ая соприкасающаяся плоскость к линии (1) в точке, соответствующей параметру t, задаётся векторным параметрическим уравнением

$$\vec{R} = \vec{r}(t) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{r}^{\,(i)}(t), \tag{2}$$

где $\vec{R}$ – радиус-вектор текущей точки плоскости, λ_1, ..., λ_k, – параметры, пробегающие множество R действительных чисел.

Точку линии назовём *точкой уплощения порядка k*, $k < min(m, n)$, если в ней векторы $\vec{r}\,'$, $\vec{r}\,''$,..., $\vec{r}^{\,(k)}$ линейно независимы, а векторы $\vec{r}\,'$, $\vec{r}\,''$,..., $\vec{r}^{\,(k+1)}$ линейно зависимы, иными словами, если в этой точке существует k-ая соприкасающаяся плоскость и не существует $(k+1)$-ой соприкасающейся плоскости. Точку уплощения 1-ого порядка обычно называют *точкой спрямления.* Понятие точки уплощения не зависит от выбора параметризации. Линию, содержащуюся в k-мерной плоскости будем называть *k- плоской.* Линию, не содержащуюся ни в какой гиперплоскости, будем называть *невырожденной.*

Лемма 1. *Аффинное преобразование пространства A^n отображает k-ую соприкасающуюся плоскость к гладкой линии в k-ую соприкасающуюся плоскость к её образу в соответствующей точке.*

Доказательство. Пусть гладкая класса C^k линия γ определяется формулой (1) и в точке M, соответствующей параметру t, имеет k-ую соприкасающаюся плоскость, задаваемую уравнением (2). Будем отождествлять точки с вектор-столбцами их координат в фиксированном базисе. Тогда аффинное преобразование f пространства A^n может быть задано формулой: $\tilde{r} = B\vec{r} + \vec{c}$, где B – невырожденная квадратная матрица n-ого порядка, $\vec{c}$ – некоторый вектор-столбец, $\vec{r}$ – радиус-вектор произвольной точки пространства, $\tilde{r}$ – радиус-вектор её образа при аффинном преобразовании. Тогда образ линии γ при этом преобразовании задаётся параметрическими уравнениями $\tilde{r} = B\vec{r}(t) + \vec{c}$, а производные от этой вектор-функции имеют вид: $\tilde{r}^{(i)} = B\vec{r}^{\,(i)}(t)$, $i = 1, ..., k$.В силу невырожденности матрицы B эти векторы линейно независимы. Поэтому k-ая соприкасающаяся плоскость к образу линии γ в точке $M' = f(M)$ задаётся уравнением:

$$\vec{R} = (B\vec{r}(t) + \vec{c}) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i B\vec{r}^{\,(i)}(t). \tag{3}$$

С другой стороны, образ соприкасающейся плоскости (2) при указанном преобразовании задаётся уравнением:

$$\vec{R} = B\left(\vec{r}(t) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{r}^{\,(i)}(t)\right) + \vec{c},$$

которое после раскрытия скобок приводится к виду (3), что и доказывает утверждение. □

Лемма 2. *Если линия – k-плоская, и её локальные параметризации m раз непрерывно дифференцируемы, $m > k$, то все её точки являются точками уплощения порядка $\leq k$.*

Доказательство. Выберем АСК $Ox_1...x_n$ так, чтобы линия содержалась в координатной плоскости $Ox_1...x_k$. Тогда она локально задаётся параметризациями вида

$$\vec{r} = (x_1(t), x_2(t), ..., x_k(t), 0, ..., 0).$$

Поэтому

$$\vec{r}^{\,(i)} = (x_1^{(i)}(t), x_2^{(i)}(t), ..., x_k^{(i)}(t), 0, ..., 0), \quad i = 1, ..., m.$$

Очевидно, векторы $\vec{r}\,'$, $\vec{r}\,''$,..., $\vec{r}^{\,(k+1)}$ линейно зависимы при всех $t \in I$. Следовательно все точки являются точками уплощения порядка не больше k. □

Лемма 3. *Если все точки линии являются точками уплощения порядка k, то линия – k-плоская.*

