УДК 519.6

О математическом моделировании напряженно-деформированного состояния упруго-пластических материалов

Устюжанова А.В., Кравченко Г.В.
Алтайский государственный университет
ustyuzhanova.pgs@math.asu.ru, kravchenko@math.asu.ru

Аннотация

В данной работе обсуждаются вопросы математического моделирования деформационных процессов, протекающих в упруго-пластического материалах. Приводятся общие уравнения для определения полей перемещений и напряжений в исследуемой области в случае плоской деформации.

Исследование проблем прочности и разрушения твердых тел в настоящее время представляется актуальной задачей, как в теоретическом, так и в прикладном плане.

Под разрушением в механике деформируемого твердого тела понимается не только механическое нарушение сплошности тела в результате внешнего воздействия, но и необратимое пластическое течение. Разрушение твердого тела является сложным процессом, начинающимся с зарождения рассеянных по объему тела микродефектов (микротрещин, пустот, дислокаций), развитие которых может привести к появлению и распространению трещин.

Основоположником механики разрушения считается английский ученый А. Гриффитс, который при составлении соотношений энергетического баланса для упругого тела с трещиной полагал, что энергия при распространении трещины расходуется только на образование новых свободных поверхностей. Он сформулировал и решил задачу о величине предельной (разрушающей) нагрузки для бесконечной пластины с прямолинейной трещиной заданной длины, подвергнутой растяжению однородным полем напряжений, направленным перпендикулярно плоскости трещины. Следует отметить, что теория Гриффитса применима только к хрупким материалам, когда размер области пластических деформаций вблизи вершины трещины достаточно мал по сравнению с длиной трещины.

Дальнейшее развитие теория трещин получила в работах Е. Орована и Дж. Ирвина. Они высказали идею о представлении энергии разрушения в виде суммы поверхностной энергии и работы пластических деформаций. Также Ирвин полагал, что распространение трещины в хрупком (или квазихрупком) теле связано с коэффициентом интенсивности упругих напряжений, т.е. распространение трещины наступает при достижении последним определенной критической величины.

Исследованиям по теории пластичности посвящены работы Д.Д. Ивлева, А.Ю. Ишлинского, Л.М. Качанова, М.Я. Леонова, В.М. Мирсалимова, В.В. Новожилова, В.В. Соколовского и др., а механикой разрушения занимались Б.Д. Аннин, Дж.Ф. Нотт, Г.П. Черепанов, Р.В Гольдштейн, Е.М. Морозов, Н.Ф. Морозов, М.П. Саврук, В.В. Панасюк, В.З. Партон, П. Пэрис, Дж. Райс, Л.И. Слепян, К.Ф. Черных и др.

Математическим вопросам теории трещин в упругих и упруго-пластических материалах посвящены работы [1–5].

Анализ деформационных процессов в окрестности протяженных горных выработок, скважин, туннелей, а также исследование взаимного влияния пор и сдвиговых разрывов на микроуровне при деформировании упруго-пластичных материалов имеют важное значение при изучении механизмов разрушения и обеспечения надежности и безопасности сооружений. В частности, исследование задач о напряженно-деформированном состоянии скважины является необходимым при разработке нефтяных месторождений [6]. Особенностью решения таких задач является то, что приходится учитывать взаимное влияние процессов фильтрации и формирования напряженно-деформированного состояния.

Рассмотрим общую постановку задачи о деформировании плоской упруго-пластической области. Поскольку напряженно-деформированное состояние в упруго-пластических материалах зависит от истории нагружения, то постановка и решение задачи проводится в приращениях.

На каждом шаге нагружения для исследуемой области, требуется найти поля приращений перемещений du_i $(i = 1, 2)$ и приращений напряжений $d\sigma_{ij}$ $(i, j = 1, 2)$, удовлетворяющих уравнениям равновесия:

$$\partial(d\sigma_{ij})_j = 0. \tag{1}$$

В рамках метода последовательных нагружений в упруго-пластическом материале бесконечно малое приращение деформаций $d\varepsilon_{ij}$ $(i, j = 1, 2, 3)$ может быть представлено в виде суммы упругой $d\varepsilon^e_{ij}$ и пластической $d\varepsilon^p_{ij}$ составляющих:

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon^e_{ij} + d\varepsilon^p_{ij}. \tag{2}$$

Приращения деформаций $d\varepsilon_{ij}$ $(i, j = 1, 2, 3)$ записываются через вектор приращений перемещений du_i с текущим радиусом-вектором x_i $(i = 1, 2, 3)$:

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial du_i}{\partial x_j} + \frac{\partial du_j}{\partial x_i}\right). \tag{3}$$

