Применение пакетов символьных вычислений для исследования спектра оператора кривизны на трехмерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой[1]

Д.Н. Оскорбин

Алтайский государственный университет

oskorbin@yandex.ru

Исследованию спектров дифференциальных операторов на римановых многообразиях посвящены работы многих математиков [1–4]. В данной статье при помощи пакетов символьных вычислений среды Maple вычислен и исследован спектр оператора кривизны на трехмерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой.

---

[1]Работа выполнена при поддержке Совета по грантам Президента РФ для поддержки молодых российских ученых и ведущих научных школ (грант НШ–921.2012.1) и гранта ФЦПК (соглашение №8206, заявка №2012-1.1-12-000-1003-014).

Пусть G – трехмерная унимодулярная группа Ли с алгеброй Ли LG; $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — произвольное скалярное произведение в LG, соответствующее некоторой левоинвариантной римановой метрике на группе Ли G. Рассмотрим в LG ортонормированный базис $\{E_1, E_2, E_3\}$ (базис Дж. Милнора [1]) такой, что

$$[E_1, E_2] = \lambda_3 E_3, [E_2, E_3] = \lambda_1 E_1, [E_3, E_1] = \lambda_2 E_2, \tag{1}$$

где $\lambda_i \in R$ — структурные константы алгебры Ли LG, $i = 1, 2, 3$.

Пусть G — трехмерная неунимодулярная группа Ли. Без ограничения общности можно считать, что в LG существует ортонормированный базис $\{E_1, E_2, E_3\}$ (базис Дж. Милнора [1]) такой, что

$$\begin{aligned}
[E_1, E_2] &= (1+\xi)E_2 + (1+\xi)\sqrt{\rho-1}E_3,\\
[E_1, E_3] &= -(1-\xi)\sqrt{\rho-1}E_2 + (1-\xi)E_3,\\
[E_2, E_3] &= 0,
\end{aligned} \tag{2}$$

где $\xi \geq 0, \rho \geq 1$; ξ, ρ — структурные константы алгебры Ли LG.

Определение 1. *Рассмотрим оператор кривизны* $\mathcal{R} : \Lambda^2 LG \to \Lambda^2 LG$*, задаваемый формулой*

$$\langle\langle X \wedge Y, \mathcal{R}(U \wedge V)\rangle\rangle = R(X, Y, U, V), \tag{3}$$

где $\langle\langle X_1 \wedge Y_1, X_2 \wedge Y_2\rangle\rangle = \det \|\langle X_i, Y_j\rangle\|$ *— скалярное произведение в пространстве бивекторов* $\Lambda^2 LG$*,* $R(X, Y, U, V)$ *— тензор кривизны метрики* $\langle\cdot,\cdot\rangle$*.*

Лемма 1. *Пусть* G *— группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой* $\langle\cdot,\cdot\rangle$*,* $\{E_i\}$ *– ортонормированный базис Милнора. Тогда оператор кривизны* $\mathcal{R}$ *в базисе* $\{E_2 \wedge E_3, E_3 \wedge E_1, E_1 \wedge E_2\}$ *имеет диагональный вид и его спектр есть* $\{\sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{12}\}$*, где* $\sigma_{ij} = K(E_i \wedge E_j)$ *— секционные кривизны в направлениях* $(E_i \wedge E_j)$*. В случае унимодулярной группы спектр оператора* $\mathcal{R}$ *имеет вид:*

$$\begin{aligned}
\sigma_{23} &= \frac{1}{4}(2\lambda_1\lambda_2 + 2\lambda_1\lambda_3 - 2\lambda_2\lambda_3 - 3\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2),\\
\sigma_{31} &= \frac{1}{4}(2\lambda_1\lambda_2 - 2\lambda_1\lambda_3 + 2\lambda_2\lambda_3 - 3\lambda_2^2 + \lambda_1^2 + \lambda_3^2),\\
\sigma_{12} &= \frac{1}{4}(2\lambda_2\lambda_3 + 2\lambda_1\lambda_3 - 2\lambda_1\lambda_2 - 3\lambda_3^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2),
\end{aligned} \tag{4}$$