Доказательство. Пусть линия γ, все точки которой являются точками уплощения k-ого порядка, задаётся локальной параметризацией (1). Тогда вектор $\vec{r}^{\,(k+1)}$ при всех $t \in I$ является линейной комбинацией векторов $\vec{r}\,'$, $\vec{r}\,''$,..., $\vec{r}^{\,(k)}$, т.е. существуют функции $a_1(t)$,..., $a_k(t)$, такие, что

$$\vec{r}^{\,(k+1)} = a_1\vec{r}\,' + ... + a_k\vec{r}^{\,(k)}.$$

(Краткости ради аргумент t опускаем.) Это векторное равенство равносильно системе n равенств:

$$x_i^{(k+1)} = a_1 x_i' + ... + a_k x_i^{(k)}, \quad i = 1, ..., n.$$

Их можно интерпретировать, как тот факт, что функции x_1', ..., x_n' являются решениями линейного однородного дифференциального уравнения k-ого порядка

$$y^{(k)} - a_k y^{(k-1)} - ... - a_1 y = 0.$$

Известно, что множество решений такого уравнения представляет собой k-мерное векторное пространство. Поэтому среди функций x_1', ..., x_n' не более k линейно независимых. Но и менее k линейно независимых быть не может. Действительно, допустим, что среди них есть r линейно независимых функций, причём $r < k$. Можно считать, что это первые r, тогда последующие $n - r$ функций линейно выражаются через них:

$$x_i' = \sum_{j=1}^{r} \alpha_{ij} x_j', \quad i = r+1, ..., n,$$

где α_{ij} – постоянные. Тогда

$$\begin{aligned}
&\vec{r}\,' = \left(x_1', ..., x_r', \textstyle\sum_{j=1}^r \alpha_{(r+1)j} x_j', ..., \sum_{j=1}^r \alpha_{nj} x_j'\right),\\
&\vec{r}\,'' = \left(x_1'', ..., x_r'', \textstyle\sum_{j=1}^r \alpha_{(r+1)j} x_j'', ..., \sum_{j=1}^r \alpha_{nj} x_j''\right),\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&\vec{r}^{\,(k)} = \left(x_1^{(k)}, ..., x_r^{(k)}, \textstyle\sum_{j=1}^r \alpha_{(r+1)j} x_j^{(k)}, ..., \sum_{j=1}^r \alpha_{nj} x_j^{(k)}\right).
\end{aligned}$$

(Здесь последние $k-1$ равенств получены в результате последовательных дифференцирований вектора $\vec{r}\,'$ и его производных.) При всех $t \in I$ матрица, составленная из координат этих векторов имеет ранг, непревосходящий r. Это противоречит тому, что все точки линии являются точками уплощения порядка k, а потому ранг должен быть равен k. Таким образом, без ограничения общности можно считать, что первые k функций x_1', ..., x_k' – линейно независимы. Получаем систему дифференциальных уравнений:

$$x_i' = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij} x_j', \quad i = k+1, ..., n,$$

где α_{ij} – постоянные. Учитывая постоянство коэффициентов, перепишем её в виде:

$$\left(x_i - \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij} x_j\right)' = 0, \quad i = k+1, ..., n.$$

Интегрируя равенства, получим:

$$x_i(t) - \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij} x_j(t) = b_i, \quad i = k+1, ..., n,$$

где b_i – постоянные. Видим, что координаты точек линии удовлетворяют системе линейных уравнений

$$x_i - \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij} x_j = b_i, \quad i = k+1, ..., n,$$

задающих в A^n k-мерную плоскость. Доказали, что линия является локально k-плоской.

