

Пример инверсии бутылки Клейна

Чешкова М.А.

Алтайский государственный университет

ста41@yandex.ru

Аннотация

Приводится пример построения модели бутылки Клейна, используя периодические вектор-функции. Изучается инверсия рассматриваемой поверхности.

1. Введение

Пусть вдоль замкнутой кривой на поверхности в E^3 обносится нормальный вектор. Если при возвращении в исходную точку направление нормали совпадает с исходным, независимо от выбора кривой, то поверхность называется двусторонней. В противном случае имеем одностороннюю поверхность.

Впервые уравнение односторонней поверхности, открытой Мебиусом, было получено Машке [1]. Если гауссова кривизна листа Мебиуса равна нулю, то он называется плоским. Библиография работ на эту тему дана в работе [2].

К односторонним поверхностям относятся: скрещенный колпак [3, с. 304]; римская поверхность [3, с. 305], [4, с. 302]; поверхность Боя [3, с. 305]; бутылка Клейна [3, с. 306]. Римская поверхность, поверхность Боя и скрещенный колпак с крышкой являются моделью проективной плоскости. Односторонние поверхности исследуются автором в [5, 6].

2. Основной результат

В евклидовом пространстве E^3 рассмотрим гладкую замкнутую неплоскую кривую γ , заданную 4π -периодической вектор-функцией $\rho = \rho(u)$, которая не является 2π -периодической и 2π -антипериодической.

Так как $\rho(u) = \rho(u + 4\pi)$, то функция

$$s(u) = \frac{1}{2}(\rho(u) + \rho(u + 2\pi)), \quad (1)$$

есть 2π -периодическая не равная нулю, а вектор-функция

$$l(u) = \frac{1}{2}(\rho(u) - \rho(u + 2\pi)) \quad (2)$$

есть 2π -антипериодическая не равная нулю.

С помощью этих функций построим пример односторонней поверхности, которая является моделью бутылки Клейна.

Рассмотрим замкнутую поверхность K :

$$r(u, v) = s(u) + \sin(v)l(u) \pm \sin(kv)(l(u + \pi) + f(u)e) \quad (3)$$

$u \in [\pi, \pi]$, $v \in [-\pi, \pi]$, $k \in \mathbb{N}$, где $f = f(u) - 2\pi$ -антипериодическая функция, а вектор e есть постоянный.

Теорема 1. *Поверхность K определяет модель бутылки Клейна.*

Доказательство. Рассмотрим бутылку Клейна как фактор-пространство [7, с. 75]

$$K^* = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi] / [(-\pi, -v) \sim (\pi, v), (u, -\pi) \sim (u, \pi)].$$

Действительно,

$$r(u, -\pi) = s(u) = r(u, \pi),$$

$$r(-\pi, -v) = s(-\pi) + \sin(-v)l(-\pi) \pm \sin(-kv)(l(0) + f(-\pi)e) = s(\pi) + \sin(v)l(\pi) \pm \sin(kv)(l(2\pi) + f(\pi)e) = r(\pi, v).$$

Вектор $f(u)e$ удобно выбрать так, чтобы векторы $l(u), l(u + \pi) + f(u)e$ были ортогональными.

Если k – четное число, то кривая $v = const$ есть кривая типа восьмерки с k секциями и поверхность замкнутая.

Если $k \neq 1$ – нечетное число, то кривая $v = const$ есть незамкнутая кривая, а поверхность K есть поверхность с краем.

При $k = 1$ это отрезок прямой и поверхность K есть прямолинейный лист Мебиуса. \square

Теорема 2. *Кривая $r = r(u, 0)$ есть дезориентирующий контур поверхности K .*

Доказательство. Имеем

$$r_u(u, 0) = s(u)', r_v(u, 0) = l(u) \pm k(l(u + \pi) + f(u)e),$$

$$n(u, 0) = [r_u(u, 0), r_v(u, 0)] = [s(u)', l(u) \pm k(l(u + \pi) + f(u)e)] = -n(u + 2\pi, 0).$$

\square

Теорема 3. *Пусть вектор-функция $r = r(u, v)$ определяет модель бутылки Клейна, а функция $f = f(u, v)$ удовлетворяет следующим условиям*

1) $f(u, v)$ не обращается в нуль на промежутке $[-\pi, \pi]$,

2) $f(\pi, v) = f(-\pi, -v), f(u, -\pi) = f(u, \pi)$.

Тогда вектор-функция $r(u, v)^ = f(u, v)r(u, v)$ также определяет модель бутылки Клейна.*

Доказательство. Непосредственно проверяется, что $r^*(u, -\pi) = r^*(u, \pi), r^*(-\pi, -v) = r^*(\pi, v)$. \square

Рассмотрим инверсию

$$r^* = \frac{m^2 r}{\langle r, r \rangle} \quad (4)$$

относительно окружности радиуса m с центром $O(0, 0, 0)$

Теорема 4. *Если бутылка Клейна не проходит через центр инверсии, то инверсия бутылки Клейна есть бутылка Клейна.*

Доказательство. По условию теоремы функция $\psi = \langle r, r \rangle \neq 0$. Доказательство следует из теоремы 3. \square

Обозначим полученную поверхность через KI .