а в неунимодулярном случае

$$\sigma_{23} = -1 + \xi^2\rho, \sigma_{31} = -1 - \xi^2\rho + 2\xi\rho, \sigma_{12} = -1 - \xi^2\rho - 2\xi\rho. \qquad (5)$$

Из формул, выражающих структурные константы алгебры Ли через спектр оператора кривизны, в унимодулярном случае следует

Теорема 1. *Пусть $\sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{12} \in R$. Тогда трехмерная унимодулярная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой и главными значениями оператора кривизны $\{\sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{12}\}$ существует в том и только в том случае, если $(\sigma_{12} + \sigma_{23})(\sigma_{23} + \sigma_{31})(\sigma_{31}+\sigma_{12}) > 0$ либо по крайней мере два из чисел $\sigma_{12}+\sigma_{23}, \sigma_{23}+\sigma_{31}, \sigma_{31} + \sigma_{12}$ равны нулю.*

Замечание 1. *Возможны следующие случаи.*

1. При $(\sigma_{12} + \sigma_{23})(\sigma_{23} + \sigma_{31})(\sigma_{31} + \sigma_{12}) > 0$ набор структурных констант $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ однозначно определяется набором $\sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{12}$. Действительно, соотношения леммы 1 дают два решения. С учетом ограничений $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3, \lambda_2 \geq 0$ получаем единственное решение (набор структурных констант).

2. Ровно два из чисел $\sigma_{12} + \sigma_{23}, \sigma_{23} + \sigma_{31}, \sigma_{31} + \sigma_{12}$ равны нулю. Это возможно в двух случаях (с учетом ограничений $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3, \lambda_2 \geq 0$).

2.1. Если $\sigma_{12} = \sigma_{23} = - - \sigma_{31} \neq 0$. Тогда $\lambda_2 = \lambda_1 + \lambda_3, \lambda_1 < 0$, получаем параметрическое семейство решений

$\{(\lambda_1, \lambda_1 + \lambda_3, \lambda_3), \lambda_1 < 0, \lambda_3 > 0, \lambda_1 + \lambda_3 \geq 0, 2\lambda_1\lambda_3 = \sigma_{12} + \sigma_{23}\}$.

2.2. Если $\sigma_{12} = -\sigma_{23} = -\sigma_{31} \neq 0$. Тогда $\lambda_3 = \lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 > 0$, получаем параметрическое семейство решений

$\{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2), 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2, 2\lambda_1\lambda_2 = \sigma_{31} + \sigma_{23}\}$.

3. Все числа $\sigma_{12} + \sigma_{23}, \sigma_{23} + \sigma_{31}, \sigma_{31} + \sigma_{12}$ равны 0. Тогда $\sigma_{23} = \sigma_{31} = \sigma_{12} = 0$, получаем параметрическое семейство решений

$\{(0, \lambda, \lambda, \lambda \geq 0\}$.

Аналогично рассмотрим неунимодулярный случай. С учетом нормировки метрики и условий $\xi \geq 0, \rho \geq 1$ получаем критерий существования трехмерной неунимодулярной группы Ли с предписанными главными значениями секционной кривизны.

Теорема 2. *Трехмерная неунимодулярная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой и главными значениями оператора кривизны $\{\sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{31}\}$ существует тогда и только тогда, когда (с точностью до перенумерации) выполнены условия:*

$\sigma_{31}\sigma_{12} \leq \sigma_{23}^2 < \left(\frac{\sigma_{31}+\sigma_{12}}{2}\right)^2, \frac{\sigma_{31}+\sigma_{12}}{2} < \sigma_{23}$,
либо $\sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{31} < 0$.

