Оценка ширины множества в задаче регрессии[1]

И.В. Пономарев
Алтайская государственная педагогическая академия
igorpon@mail.ru

Пусть R^m – m-мерное арифметическое евклидово пространство. Пусть Ω – конечное подмножество точек:

$$\Omega = \{(x_{i,1}, x_{i,2}, \ldots, x_{i,m}) : i = 1, \ldots, N\},$$

которое можно рассматривать как результат N экспериментов. В приложениях часто возникает вопрос о существовании функциональной зависимости между переменными $\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$. Наиболее простая зависимость – линейная. В статистике разработаны мощные методы для анализа множества Ω на линейную зависимость, основанные на Евклидовой норме. В данной работе в качестве основы берется Чебышевская норма равномерного отклонения.

Определение 1. *Минимальной шириной множества Ω вдоль переменной x_j, $j = 1, \ldots, m$ назовем число*

$$\alpha_\infty(\Omega, x_j) = 2 \cdot \min_{k_s, s\neq j\,; b} \left\{ \max_{i=1,\ldots,N} |x_{i,j} - \sum_{s\neq j}^{m} k_s x_{i,s} - b| \right\}. \qquad (1)$$

С геометрической точки зрения величина $\alpha_\infty(\Omega, x_j)$ равна минимуму ширины "полосы", ограниченной двумя параллельными гиперплоскостями и содержащей множество Ω, ширина берется вдоль оси x_j в R^m (т.е. длина пересечения полосы с осью x_j).

Уравнение гиперплоскости, на котором достигается (1), назовем уравнением L_∞ регрессии на переменную x_j:

$$x_j = \sum_{s\neq j}^{m} k_s^0 x_s - b^0. \qquad (2)$$

[1]Работа выполнена при поддержке Российского гуманитарного научного фонда (грант №12-12-22000-а(р)) и администрации Алтайского края, а также Совета по грантам Президента РФ для поддержки молодых российских ученых и ведущих научных школ (грант НШ–921.2012.1), ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (гос. контракт №02.740.11.0457).

Замечание 1. *Аналогичные определения справедливы в случае произвольного выпуклого подмножества $\Omega \subset R^m$. Если дополнительно множество Ω центрально-симметрично относительно начала координат R^m, то величина $\alpha_\infty(\Omega, x_j)$ равна длине отрезка пересечения множества Ω с осью OX_j.*

Величины $\alpha_\infty(\Omega, x_j)$ тесно связаны с такими понятиями из выпуклой геометрии, как ширина выпуклого множества в данном направлении и широта выпуклого множества [1].

Определение 2. *Шириной выпуклого множества Q в направлении единичного вектора s называется длина $d(s, Q)$ ортогональной проекции этого множества на прямую, параллельную s. Широтой множества Q называют [1]*

$$\triangle(Q) = \min_s d(s, Q).$$

Определение 3. *Пусть K и L – непустые выпуклые множества в n-мерном аффинном пространстве с началом координат O, к которому соотнесены радиусы-векторы точек x, y тел K, L. Тогда (зависящее от выбора O) множество*

$$K + L = \{z \mid z = x + y \;\; x \in K, y \in L\} \tag{3}$$

называют суммой K и L.

Пусть Q — непустое компактное выпуклое множество в R^n. Центральная симметризация S_O относительно начала $O \in R^n$ переводит множество Q во множество

$$S_O(Q) = \frac{Q + (-Q)}{2}. \tag{4}$$

Множество $S_O(Q)$ также является выпуклым в R^n [2], но уже центрально-симметричным относительно начала координат.

Теорема 1. *Широта выпуклого множества Q равна широте множества $S_O(Q)$:*

$$\triangle(Q) = \triangle(S_O(Q)).$$

Доказательство. Пусть $K = S_O(Q)$ – симметризация множества Q. Любое выпуклое множество определяет опорную функцию

$$h_Q(s) = \max_{u \in Q} \langle s, u \rangle,$$

s – точка на сфере единичного радиуса с центром в начале координат, $\langle s, u\rangle$ – скалярное произведение. Таким образом,

$$d(s, Q) = h_Q(s) + h_{-Q}(s) = h_Q(s) - h_Q(-s).$$

Опорная функция множества K может быть задана в виде

$$h_K(s) = \max_{v \in K} \langle s, v\rangle,$$

и в силу симметричности множества K

$$h_K(s) = \max_{u_1, u_2 \in Q} \left\langle s, \frac{u_1 - u_2}{2} \right\rangle = \frac{1}{2}\left(\max_{u_1 \in Q} \langle s, u_1\rangle + \max_{u_2 \in -Q} \langle s, u_2\rangle \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(h_Q(s) + h_{-Q}(s)\right).$$

