

Методы блочного линейного программирования

А.В. Жариков, Н.М. Оскорбин

Алтайский государственный университет

zharikov.av@gmail.com, osk46@mail.ru

Рассматривается экономическая ситуация, в которой объединение состоит из T предприятий, каждое из которых выпускает продукцию n_t видов, потребляя ресурсы, которыми распоряжается управляющая компания объединения (центр), и ресурсы, являющиеся “собственностью” каждого предприятия. Предполагаются известными матрицы A_t , \bar{A}_t норм потребления ресурсов, векторы $B \in R^m$, $B_t \in R^{m_t}$ лимитов ресурсов соответственно центра и локальных ресурсов предприятий и вектор $P_t \in R^{n_t}$ коэффициентов дохода от реализации продукции предприятием t ($t = 1, \dots, T$). Требуется найти сбалансированный по ресурсам план выпуска продукции, дающий максимальный доход объединению.

Перейдем к формированию условий модели планирования. Пусть неотрицательный вектор $x_t \in R^{n_t}$ – план предприятия t . Тогда ограничение по локальному ресурсу записывается в виде

$$A_t x_t \leq B_t, \quad t = 1, \dots, T.$$

Множество X_t допустимых планов предприятия t задается так:

$$X_t = \{x_t \in R^{n_t} | A_t x_t \leq B_t, x_t \geq 0\}, \quad t = 1, \dots, T.$$

Сбалансированность плана по ресурсам объединения:

$$\sum_{t=1}^T \bar{A}_t x_t \leq B,$$

а целевая функция принятия решений имеет вид

$$F = \sum_{t=1}^T P_t x_t \rightarrow \max.$$

Для сравнения эффективности информационных процессов при решении записанной задачи годового планирования рассматриваются три метода блочного программирования: Данцига-Вульфа, Корнаи-Липтака и метод отсечений [1]. При исследовании процессов согласования решений применяются подходы, описанные в работах [2, 3]. Особенность выбранных методов согласования решений состоит в следующем. В методе Данцига-Вульфа широко используется система внутрифирменных цен, в методе отсечений согласование осуществляется только путем обмена вариантами планов производства. Метод Корнаи-Липтака занимает промежуточное положение. В качестве аналога цен используются двойственные переменные задачи центра, которые устанавливают для центра приоритетность вариантов планов, выбираемых предприятиями.

Исследование эффективности данных схем обмена информацией осуществляется путем многократной генерации условий задачи планирования и последующим решением каждым методом. Количественные оценки сравнения схем проводятся по числу итераций, которые необходимы для нахождения оптимального плана. Алгоритмы решения задач реализованы как в среде электронных таблиц MS Excel, так и в среде математического пакета MATLAB.

Генерация проводилась для разных размерностей матриц \bar{A} , A , B . Задачи разбиты на 3 группы:

- генерация проводилась без изменения общей структуры матриц \bar{A}_t , A_t , B , т.е. размерности всех матриц оставались неизменными, а генерировались только значения элементов матриц;
- включает в себя задачи с изменением количества ограничений для ресурсов объединения предприятий, т.е. изменение размерности матриц \bar{A}_t .
- задачи, сгенерированные при изменении количества предприятий при одинаковом числе централизованных ресурсов.

Первый вид задач исследован для оценки эффективности процессов согласования решений. Остальные группы сгенерированных

задач направлены на изучение чувствительности к изменениям структуры задачи планирования.

Информационное взаимодействие в корпоративных системах на основе алгоритма метода Данцига-Вульфа [1] состоит из следующих этапов:

- 1) производится декомпозиция задачи на блоки (предприятия);
- 2) на уровне предприятий находится опорный (допустимый) план производства, и информация о нем передается в центр;
- 3) на уровне центра находится решение в виде заданий для предприятий и происходит обмен трансфертными ценами на ресурсы объединения;
- 4) на уровне предприятий находится текущий план производства и отправляется в центр в виде информации о прибыли предприятия и текущем потреблении ресурсов объединения;
- 5) происходит информационное взаимодействие путем последовательного выполнения шагов 3 и 4;
- 6) после окончания шага 5 происходит восстановление решений предприятий, оценка эффективности найденного решения и расчет вознаграждений для предприятий.