Замечание 2. *В условиях теоремы 2 возможно не более двух перенумераций $\sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{31}$, при которых будут выполняться условия $\sigma_{31}\sigma_{12} \leq \sigma_{23}^2 < \left(\frac{\sigma_{31}+\sigma_{12}}{2}\right)^2, \frac{\sigma_{31}+\sigma_{12}}{2} < \sigma_{23}$, т.е. для любой такой тройки $(\sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{12})$ существует не более двух решений (наборов структурных констант).*

Исследуем функцию δ-защемленности секционной кривизны на трехмерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой.

Определение 2. *Функцией δ-защемленности секционной кривизны $K_{\langle\cdot,\cdot\rangle}$ метрики $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на группе Ли G назовем функцию $\delta(\langle\cdot,\cdot\rangle) = \frac{\min K_{\langle\cdot,\cdot\rangle}}{\max K_{\langle\cdot,\cdot\rangle}}$, при условии $\max K_\sigma\langle\cdot,\cdot\rangle \neq 0$.*

Рассмотрим унимодулярный случай.

Теорема 3. *Функция δ-защемленности секционной кривизны трехмерных унимодулярных групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой принимает значения, указанные в таблице 1.*

Таблица 1

Алгебра LG	$su(2)$	$sl(2,R)$	$e(2)$
Функция δ	$-3 < \delta \leq 1$	$\delta \leq -1$	$\delta \leq -1$
Алгебра LG	$e(1,1)$	h	R^3
Функция δ	$-3 < \delta \leq -1$	$\delta = -3$	$K = 0$

Схема доказательства. Заметим, что функция δ-защемленности секционной кривизны принимает постоянное значение на любой прямой $(t\lambda_1, t\lambda_2, t\lambda_3), t \in R$, поэтому достаточно оценить δ-защемленность в двумерных симплексах:

$$\Omega_1 : \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1, 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3,$$
$$\Omega_2 : -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1, \lambda_3 \geq \lambda_2 > 0, \lambda_1 < 0$$

и на границах указанных областей.

Используя ранее полученные формулы для главных значений, определим границы функции δ-защемленности для каждой из возможных алгебр. Аналогично получаем, что справедлива

Теорема 4. *Функция δ-защемленности секционной кривизны $K_{\langle\cdot,\cdot\rangle}$ на трехмерной неунимодулярной алгебре Ли удовлетворяет условию $-1 < \frac{1}{\delta} \leq 1$.*

Определим сигнатуры спектра оператора кривизны на трехмерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой. Найдем возможные сигнатуры для троек, как указано в таблице 2.

Таблица 2

№	1	2	3	4	5
Сигнатура	$(-,-,-)$	$(-,-,0)$	$(-,-,+)$	$(-,0,0)$	$(-,0,+)$
№	6	7	8	9	10
Сигнатура	$(-,+,+)$	$(0,0,0)$	$(0,0,+)$	$(0,+,+)$	$(+,+,+)$

Теорема 5. *Пусть G — трехмерная унимодулярная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой, LG – ее алгебра Ли. Сигнатуры таблицы 2 реализуются как сигнатуры спектра оператора кривизны для некоторого скалярного произведения на LG в случаях, помеченных знаком „+“ в таблице 3.*

Таблица 3

	№ сигнатуры									
Алгебра Ли	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$su(2)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$
$sl(2,R)$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$
$e(2)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$
$e(1,1)$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$
h	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$
R^3	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$

Схема доказательства. Рассмотрим последовательно все алгебры. Оценки функции δ-защемленности показывают, что сигнатуры 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8 не реализуемы. Далее находим значения структурных констант, при которых реализуются остальные сигнатуры.

Аналогичным методом получаем утверждение о возможных сигнатурах в неунимодулярном случае.

Теорема 6. *Пусть G – трехмерная неунимодулярная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой, LG – алгебра Ли группы G. В качестве сигнатуры спектра оператора кривизны для некоторого скалярного произведения на LG реализуются сигнатуры 1, 2, 3, 4, 5, 6 таблицы 2.*

Рассмотрим далее случай локально однородных трехмерных римановых многообразий. Из теорем 1, 2, схемы рассуждений работы [5], а также теоремы К. Секигавы (K. Sekigava) [6] о классификации трехмерных локально однородных римановых многообразий следует

Теорема 7. *Локально однородное трехмерное риманово многообразие (M, g) с главными значениями оператора кривизны $\{\sigma_{31}, \sigma_{23}, \sigma_{12}\}$ существует в том и только в том случае, если числа σ_{ij} (с точностью до перестановок) удовлетворяют хотя бы одному (возможно, нескольким) из условий:*

1. Два числа σ_{ij} равны нулю.