Пусть σ – k-мерная плоскость, содержащая некоторую окрестность точки $M \in \gamma$, если M – внутренняя точка линии, или полуокрестность, если M – конец линии. Допустим, что линия γ не является k-плоской. Тогда найдётся точка $N \in \gamma$, не принадлежащая σ. Пусть C_M – связная компонента множества $MN \cap \sigma$, содержащая точку M. Она является замкнутым связным подмножеством в $MN \cap \sigma$, содержащим полуокрестность точки M, следовательно представляет собой дугу: одним концом её служит точка M, а второй обозначим через L. Ясно, что $L \in MN$ и $L \neq N$. Точка L имеет окрестность на γ, содержащуюся в некоторой k-мерной плоскости ξ. Значит, существует дуга L_1L_2 линии γ, содержащаяся в ξ, для которой L – внутренняя точка. Её можно считать настолько малой, что один её конец, например L_1, принадлежит дуге ML, а второй конец L_2 – дуге LN. Если $\xi \neq \sigma$, то дуга L_1L содержится в плоскости $\xi \cap \sigma$, имеющей размерность l, $1 < l < k$, следовательно по лемме 2 все точки этой дуги являются точками уплощения порядка не больше $k-1$. А это противоречит определению линии γ. Если $\xi = \sigma$, то дуга ML_2 содержится в $MN \cap \sigma$ и содержит дугу ML в качестве собственного подмножества. А это противоречит определению связной компоненты $C_M = ML$, как максимального (по включению) связного подмножества множества $MN \cap \sigma$, содержащего точку M. Наше допущение о том, что линия γ не является k-плоской, оказалось ложным. Значит, γ – k-плоская линия. □

Всюду ниже параллельность плоскостей понимается в широком смысле: направляющее векторное подпространство одной содержится в направляющем векторном подпространстве другой.

Лемма 4. *Если касательная прямая во всех точках линии параллельна фиксированной k-мерной плоскости, то линия – k-плоская.*

Доказательство. Пусть некоторая дуга U линии γ задаётся в некоторой АСК параметризацией (1), и касательная к ней во всех точках параллельна k-мерной плоскости, задаваемой в этой АСК системой уравнений:

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j + b_i = 0, \quad i = 1, ..., n-k, \tag{4}$$

причём, ранг матрицы (α_{ij}) равен $n-k$. Тогда условие компланарности касательного вектора $\vec{r}\,'$ кривой γ и этой плоскости имеет вид:

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j'(t) = 0, \quad i = 1, ..., n-k.$$

Учитывая постоянство коэффициентов α_{ij}, эти равенства можно переписать так:

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j(t)\right)' = 0, \quad i = 1, ..., n-k.$$

Интегрируя уравнения, получим:

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j(t) = c_i, \quad i = 1, ..., n-k,$$

где c_i – постоянные. Показали, что дуга U содержится в k-мерной плоскости, задаваемой системой уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j = c_i, \quad i = 1, ..., n-k.$$

Таким образом, линия локально k-плоская, причём, все плоскости, содержащие дуги линии, параллельны плоскости (4).

Далее проводим рассуждения, аналогичные приведённым в лемме 3. Пусть σ – k-мерная плоскость, содержащая некоторую окрестность точки $M \in \gamma$, если M – внутренняя точка линии, или полуокрестность, если M – конец линии. Допустим, что линия γ не является k-плоской. Тогда найдётся точка $N \in \gamma$, не принадлежащая σ. Пусть C_M – связная компонента множества $MN \cap \sigma$, содержащая точку M. Она является замкнутым связным подмножеством в $MN \cap \sigma$, содержащим полуокрестность точки M, следовательно представляет собой дугу: одним концом её служит точка M, а второй обозначим через L. Ясно, что $L \in MN$ и $L \neq N$. Точка L имеет окрестность на γ, содержащуюся в некоторой k-мерной плоскости ξ. Значит, существует дуга L_1L_2 линии γ, содержащаяся в ξ, для которой L – внутренняя точка. Её можно считать настолько малой, что один её конец, например L_1, принадлежит дуге ML, а второй конец L_2 – дуге LN. Так как плоскости σ и ξ имеют общую точку и параллельны одной плоскости, то они совпадают. Значит, дуга ML_2 содержится в $MN \cap \sigma$ и содержит дугу ML в качестве собственного подмножества. А это противоречит определению связной компоненты $C_M = ML$, как максимального (по включению) связного подмножества множества $MN \cap \sigma$, содержащего точку M. Наше допущение о том, что линия γ не является k-плоской, оказалось ложным. $\square$

Лемма 5. *Если линия имеет во всех точках соприкасающиеся плоскости k-ого порядка, и все они параллельны фиксированной прямой, то линия – k-плоская.*