Ширина множества K в направлении s имеет вид

$$d(s, K) = 2h_K(s) = h_Q(s) + h_{-Q}(s).$$

Следовательно,

$$\triangle(K) = \min_s d(s, K) = \min_s d(s, Q) = \triangle(Q).$$

Пусть Q – выпуклое в R^n множество, имеющее ширину в направлении каждой координатной оси, равную $2a_i, 1 \leq i \leq n$. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Верно неравенство*

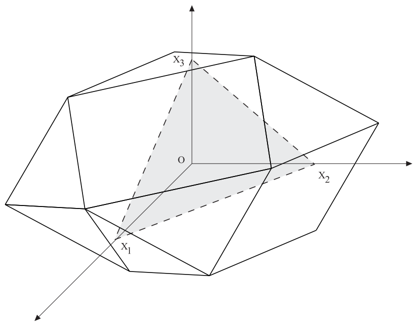
$$\triangle(Q) \geq \frac{2^{\frac{n+1}{2}} \prod\limits_{i=1}^{n} a_i}{\sqrt{(-1)^{n-2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & a_1^2 + a_2^2 & \dots & a_1^2 + a_n^2 \\ 1 & a_1^2 + a_2^2 & 0 & \dots & a_2^2 + a_n^2 \\ \multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ 1 & a_1^2 + a_n^2 & a_2^2 + a_n^2 & \dots & 0 \end{vmatrix}}}, \qquad (5)$$

где $\triangle(Q)$ *– широта множества.*

Доказательство. Подвергнем множество Q симметризации $K = S_O(Q)$. Множество K задает в R^n выпуклый многогранник. Обозначим K_j грани этого многогранника. В силу того что многогранник выпуклый,

$$\triangle(K) = 2 \cdot \min_j h_{K_j},$$

где h_{K_j} – длина перпендикуляра, проведенного из начала координат к грани K_j.



Симметризованный многогранник

Пусть X_i – точки пересечения координатных осей с многогранником $i = 1, \ldots, n$ и H – длина перпендикуляра, проведенного к сечению $X_1 \ldots X_n$. Очевидно, что для любого j верно неравенство $h_{K_j} \geq H$, следовательно,

$$\triangle(K) \geq 2H. \tag{6}$$

В силу следствия $OX_i = a_i$. Объем многогранника $W = OX_1 \ldots X_n$, построенного на взаимно перпендикулярных отрезках, равен [3]

$$V_W = \frac{1}{n!} \prod_{i=1}^{n} a_i.$$

С другой стороны [4],

$$V_W = \frac{1}{n} \cdot H \cdot V_r,$$

где V_r – объем грани $X_1 \ldots X_n$ в пространстве R^{n-1}.

Таким образом,

$$H = \frac{\prod_{i=1}^{n} a_i}{(n-1)! \cdot V_r}. \tag{7}$$

Объем грани может быть вычислен по формуле

$$V_r = \sqrt{\frac{(-1)^{n-2}}{2^{n-1}((n-1)!)^2}\Gamma(X_1, \ldots, X_n)}, \tag{8}$$

где $\Gamma(X_1, \ldots, X_n)$ – определитель Келли-Менгера:

$$\Gamma(X_1, \ldots, X_n) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & d_{12}^2 & \ldots & d_{1n}^2 \\ 1 & d_{21}^2 & 0 & \ldots & d_{2n}^2 \\ & & \ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ 1 & d_{n1}^2 & d_{n2}^2 & \ldots & 0 \end{vmatrix}, \tag{9}$$

где d_{kl}^2 – квадрат расстояния между точками X_k и X_l $(1 \leq k, l \leq n)$.

В силу перпендикулярности OX_k и OX_l расстояние можно найти по теореме Пифагора: $d_{kl}^2 = a_k^2 + a_l^2$. Тогда из равенств (7) и (8)

$$H = \frac{\prod_{i=1}^{n} a_i}{\sqrt{\frac{(-1)^{n-2}}{2^{n-1}} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & a_1^2 + a_2^2 & \ldots & a_1^2 + a_n^2 \\ 1 & a_1^2 + a_2^2 & 0 & \ldots & a_2^2 + a_n^2 \\ & & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ 1 & a_1^2 + a_n^2 & a_2^2 + a_n^2 & \ldots & 0 \end{vmatrix}}}. \tag{10}$$

Справедливость теоремы следует из равенств (10), (6) и теоремы 1.

Библиографический список

1. Сантало Луи А. Интегральная геометрия и геометрические вероятности : пер. с англ. / Под ред. Р.В. Амбарцумяна. — М. : Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1983.

2. Лейхтвейс К. Выпуклые множества. — М. : Наука, 1985.

3. Берже М. Геометрия : пер. с франц. — М. : Мир, 1984. — Т. 1.

4. Берже М. Геометрия : пер. с франц. — М. : Мир, 1984. — Т. 2.