УДК 532.13 + 517.994

Задача об осесимметричном течении водного раствора полимеров вблизи критической точки

Пухначева Т.П.
Новосибирский государственный университет
tanpuh@gmail.com

Аннотация

Реологические свойства слабых водных растворов полимеров значительно отличаются от свойств чистой воды. В работе рассмотрена математическая модель, описывающая осесимметричное движение водных растворов полимеров вблизи критической точки. Определяющие уравнения, при использовании конвективной или объективной производной тензора деформаций по времени, обладают богатыми свойствами симметрии, что позволяет находить точные частично инвариантные в смысле Л.В. Овсянникова решения. Проанализировано поведение одного из таких решений в случае, когда параметр, пропорциональный релаксационной вязкости, стремится к нулю. В работе выполнено аналитическое и численное исследование асимптотического разложения решения по этому параметру.

1. Постановка задачи

Исследования последних десятилетий показали, что добавление в воду небольшого количества полимеров существенно меняет реологические свойства образующегося раствора. В экспериментах показано, что присутствие в жидкости даже небольшого количества растворенного полимера дает возможность уменьшить силу трения для твердого тела, движущегося в ней. Возникает задача теоретического описания свойств слабых растворов полимеров в рамках наиболее простой математической модели, например, используя только поля скоростей и давления.

Впервые подобная модель была предложена в работе Я.И. Войтунского, В.Б Амфилохиева и В.А. Павловского (см. [1]). Авторы исходили из варианта модели максвелловского типа для вязкоупругой жидкости с определяющим законом движения

$$P = -pI + 2\mu D + 2\frac{\kappa}{\theta}\int\limits_{-\infty}^{t} \exp\left(-\frac{t-s}{\theta}\right)\frac{d}{ds}D(s)ds. \tag{1}$$

Здесь P это тензор напряжений, I – единичный тензор, D – тензор деформации поля скоростей $\mathbf{v}$. p есть давление, μ – динамический коэффициент вязкости, $\frac{d}{dt}$ обозначает конвективную производную по времени, ассоциированную с полем скоростей $\mathbf{v}$: $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla$. Физические константы κ (релаксационная вязкость) и θ (время релаксации) характеризуют релаксационные свойства жидкости.

Рассмотрим асимптотическое разложение интеграла в (1) по параметру θ при $\theta \to 0$ и будем учитывать только первый член в этом разложении. Получаем следующий упрощенный закон состояния

$$P = -pI + 2\mu D + \kappa\frac{dD}{dt}. \tag{2}$$

Далее мы предполагаем, что жидкость несжимаемая и внешние силы потенциальны, в этом случае внешние силы могут быть включены в давление. Кроме того, не нарушая общности и для упрощения формул, можно положить плотность жидкости равной единице.

Общий вид уравнения импульсов в этих предположениях имеет вид $\frac{d\mathbf{v}}{dt} = divP$. Подстановка выражения (2) в это уравнение приводит к математической модели движения слабых водных растворов полимеров [2]

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \mu\Delta\mathbf{v} + \kappa\frac{d\Delta\mathbf{v}}{dt}, \quad \nabla\cdot\mathbf{v} = 0. \tag{a}$$

Проблема существования и единственности решения начально-краевой задачи для системы (a) была рассмотрена А.П. Осколковым [3–5]. Им же рассмотрена упрощенная модель, полученная при замещении конвективной производной вектор функции $\Delta\mathbf{v}$ ее частной производной по времени,

$$\mathbf{v}_t + \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v} = -\nabla p + \mu\Delta\mathbf{v} + \kappa\Delta\mathbf{v}_t, \quad \nabla\cdot\mathbf{v} = 0. \tag{b}$$

Еще одна модификация модели движения водных растворов полимеров это введение объективной производной, она состоит в замене последнего слагаемого в правой части уравнения (2) выражением $div\left(\frac{\tilde{d}D}{dt}\right)$, где

$$\frac{\tilde{d}D}{dt} = \frac{\partial D}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)D + DW - WD \tag{3}$$