Рассмотрим процесс согласования корпоративных решений методом Корнаи-Липтака [1]:

- 1) задается начальное распределение ресурсов объединения и производится задание условий задачи планирования для предприятий;
- 2) на уровне предприятий находится опорный (допустимый) план производства для начальных значений расходов ресурсов объединения и передается в виде оценок цен на ресурсы объединения и значений целевых функций предприятий;
- 3) на уровне центра находится решение в виде новых значений допустимых расходов ресурсов объединения для каждого предприятия;
- 4) на уровне предприятий уточняется текущий план производства для значений ресурсов объединения и передается в виде цен на ресурсы объединения и значений целевых функций;

- 5) происходит информационное взаимодействие путем выполнения шагов 3 и 4;
- 6) после окончания шага 5 происходит восстановление решений предприятий, оценка эффективности найденного решения и расчет вознаграждений для предприятий.

В отличие от алгоритма метода Данцига-Вульфа, центр не устанавливает трансфертные цены на ресурсы объединения, а получает их оценки от предприятий. Данный факт указывает на ослабление степени централизации, что позволяет реализовывать на нижнем уровне не жестко регламентированные планы производства.

Метод отсечений [4] основан на принципе последовательного восстановления в центре допустимого множества решений. Стоит отметить, что оценки сходимости данного метода в современной литературе отсутствуют, что позволяет говорить о новизне проводимого исследования.

Перепишем задачу планирования в свернутом виде [1]:

$$Z = \{(z_1, \dots, z_T) | z_1 + z_2 + \dots + z_T \leq B, z_t \geq 0, t = \overline{1, T}, z_t \in R^m\}.$$

Задача центра:

$$F^* = \arg \max_{z \in Z} \left(\sum_{t=1}^T F_t(z_t) \right).$$

Задача предприятия t , $t = \overline{1, T}$:

$$\delta_t = \min \{ \|z_t^* - z_t(x_t)\| | x_t \in X_t \} = 0,$$

где z_t^* – одно из решений задачи центра; $z_t(x_t)$ – вектор-функция зависимости прибыли и потребляемых ресурсов от планов каждого предприятия.

Процесс согласования корпоративных решений метода отсечений имеет вид:

Шаг 1 (запуск алгоритма). Формируем множество $Z^1 \supseteq Z$. Примем $k = 1$.

Шаг 2. Находим z^k .

Шаг 3. Находим δ^k и $\tilde{z}^k = z(x^k)$. Если $\delta^k = 0$, то идем к шагу 5.

Шаг 4. Записываем множества $H(z^k)$ и $Z^{k+1} = Z^k \cap H(z^k)$. Примем $k = k + 1$. Идем к шагу 2.

Шаг 5. Записываем решение исходной задачи: $x^* = x^k$.

Информационное взаимодействие в корпоративных системах на основе алгоритма метода отсечений состоит из следующих этапов:

- 1) производится декомпозиция задачи планирования на задачу центра и задачи предприятий;
- 2) на уровне предприятий находятся опорные (начальные) планы производства, которые передаются в виде текущих потреблений ресурсов и достигнутого уровня прибыли;
- 3) на уровне центра находится решение в виде новых значений допустимых расходов ресурсов объединения для каждого блока;
- 4) на уровне предприятий рассчитывается текущий план производства из условия минимизации разности между текущим потреблением и значением плана потребления ресурсов объединения из центра. Далее посылается информация в центр: прибыль предприятия и разность между фактическим потреблением ресурса и потреблением, заданным центром;
- 5) происходит информационное взаимодействие путем выполнения шагов 3 и 4;
- 6) после 5-го этапа происходит восстановление решений предприятий, оценка эффективности найденного решения и расчет вознаграждений для предприятий.