Доказательство. Пусть некоторая дуга линии γ задаётся локальной параметризацией (1), и соприкасающиеся плоскости k-ого порядка во всех точках линии компланарны ненулевому вектору $\vec{c}$. Тогда вектор $\vec{c}$ при всех $t \in I$ является линейной комбинацией векторов $\vec{r}\,'$, $\vec{r}\,''$,..., $\vec{r}^{\,(k)}$, т.е. существуют функции $a_1(t)$,..., $a_k(t)$, такие, что

$$\vec{c} = a_1\vec{r}\,' + ... + a_k\vec{r}^{\,(k)}.$$

Продифференцировав это равенство, получим:

$$\vec{0} = a_1'\vec{r}\,' + a_2'\vec{r}\,'' + ... + a_k'\vec{r}^{\,(k)} + a_1\vec{r}\,'' + a_2\vec{r}\,''' + ... + a_k\vec{r}^{\,(k+1)}.$$

Из него следует

$$a_1'\vec{r}\,' + (a_1 + a_2')\vec{r}\,'' + (a_2 + a_3')\vec{r}\,''' + ... + (a_{k-1} + a_k')\vec{r}^{\,(k)} = -a_k\vec{r}^{\,(k+1)}. \quad (5)$$

Если $a_k(t) \equiv 0$ на некотором числовом промежутке $(a, b) \subset I$, то, поскольку левая часть равенства (5) представляет собой линейную комбинацию линейно независимых векторов, а справа стоит $\vec{0}$, все коэффициенты линейной комбинации равны нулю. В результате имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} a_1' & = & 0 \\ a_1 + a_2' & = & 0 \\ a_2 + a_3' & = & 0 \\ \dots\dots\dots & \dots & \\ a_{k-1} + a_k' & = & 0 \\ a_k & = & 0 \end{cases}.$$

Решая её снизу вверх, получим, что $a_1 \equiv a_2 \equiv ... \equiv a_k \equiv 0$ на (a, b). Значит вектор $\vec{c} = \vec{0}$, что противоречит определению вектора $\vec{c}$. Полученное противоречие доказывает, что на каждом промежутке $(a, b) \subset I$ найдётся параметр $t_0 \in (a, b)$ такой, что $a_k(t_0) \neq 0$. Тогда из равенства (5) следует, что вектор $\vec{r}^{\,(k+1)}$ является линейной комбинацией векторов $\vec{r}^{\,\prime}$, $\vec{r}^{\,\prime\prime}$,..., $\vec{r}^{\,(k)}$ при данном значении параметра, и, значит, соответствующая точка является точкой уплощения k-ого порядка. Показали, что множество точек уплощения порядка k всюду плотно на γ. Учитывая, что производные параметризации до порядка $k + 1$ включительно непрерывны, делаем вывод, что все точки линии являются точками уплощения k-ого порядка. По лемме 3 такая линия является k-плоской. □

2.

В этом пункте будут рассмотрены свойства линий в A^n с аффинно-эквивалентными дугами, обладающих точками уплощения.

Будем говорить, что линия в аффинном пространстве A^n *обладает свойством аффинной эквивалентности дуг*, если для любых двух ориентированных дуг кривой существует аффинное преобразование пространства, отображающее одну дугу на другую так, что начало одной дуги отображается в начало другой, а конец – в конец.

Теорема 1. *Если линия в A^n обладает свойством аффинной эквивалентности дуг, и некоторая её внутренняя точка является точкой уплощения k -ого порядка, то линия – k-плоская.*

Доказательство. Пусть линия γ в A^n обладает свойством аффинной эквивалентности дуг и некоторая её внутренняя точка M является точкой уплощения k-ого порядка. Покажем, что все точки линии являются точками уплощения k-ого порядка. Возьмём произвольную точку $N \in \gamma$, отличную от M. Пусть LL' – дуга линии γ, для которой точка M внутренняя. Зададим последовательность точек $(N_i \in \gamma)$, сходящуюся к точке N. Так как дуги NN_i и LL' аффинно-эквивалентны, то на дуге NN_i имеется точка уплощения k -ого порядка K_i – образ точки M при аффинном преобразовании пространства, отображающем дугу LL' в дугу NN_i. Пусть в окрестности точки N линия γ задаётся уравнением $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $t \in I$, причём, точке N соответствует параметр t_0. Так как последовательность дуг (NN_i) "стягивается" к точке N, то последовательность параметров (t_i), отвечающая последовательности точек уплощения k -ого порядка (K_i), сходится к t_0 при $i \to \infty$. Поскольку производные параметризации до порядка $k+1$ включительно непрерывны, делаем вывод, что точка N является точкой уплощения k-ого порядка. Таким образом, все точки линии γ являются точками уплощения k-ого порядка. На основании леммы 3 заключаем, что линия γ – k-плоская. □