есть объективная производная [6] тензора напряжений. Здесь D – это симметричная компонента тензора $\nabla\mathbf{v}$, тогда как W является его антисимметричной компонентой. В результате мы приходим к системе

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \mu\Delta\mathbf{v} + \kappa div(\frac{\tilde{d}D}{dt}), \quad \nabla\cdot\mathbf{v} = 0. \tag{c}$$

Здесь t обозначает время, $\mathbf{v}$ – вектор скорости, p – отношение давления к плотности жидкости, которая предполагается постоянной, ∇ и Δ – градиент и лапласиан, μ и κ – коэффициенты динамической и релаксационной вязкости. Положительные величины μ и κ – также считаются постоянными.

Проблема разрешимости начально-краевой задачи для модели (c) с естественным условием прилипания на границе до сих пор мало исследованы. В работе А.В. Звягина [7] доказано существование слабого решения начально краевой задачи с условием прилипания на границе для системы аналогичной (c), когда выражение W в формуле (3) замещено результатом сглаживания $W_\rho(x, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \rho(x-y)W(y,t)dy$ (здесь $\rho(x)$ – есть стандартное сглаживающее ядро). Следует заметить, что даже для более простой модели (b) разрешимость задачи с условием прилипания была доказана только недавно (в [5] на границе области было использовано краевое условие идеального скольжения). Современное состояние математической теории движения водных растворов полимеров и более общих задач динамики движения вязкоупругой среды Кельвина-Фойгта представлено в монографии В.Г. Звягина и М.В. Турбина [8]. Некоторые общие вопросы существования и точное решение начально-краевой задачи для модели (c) при течении плоского потока вблизи критической точки рассмотрены в работе Ю.Д. Божкова, В.В. Пухначева, Т.П. Пухначевой [9].

2. Групповые свойства систем (a), (b), (c)

Как уже было отмечено математическая теория движения растворов полимеров нуждается в дополнительном развитии. Одним из удобных инструментов теоретического исследования является групповой анализ дифференциальных уравнений [10]. Первый шаг в этом направлении состоит в вычислении групп преобразований допускаемых системами (a), (b), (c). Прямая проверка показывает, что системы (a) и (c) допускают псевдогруппу Ли преобразований пространства $\mathbb{R}^8$ в себя генерируемую базовыми операторами [11]

$$X_0 = \partial_t, \quad X_{kl} = x_k\partial_{x_l} - x_l\partial_{x_k} + v_k\partial_{v_l} - v_l\partial_{v_k}; \quad k,l = 1,2,3; \quad k < l,$$

$$\Phi = \phi\partial_p, \quad \Psi_k = \psi_k\partial_{x_k} + \dot{\psi}_k\partial_{v_k} - x_k\ddot{\psi}_k\partial_p; \quad k = 1,2,3. \tag{4}$$

Здесь $\phi(t)$ и $\psi_k(t)$ произвольные функции класса C^∞; точка означает дифференцирование по времени t. Присутствие произвольных функций от времени в коэффициентах операторов Φ и Ψ_k типично для многих моделей несжимаемой среды (идеальной и вязкой жидкостей [12] и также несжимаемой вязкоупругой среды Максвелла [13]).

Выбирая функции 1 и t в коэффициентах операторов Ψ_k, мы получаем операторы смещения $X_k = \partial_{x_k}$ и преобразования Галилея $Y_k = t\partial_{x_k} + \partial_{v_k}$.

Система (a) (также как и система (c)) обладает богатыми свойствами симметрии, что позволяет находить ее точные решения [10] – как инвариантные, так и частично инвариантные в смысле Л.В. Овсянникова. Эти решения подразделяются на классы эквивалентности путем построения оптимальных систем подалгебр [10] алгебры (4). Ряд нестационарных решений представлен в работе [11]. В настоящей работе изучается одно из стационарных решений этих систем.