2. $(\sigma_{12} + \sigma_{23})(\sigma_{23} + \sigma_{31})(\sigma_{31} + \sigma_{12}) > 0$, или по крайней мере два из чисел $\sigma_{12} + \sigma_{23}, \sigma_{23} + \sigma_{31}, \sigma_{31} + \sigma_{12}$ нули.

3. $\sigma_{31}\sigma_{12} \le \sigma_{23}^2 < \left(\frac{\sigma_{31}+\sigma_{12}}{2}\right)^2, \frac{\sigma_{31}+\sigma_{12}}{2} < \sigma_{23}$ $\sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{31} < 0$.

В следующей теореме без ограничения общности можно считать, что $\sigma_{31} \le \sigma_{23} \le \sigma_{12}$.

Теорема 8. *Локально однородное трехмерное риманово многообразие (M, g) с главными значениями оператора кривизны $\sigma_{31} \le \sigma_{23} \le \sigma_{12}$ существует в том и только в том случае, если выполнено одно из условий:*

1) тройка $(\sigma_{31}, \sigma_{23}, \sigma_{12})$ имеет одну из сигнатур 4, 7, 8, 9, 10 таблицы 2;

2) тройка $(\sigma_{31}, \sigma_{23}, \sigma_{12})$ имеет одну из сигнатур 1, 2, при этом выполнено одно из двух условий:

$\sigma_{31}\sigma_{12} \le \sigma_{23}^2 < \left(\frac{\sigma_{31}+\sigma_{12}}{2}\right)^2, \frac{\sigma_{31}+\sigma_{12}}{2} < \sigma_{23}$,

либо $\sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{31} < 0$*;*

3) тройка $(\sigma_{31}, \sigma_{23}, \sigma_{12})$ имеет сигнатуру 3, при этом выполнено хотя бы одно из двух условий: $\sigma_{31}\sigma_{12} \le \sigma_{23}^2 < \left(\frac{\sigma_{31}+\sigma_{12}}{2}\right)^2, \frac{\sigma_{31}+\sigma_{12}}{2} < \sigma_{23}$,

либо $\sigma_{31} < -\sigma_{12} < \sigma_{23}$*;*

4) тройка $(\sigma_{31}, \sigma_{23}, \sigma_{12})$ *имеет одну из сигнатур 5, 6, при этом выполнено одно из двух условий:*
$\sigma_{31} < -\sigma_{12}$
или $\sigma_{31} = -\sigma_{12} = -\sigma_{23}$.

Замечание 3. *Все полученные результаты можно распространить на метрики, конформно эквивалентные левоинвариантным римановым метрикам на трехмерных группах Ли.*

Библиографический список

1. Milnor J. Curvature of left invariant metrics on Lie groups // Adv. Math. — 1976. — Vol. 21.

2. Шарафутдинов В.А. Локальная слышимость гиперболической метрики // Сиб. матем. журн. — 2009. — Т. 50, № 5.

3. Gordon C.S. Survey of isospectral manifolds // Handbook of differential geometry / ed. by Dillen, J.E. Franki et al. — Amsterdam : North-Holland, 2000. — Vol. 1.

4. Kac M. Can one hear the shape of a drum? // Amer. Math. Monthly. — 1966. — No. 73.

5. Kowalski O., Nikcevic S. On Ricci eigenvalues of locally homogeneous Riemannian 3-manifolds // Geom. Dedicata. — 1996. — No. 1.

6. Sekigawa K. On some 3-dimensional curvature homogeneous spaces // Tensor NS. — 1997. — No. 31.