Теорема 2. *Если невырожденная линия в A^n, $n > 1$, обладает свойством аффинной эквивалентности дуг, то касательная к ней и соприкасающаяся плоскость в разных точках не параллельны.*

Доказательство. Пусть невырожденная линия γ в A^n обладает свойством аффинной эквивалентности дуг. Покажем, что касательная l_M в произвольной точке $M \in \gamma$ непараллельна k-ой соприкасающейся плоскости δ в произвольной точке $N \in \gamma$. Допустим противное: $l_M \| \delta$. Возьмём произвольную точку $K \in \gamma$, касательную в ней обозначим l_K. Существует аффинное преобразование пространства, отображающее дугу NM в дугу NK так, что точка N остаётся неподвижной. По лемме 1 при этом преобразовании плоскость δ отобразится сама в себя, а прямая l_M в прямую l_K. Поскольку аффинное преобразование сохраняет параллельность, то $l_K \| \delta$. Доказали, что во всех точках линии γ касательная прямая параллельна одной k-мерной плоскости δ. По лемме 4 линия является k-плоской, что противоречит условию теоремы. □

Теорема 3. *Пусть γ – невырожденная линия в A^n, $n > 1$, обладающая свойством аффинной эквивалентности дуг; её произвольная точка O разбивает γ на две части γ_1 и γ_2. Тогда всякая гиперплоскость, параллельная соприкасающейся гиперплоскости в точке O, пересекает каждую из частей γ_1 и γ_2 не более, чем в одной точке. В частности, соприкасающаяся гиперплоскость имеет с γ не более одной общей точки.*

Доказательство. Пусть гладкая класса C^n невырожденная линия γ с аффинно эквивалентными дугами имеет в точке O соприкасающуюся гиперплоскость σ, гиперплоскость δ параллельна σ. Предположим противное: гиперплоскость δ пересекает одну из частей γ_1 и γ_2 в двух точках X и Y. Пусть XY – дуга линии γ, не содержащая точку O. Тогда на ней найдётся точка Z, в которой опорная гиперплоскость к дуге XY параллельна гиперплоскости δ. Следовательно касательная прямая к γ в точке Z параллельна гиперплоскости δ, значит и соприкасающейся гиперплоскости σ. А это противоречит теореме 2. Аналогично, если бы гиперплоскость σ имела бы с γ помимо точки соприкосновения O ещё одну точку Z, то на дуге OZ нашлась бы точка, в которой касательная прямая была бы параллельна σ в противоречии с теоремой 2. □

Теорема 4. *Гладкая класса C^n линия в A^n, обладающая свойством аффинной эквивалентности дуг, незамкнута.*

Доказательство. Допустим, что гладкая класса C^n линия γ в A^n, обладающая свойством аффинной эквивалентности дуг, замкнута. Без ограничения общности можно считать, что она не содержится ни в какой гиперплоскости, иначе перейдём к рассмотрению подпространства. Пусть σ – соприкасающаяся гиперплоскость линии в произвольной её точке. В силу замкнутости и невырожденности линии найдутся две опорные гиперплоскости к линии, параллельные σ. По крайней мере одна из них – δ – не совпадает с σ. Тогда касательная к линии в точке соприкосновения гиперплоскости δ с γ лежит в δ, а значит, параллельна соприкасающейся гиперплоскости σ, что противоречит теореме 2. Предположение о замкнутости линии ошибочно. □

Список литературы

1. Поликанова И.В. О линиях в n-мерном аффинном пространстве с аффинно-эквивалентными дугами // МАК-2015: "Математики – Алтайскому краю": сборник трудов всероссийской конференции по математике. — Барнаул : Изд-во Алт. ун-та, 2015. — С. 34–38.

2. Лейко С.Г. p-геодезические преобразования и их группы в касательных расслоениях, индуцированные конц317циркулярными преобразованиями базисного многообразия // Известия вузов. Математика. — 1998. — № 6(433). — С. 35–45.