Что касается системы уравнений Осколкова (b), допускаемая ими алгебра исчерпывается операторами X_0, X_k, X_{kl}, Φ, не содержащими операторы группы Галилея. Тем не менее, это не мешает изучению точных решений системы (b), которые могут даже иметь не теоретико-групповой характер.

В случае плоского движения, самая широкая группа, допускаемых уравнениями моделей (a) и (c) порождается операторами X_0, X_{12}, Φ, Ψ_1, Ψ_2. Обозначим как L_P соответствующую им алгебру. В работе [13] построена оптимальная система подалгебр первого и второго порядка для алгебры L_M, допускаемой уравнениями плоского движения несжимаемой вязкоупругой среды Максвелла. Оказывается, что структура алгебры L_P и L_M одинакова, тем не менее, группы, соответствующие им, действуют в пространствах разной размерности. Мы можем воспользоваться результатами [13] для перечисления всех существенно различных инвариантных и частично инвариантных решений системы (a) и (c) рядов один и два, описывающих плоское движение растворов полимеров. Ряд нестационарных решений представлен в работе [11]. Здесь мы предлагаем новое стационарное решение этих систем.

3. Осесимметричное течение водного раствора полимеров вблизи критической точки

В 1911 году К. Хименц (Hiemenz) нашел замечательное решение уравнений Навье-Стокса, которое описывает плоский стационарный поток вблизи критической точки в более простой модели [14]. Мы рассматриваем осесимметричный аналог задачи вблизи критической точки для модели (c). Решение типа Хименца для этой задачи было найдено в 1936 г. Ф. Хоманом (Homann). Пусть вязкая несжимаемая жидкость занимает полуплоскость $x_2 > 0$. Обозначим $r,\ z$как цилиндрические координаты и как v_r, v_z соответствующие компоненты скорости. Решения систем (a) и (c), описывающие стационарный поток вблизи критической точки $r = z = 0$ имеют вид

$$v_r = rs'(z), \quad v_z = -2s(z), \tag{5}$$

где штрих обозначает дифференцирование по z.

Если рассматривать решение Хименца, то функция s должна удовлетворять уравнению

$$s'^2 - 2ss'' = 1 + s''', \quad z > 0. \tag{6}$$

Соответствующее распределение давления имеет вид

$$p = h(z) - r^2/2, \tag{7}$$

где функция $h(z)$ определяется квадратурой. Добавим к (6) граничные условия

$$s(0) = s'(0) = 0; \quad s' \to 1, \quad z \to \infty. \tag{8}$$

Первое и второе соотношения (8) обеспечивают выполнение условия прилипания на твердой стенке в то время как последнее условие означает, что поток приближается к потенциальному потоку идеальной жидкости при $z \to \infty$.

Задача (6), (8) изучена в деталях в [14, 15]. Она имеет единственное решение, обладающее следующими свойствами: $s'' > 0$, $s''' < 0$ при $z > 0$, $s' - 1 = O[\exp(-\gamma z^2)]$ при $z \to \infty$ ($\gamma = const > 0$).

Хименц нашел решение (5) эвристически. Теоретико-групповой характер этого решения был открыт не так давно [16]. Оказалось, что это инвариантное решение некоторой частично инвариантной подмодели уравнений Навье-Стокса. Это наблюдение позволяет получить аналоги решений Хименца для более сложных моделей в механике жидкости, в частности, для систем (a) и (c). В обоих случаях поле скоростей имеет тот же вид (5). Функция s удовлетворяет уравнению

$$s'^2 - 2ss'' = 1 + s''' + \delta(s's''' - 2ss^{(iv)}), \quad z > 0 \tag{9}$$

где $\delta = \kappa l^{-2}$, и граничным условиям (8). В большинстве случаев физическое интерес имеет решение задачи (8), (9) в случае малых δ, что соответствует малым значениям вязкости релаксации κ. Его асимптотическое решение можно построить в виде ряда по целым положительным степеням δ. Однако, параметр δ стоит множителем в слагаемом со старшей производной. Причиной отсутствия пограничного слоя вблизи точки $z = 0$ является вырожденность уравнения (9) при $z = 0$ в силу первого условия (8). Поэтому мы не можем задавать значения производных порядков выше первого для функции s в точке $z = 0$. Кроме того, ряд по степеням δ не будет сходящимся, но только асимптотическим.