Теорема 5. *Если бутылка Клейна не проходит через центр инверсии, то дезориентирующий контур поверхности K при инверсии (4) перейдет в дезориентирующий контур поверхности KI .*

Доказательство. Имеем

$$r_u^*(u, v) = \frac{m^2}{\psi(u, v)} \left(-\frac{\psi'_u(u, v)r(u, v)}{\psi(u, v)} + r_u(u, v) \right),$$

$$r_v^*(u, v) = \frac{m^2}{\psi(u, v)} \left(-\frac{\psi'_v(u, v)r(u, v)}{\psi(u, v)} + r_v(u, v) \right).$$

$$n^*(u, v) = \frac{m^4}{\psi(u, v)^2} \left(n(u, v) - \frac{\psi'_u(u, v)}{\psi(u, v)} [r(u, v), r_v(u, v)] + \frac{\psi'_v(u, v)}{\psi(u, v)} [r(u, v), r_u(u, v)] \right).$$

Рассмотрим функцию

$$\psi(u, v) = \langle s(u), s(u) \rangle + \sin(v)^2 \langle l(u), l(u) \rangle + \sin(kv)^2 \langle l(u + \pi) + f(u)e, l(u + \pi) + f(u)e \rangle + 2 \sin(v) \langle s(u), l(u) \rangle \pm \sin(kv) \langle s(u), l(u + \pi) + f(u)e \rangle \pm \sin(v) \sin(kv) \langle l(u), l(u + \pi) + f(u)e \rangle.$$

Так как

$$\psi(u, 0) = \langle s(u), s(u) \rangle = \psi(u + 2\pi, 0),$$

$$\psi_u(u, 0) = 2 \langle s(u)', s(u) \rangle \psi(u + 2\pi, 0),$$

$$\psi_v(u, 0) = 2 \langle s(u), l(u) \rangle \pm 2k \langle s(u), l(u + \pi) + f(u)e \rangle = -\psi_v(u + 2\pi, 0),$$

то имеем $n^*(u + 2\pi, 0) = -n^*(u, 0)$. Теорема доказана. \square

3. Пример

Уравнение (3) при $s(u) = (4 \cos(u), 4 \sin(u), 0)$, $l(u) = (\cos(u/2) \cos(u), \cos(u/2) \sin(u), \sin(u/2))$, $k = 2$, $f = -2 \cos(u/2)$, $e = (0, 0, 1)$ определяет классическую бутылку Клейна K , заданную в виде восьмерки.

Имеем

$$\begin{aligned} r(u, v) = & (4 \cos(u) + \sin(v) \cos(u/2) \cos(u) - \sin(2v) \sin(u/2) \cos(u), \\ & 2 \sin(u) + \sin(v) \cos(u/2) \sin(u) - \sin(2v) \sin(u/2) \sin(u), \\ & \sin(v) \sin(u/2) + \sin(2v) \cos(u/2)), \quad u \in [-\pi, \pi], \quad v \in [-\pi, \pi]. \end{aligned}$$

Следует заметить, что векторы $l(u)$, $l(u + \pi) + f(u)e$ ортогональные и единичные.

Положим $u = 0$. Имеем кривую $w : r(0, v) = (4 + \sin(v), 0, \sin(2v))$.

Построим эту кривую (рис. 1). Она пересекает ось (Ox) в точках $x = 3$, $x = 4$, $x = 5$.

