Сети Штейнера для тетраэдра и параллелепипеда

К.О. Кизбикенов
Алтайская государственная педагогическая академия
kko@uni-altai.ru

Известна проблема Штейнера[1], которая звучит так: дано n точек ($n \geq 3$), построить связное дерево с вершинами в этих точках минимальной длины. Эффективные алгоритмы решения этой задачи не известны. В данной работе приводится решение этой задачи для четырех точек в пространстве, которые находятся в общем положении (являются вершинами тетраэдра).

Пусть ABCD – произвольный тетраэдр в пространстве. Выберем пару противоположных ребер, например, AB и CD. На ребре AB как на стороне построим равносторонний треугольник ABF. Вершина F таких треугольников опишет окружность с центром на стороне AB и радиусом $AB\sqrt{3}/2$. Эта окружность лежит в плоскости, перпендикулярной AB и проходящей через ее середину. Точно так же на ребре CD как на стороне построим равносторонний треугольник CDG. Вершины G тоже опишут аналогичную окружность. Будем искать точки F и G на этих окружностях так, чтобы выполнялись следующие условия:

1. Точки F и G должны быть максимально удалены друг от друга.

2. Отрезок FG должен пересекать отрезки AB и CD.

3. Допустим, что такие точки существуют, тогда описываем окружность около треугольника ABF. Эта окружность пересечет отрезок FG в некоторой точке M, а окружность, описанная около треугольника CDG, пересечет этот отрезок в точке N. Причем точки F, M, N, G должны быть расположены в данном порядке на отрезке FG. Тогда отрезки AM, MB, MN, NC и ND образуют искомую сеть Штейнера (рис. *1*).

Если не удается построить точки M и N, удовлетворяющие приведенным выше условиям, то для данной пары ребер нет сети Штейнера, нужно выбрать другую пару противоположных ребер и повторить процедуру с начала. В случае, когда ни для одной пары

---

[1] *Препарата Ф., Шеймос М.* Вычислительная геометрия: введение. – М. : Мир, 1989.

ребер не удается построить сеть Штейнера, тогда искомая кратчайшая сеть состоит из ребер, это так называемый евклидов минимальный остов (ЕМОД)[2]. Написана программа на Mathematica, которая строит сеть Штейнера для тетраэдра и прямоугольного параллелепипеда (рис. *1*, *2*).

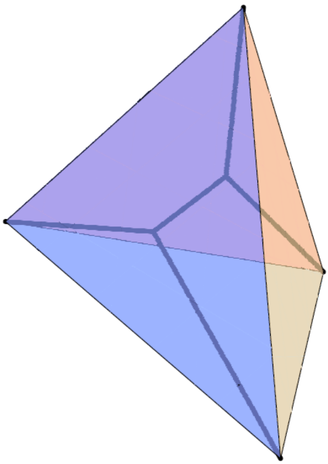

Рис. 1. Сеть Штейнера в тетраэдре

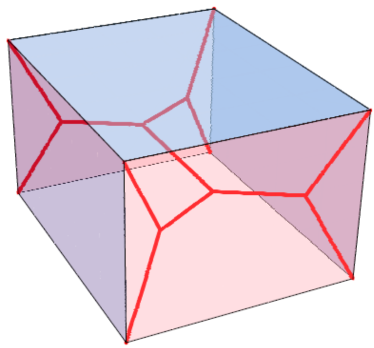

Рис. 2. Сеть Штейнера в параллелепипеде

[2]Указ. соч.