Таким образом, мы строим формальное асимптотическое разложение решения задачи (8), (9):

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} s_k(z)\delta^k. \tag{10}$$

Функция s_0 является решением уравнения (6), т.е. это аналог классического решения Хименца для этой модели. Она будет решением начально-краевой задачи :

$$s'''_0 + 2s_0 s''_0 - (s'_0)^2 + 1 = 0, \quad z > 0 \tag{11}$$

$$s_0(0) = s'_0(0) = 0; \quad s'_0 \to 0, \quad z \to \infty \tag{12}$$

Функции s_k, $k = 1, 2, \dots$ будут решениями следующих начально-краевых задач:

$$s'''_k + 2s_0 s''_k - 2s'_0 s'_k + 2s''_0 s_k = f_k, \quad z > 0, \tag{13}$$

$$s_k(0) = s'_k(0) = 0; \quad s'_k \to 0, \quad z \to \infty. \tag{14}$$

Здесь функции f_k выражены в терминах $s_0, \dots, s_{k-1}$ и их производных и достаточно громоздкие, поэтому точное их представление приводить не будем. Задачи (11), (12) и (13), (14) для $k = 1, 2$ были решены численно. Графики решений представлены на рисунке 1.

Функции s'_0 соответствует сплошная линия, s'_1 – штриховая линия и s'_2 – точечная линия. Графики решения типа Хименца и функции в приближенном решении задачи (8), (9) $s'^{(2)} = s'_0 + \delta s'_1 + \delta^2 s'_2$ для $\delta = 0.2$ показаны на рисунке 2.

Одной из важных характеристик решения является касательное напряжение на твердой плоскости, которое записывается в безразмерных переменных, как $P_{rz}(r, 0) = -rs''(0)$. Ограничивая себя тремя первыми членами разложения (10), получим его приближенное значение: $P_{rz}(r, 0) = -r(a_0 + a_1\delta + a_2\delta^2)$. Найдены числовые значения констант: $a_0 = 1.31194$, $a_1 = -0.58385$, $a_2 = -0.34026$. Отрицательность констант α_1, α_2 говорит о том, что касательное напряжение снижается при появлении добавок в жидкости. И, наконец, заметим, что хотя поля скоростей в моделях (a) и (c) совпадают, существует разница в распределении давления. А именно, оно сохраняет форму (7) для модели (a) в то время как следует добавить слагаемое $-\frac{1}{2}\kappa r^2 s^2$в правой части (7) в случае модели (c).

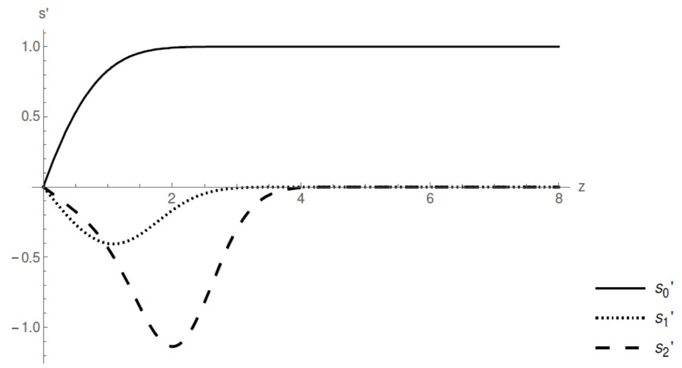

Рисунок 1. Графики функций s'_0 (сплошная линия), s'_1 (точечная линия), s'_2 (пунктирная линия)