Данная схема информационного взаимодействия носит исполнительский характер, но обмен информации заключается в передаче плана использования ресурсов объединения и передаче прибыли предприятий, что имеет практическую ценность по сравнению с другими методами.

Для сгенерированных задач, разбитых на группы, были проведены численные исследования сходимости для каждого процесса согласования решений.

Для всех групп задач на рисунках 1–3 приведены примеры результатов численного моделирования.

При численном моделировании изучалась скорость сходимости процесса согласования решений для трех методов при изменениях числа предприятий и числа централизованных ресурсов. Многовариантными расчетами показано, что для метода Данцига-Вульфа

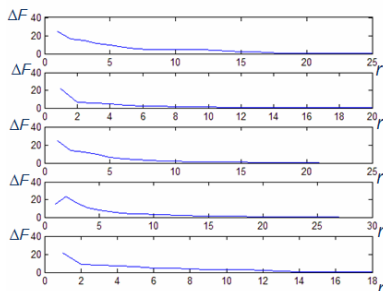


Рис. 1. График сходимости метода отсечений для задач первого вида

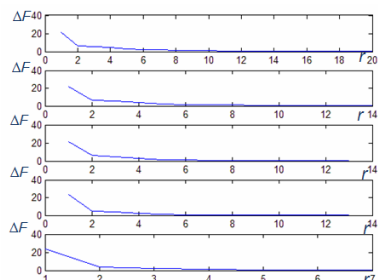


Рис. 2. График сходимости метода отсечений для задач второго вида

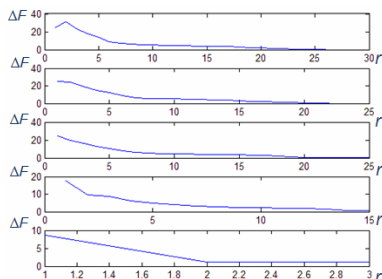


Рис. 3. График сходимости метода отсечений для задач третьего вида

скорость сходимости не зависит от числа предприятий объединения. В процессе согласования решений другими методами строго прослеживается положительная зависимость количества итераций от количества предприятий, что говорит о сильной чувствительности к изменению числа предприятий в объединении. Для всех методов увеличение числа централизованных ресурсов влечет возрастание количества итераций. Причем соотношение между скоростями сходимости указанных методов остается неизменным.

Результаты сравнения эффективности схем информационного взаимодействия в корпоративной системе на основе методов блочного линейного программирования можно представить в виде таблицы, в которой указаны ранги методов для разных признаков сравнения.

Эффективность схем организации процессов согласования корпоративных решений (1 – высокая оценка, 3 – низкая)

Показатели сравнения	Данцига-Вульфа	Корнаи-Липтака	Метод отсечений
Степень централизации	1	3	2
Эффективность методов	1	2	3
Эффективность при увеличении числа централизованных ресурсов	1	2	3
Эффективность при увеличении количества предприятий в объединении	1	3	2

Как видно из таблицы, эффективность метода Данцига-Вульфа самая высокая, однако в процессе решения между центром и агентами происходит обмен теневыми (трансфертными) ценами, т.е. центром сообщаются цены на ресурсы объединения. Таким образом, можно признать целесообразным использование внутрифирменных цен для согласования корпоративных решений. Процесс согласования методом Корнаи-Липтака имеет в целом большую эффективность, чем метод отсечений, однако на малом числе предприятий метод отсечений показывает большую скорость сходимости, чем процесс Корнаи-Липтака.

Библиографический список

1. Лэддон Л. Оптимизация больших систем. — М. : Наука, 1975.
2. Алгазин Г.И. Модели системного компромисса в социально-экологических исследованиях : монография. — Барнаул : Азбука, 2009.
3. Боговиз А.В., Оскорбин Н.М., Жариков А.В. Информационные процессы координации корпоративных решений и их компьютерное моделирование // Вестник Новосибирского государственного университета. — 2010. — Т. 8, №1.
4. Мамченко О.П., Оскорбин Н.М. Моделирование иерархических систем : учебник для вузов. — Барнаул : Изд-во Алт. ун-та, 2007.