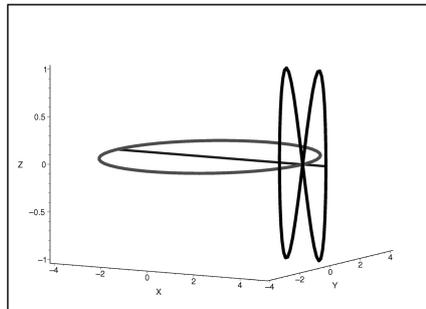
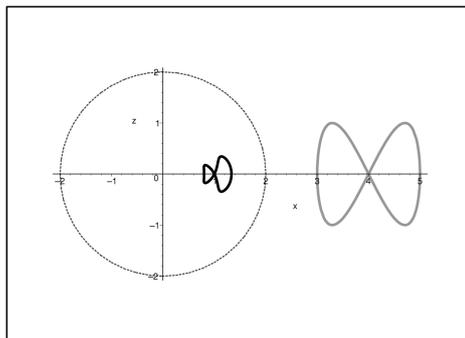
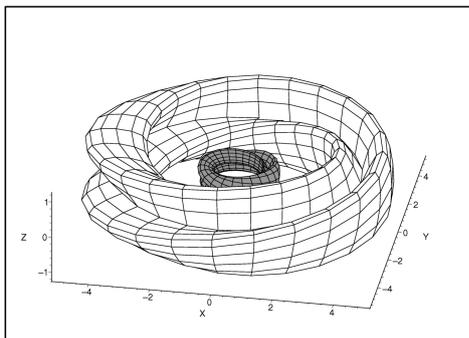
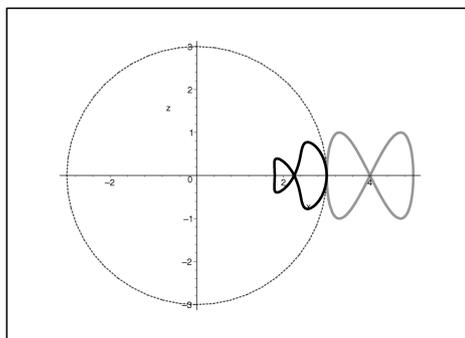
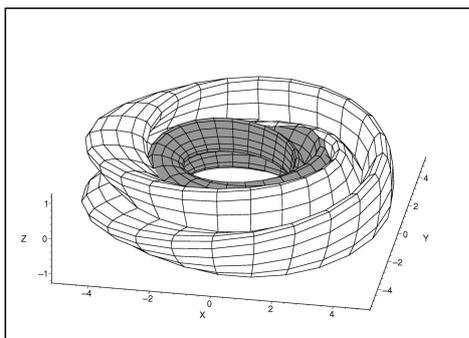
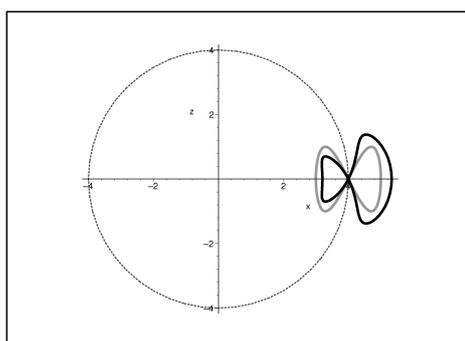
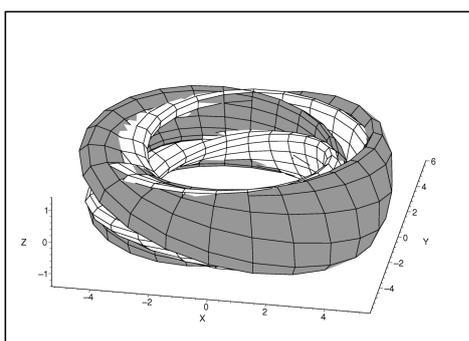
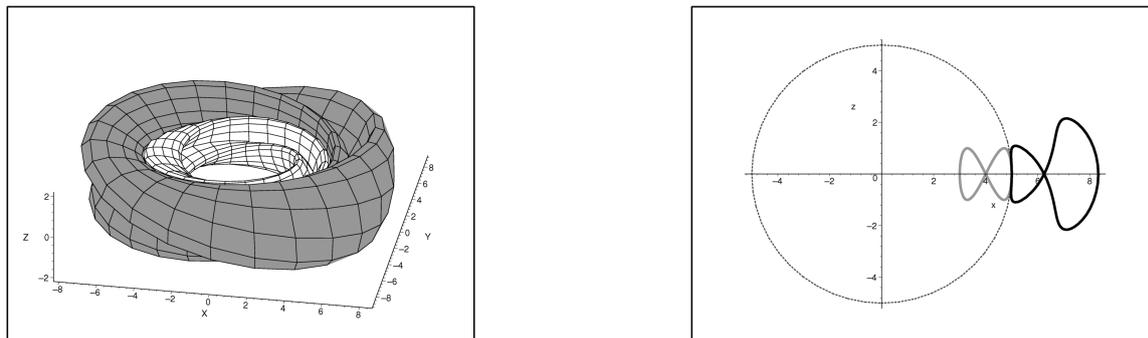


Рисунок 1. Кривая $u = 0$

Строим инверсию (темная) поверхности K (светлая) и кривой w для $m = 2$ (рис. 2), $m = 3$ (рис. 3), $m = 4$ (рис. 4), $m = 5$ (рис. 5), $m = 6$ (рис. 6).

Рисунок 2. Инверсия K , $m = 2$ Рисунок 3. Инверсия K , $m = 3$ Рисунок 4. Инверсия K , $m = 4$

Рисунок 5. Инверсия K , $m = 5$ Рисунок 6. Инверсия K , $m = 6$

Список литературы

1. Mashke H. Note on the unilateral surface of Moebius // Trans. Amer. Math. Sos. — 1900. — no. 1:1.
2. Сабитов И.Х. Изометрические погружения и вложения плоского листа Мебиуса в евклидовы пространства // Известия РАН. — 2007. — № 71 (5). — С. 197–224.
3. Кривошاپко С.Н., Иванов В.Н., Халаби С.М. Аналитические поверхности. — М. : Наука, 2006.
4. Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия : пер. с немец. — М. : Мир, 1981.
5. Чешкова М.А. Об одной модели бутылки Клейна // Известия Алтайского гос. ун-та. — 2016. — № 1 (89). — С. 180–184.
6. Чешкова М.А. Односторонние поверхности // Известия Алтайского гос. ун-та. — 2015. — № 1/2 (85). — С. 164–168.
7. Борисович Ю.Г., Близняков Н.М., Израилевич Я.А., Фоменко А.Т. Введение в топологию. — М. : Наука, 1995.