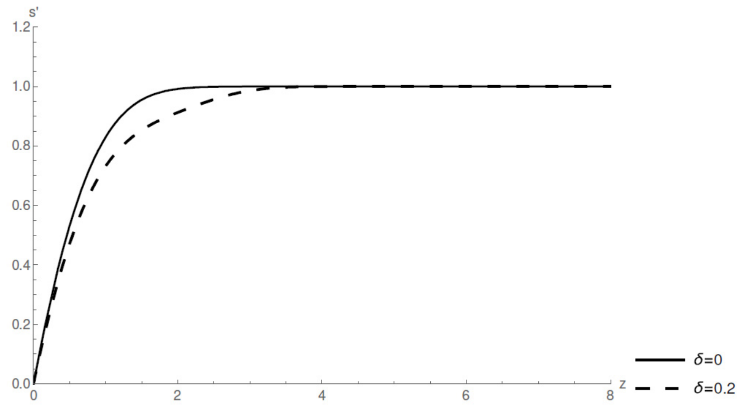

Рисунок 2. Графики функций решения типа Хименца (сплошная линия), и функции $s'^{(2)}$ для $\delta = 0.2$ (пунктирная линия)

Список литературы

1. Войткунский Я.В., Амфилохиев В.Б., Павловский В.А. Уравнения движения жидкости с учетом ее релаксационных свойств // Труды Ленинградского кораблестроительного института. — 1970. — Т. 69. — С. 19–27.

2. Павловский В.А. К вопросу о теоретическом описании слабых водных растворов полимеров // Доклады АН СССР. — 1971. — Т. 200, № 4. — С. 809–812.

3. Осколков А.П. О единственности и разрешимости краевых задач для уравнений движения водных растворов полимеров // Записки науч. семинаров ЛОМИ. — 1973. — Т. 38. — С. 98–136.

4. Осколков А.П. К теории нестационарных течений жидкости Кельвина-Фойгта // Записки науч. семинаров ЛОМИ. — 1982. — Т. 115. — С. 191–202.

5. Осколков А.П. Начальные краевые задачи с условиями скольжения для модифицированных уравнений Навье-Стокса // Записки науч. семинаров ПОМИ. — 1995. — Т. 213. — С. 93–115.

6. Astarita G., Marrucci G. Principles of Non-Newtonian Fluid Mechanics. — McGraw-Hill, 1974.

7. Zvyagin A.V. Solvability for equations of motion of weak aqueous polymers solutions with objective derivative // Nonlin. Anal.: Theory, Methods and Appl. — 2013. — Vol. 90. — P. 70–85.

8. Zvyagin V.G., Turbin M.V. The study of initial boundary value problems for mathematical models of the motion of the Kelvin-Voigt fluid // J. Math. Sci. — 2010. — Vol. 168(2). — P. 157–308.

9. Bozhkov Yu.D., Pukhnachev V.V., Pukhnacheva T.P. Mathematical models of polymer solutions motion and their symmetries // AIP Conf. Proc. 1684, 020001. — 2015. — P. 6. — URL: http://dx.doi.org/10.1063/1.4934282.

10. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. — М. : Наука.

11. Божков Ю.Д., Пухначев В.В. Групповой анализ уравнений движения водных растворов полимеров // Доклады РАН. — 2015. — Т. 460, № 5. — С. 536–539.

12. Андреев В.К., Капцов О.В., Пухначев В.В., Родионов А.А. Применение теоретико-групповых методов в гидродинамике. — Новосибирск : ВО “Наука”, 1994.

13. Мещерякова Е.Ю. Групповой анализ уравнений несжимаемой вязкоупругой среды Максвелла // Известия АлтГУ. — 2012. — № 1/2(73). — С. 54–58.

14. Schlichting H., Gersten K. Boundary-Layer Theory. — Springer, 2000.

15. Batchelor G.K. An Introduction to Fluid Dynamics. — Cambridge Univ. Press, 2000.

16. Мелешко С.В., Пухначев В.В. Об одном классе частично инвариантных решений уравнений Навье-Стокса // Прикладная механика и техническая физика. — 1999. — Т. 40, № 2. — С. 24–33.