Упругая составляющая деформаций определяется через приращения напряжений $d\sigma_{ij}$ $(i, j = 1, 2, 3)$ по закону Гука:

$$d\varepsilon^e_{ij} = \frac{ds_{ij}}{2G} + (1 - 2\nu)\delta_{ij}\frac{d\sigma}{E}, \tag{4}$$

где ν – коэффициент Пуассона, E – модуль упругости, G – модуль сдвига, $d\sigma$ – приращение среднего давления, ds_{ij} – девиатор тензора приращений напряжений:

$$d\sigma = \frac{d\sigma_{mm}}{3}, \qquad ds_{ij} = d\sigma_{ij} - \delta_{ij}d\sigma \quad (m = 1, 2, 3).$$

Для описания пластических свойств материала используются функция текучести $f(\sigma_{ij}, \kappa)$ и пластический потенциал $g(\sigma_{ij})$ $(i, j = 1, 2, 3)$:

$$f(\sigma_{ij}, \kappa) = T + \mu\sigma - \kappa, \qquad g(\sigma_{ij}) = T + \beta\sigma,$$

где

$$T = \sqrt{\frac{s_{ij}s_{ij}}{2}}, \qquad \sigma = \frac{\sigma_{mm}}{3}, \qquad s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma.$$

Параметры μ, β и κ характеризуют, соответственно, внутреннее трение, дилатансию и сцепление или предел текучести при сдвиге.

Возникновение пластических деформаций в материале обусловлено критерием

$$f(\sigma_{ij}, \kappa) = 0.$$

Пластическая составляющая приращений деформаций связана с приращениями напряжений следующим образом

$$hd\varepsilon_{ij}^{p} = P_{ij}Q_{kl}d\sigma_{kl}, \quad (k, l = 1, 2, 3),$$

где h – скорость упрочнения,

$$P_{ij} = \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{s_{ij}}{2T} + \frac{1}{3}\beta\delta_{ij}, \qquad Q_{ij} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{s_{ij}}{2T} + \frac{1}{3}\mu\delta_{ij}.$$

Следовательно, соотношение (2) преобразуется к виду:

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{ds_{ij}}{2G} + (1 - 2\nu)\delta_{ij}\frac{d\sigma}{E} + h^{-1}P_{ij}Q_{kl}d\sigma_{kl}. \tag{5}$$

Выражая компоненты тензора приращений напряжений через компоненты тензора приращений деформаций, получим уравнения состояния для материала в пластических областях ($f = 0$).

В процессе нагружения напряженное состояние в упруго-пластическом материале характеризуется возможностью возникновения упругих ($f < 0$), пластических областей ($f = 0$) и областей упругой разгрузки ($df < 0$).

Таким образом, полная система дифференциальных уравнений для определения на основе метода последовательных нагружений в исследуемой области полей приращений перемещений и напряжений в условиях плоской деформации является замкнутой и содержит: уравнения равновесия (1); уравнения, связывающие приращения деформаций с приращениями перемещений (3); уравнения состояния в упругих областях (4) и в пластических областях (5).

Одним из эффективных численных методов решения задач механики деформируемого тела является метод конечных элементов [7]. В работе [8] продемонстрировано применение этого метода к задачам определения напряженно-деформированного состояния в упруго-пластических областях, содержащих систему отверстий и сдвиговых трещин. Показано, что локализация сдвигов ведет к уменьшению пластических областей в окрестности отверстий.

Численное моделирование на основе программной реализации метода конечных элементов позволяет проводить подробный анализ напряженно-деформированного состояния в исследуемой области и прогнозировать возможное появление пластического поведения или хрупкого разрушения материала.

Список литературы

1. Партон В.З., Морозов Е.М. Механика упругопластического разрушения. — М. : Наука, 1985.

2. Саврук М.П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. — Киев : Наукова думка, 1981.

3. Райс Дж. Р. Локализация пластической деформации // Теоретическая и прикладная механика. Труды III Международного конгресса IUTAM. — М. : Мир, 1979. — С. 439–471.

4. Соколовский В.В. Теория пластичности. — М. : Высшая школа, 1969.

5. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий. — Киев : Наукова думка, 1968.

6. Костерин А.В., Скворцов Э.В. Напряженно-деформированное состояние горных пород и фильтрация в неоднородных пластах // Вычислительные технологии. — 1999. — Т. 4, № 2. — С. 42–50.

7. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. — М. : Мир, 1975.

8. Бушманова О.П., Устюжанова А.В. Численное исследование напряжённо-деформированного состояния в окрестности системы отверстий и сдвиговых трещин // Известия Алтайского государственного университета. — 2012. — № 1(73). — С. 30–31.