О спектре оператора кривизны конформно плоских римановых многообразий[1]

Е.Д. Родионов
Алтайский государственный университет
edr2002@mail.ru

Спектры дифференциальных операторов на римановых многообразиях интенсивно изучаются в последнее время. В этом направлении известны работы М. Каца, К. Гордон, В.Н. Берестовского, В.А. Шарафутдинова и других (см. подробнее: [1–4]), в которых проведены исследования на тему «Как услышать форму барабана», или насколько однозначно можно восстановить риманову метрику многообразия по спектру оператора Лапласа?

Основная цель данной статьи — исследовать спектр оператора секционной кривизны римановых многообразий с конформно плоской римановой метрикой, а также узнать, как ведет себя спектр оператора секционной кривизны при конформных деформациях.

Пусть (M^n, g) – риманово многообразие размерности n, X, Y, Z, V – векторные поля на M^n. Обозначим через ∇ связность Леви-

[1]Работа выполнена при поддержке Совета по грантам Президента РФ для поддержки молодых российских ученых и ведущих научных школ (грант НШ–921.2012.1), ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (гос. контракт №02.740.11.0457) и гранта ФЦПК (соглашение №8206, заявка №2012-1.1-12-000-1003-014).

Чивита и через $R(X,Y)Z = [\nabla_Y, \nabla_X]Z + \nabla_{[X,Y]}Z$ – тензор кривизны Римана. Тензор Риччи r и скалярную кривизну s определим соответственно как $r(X,Y) = \mathrm{tr}(V \to R(X,V)Y)$ и $s = \mathrm{tr}(r)$. Разделим тензор кривизны R на метрический тензор g в смысле произведения Кулкарни-Номидзу [5], получим тензор Вейля W и тензор одномерной кривизны A:

$$R = W + A \owedge g, \tag{1}$$

где $(A \owedge g)(X,Y,Z,V) = A(X,Z)g(Y,V) + A(Y,V)g(X,Z) - A(X,V)g(Y,Z) - g(Y,Z)P(X,V)$ и

$$A = \frac{1}{n-2}\left(r - \frac{sg}{2(n-1)}\right), \tag{2}$$

или в координатном виде:

$$A_{ij} = \frac{1}{n-2}\left(r_{ij} - \frac{sg_{ij}}{2(n-1)}\right). \tag{3}$$

Риманово многообразие (M^n, g) называется *конформно плоским*, если его тензор Вейля тривиален.

Риманова метрика g индуцирует скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ в слоях пространства расслоения $\Lambda^2 M^n$ по правилу

$$\langle X_1 \wedge X_2, Y_1 \wedge Y_2 \rangle_x = \det(g_x(X_i, Y_j)).$$

Риманову тензору кривизны R в любой точке многообразия M^n можно поставить в соответствие оператор кривизны, определяемый на бивекторах $\mathcal{R} : \Lambda^2_x M^n \to \Lambda^2_x M^n$ и задаваемый равенством

$$\langle X \wedge Y, \mathcal{R}(T \wedge V) \rangle_x = R_x(X,Y,T,V), \tag{4}$$

где $R_x(X,Y,T,V) = g_x(R(X,Y)T,V)$.

Рассмотрим ортобазис $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ в некоторой точке $x \in M^n$, в котором одновременно диагонализируемы оператор Риччи и оператор одномерной кривизны. Он существует, так как эти операторы самосопряжены и связаны формулой (2). Имеет место

Теорема 1. *Пусть (M^n, g) — конформно плоское риманово многообразие, т.е. $W = 0$. Рассмотрим ортобазис $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, в котором диагонализируемы операторы Риччи r и одномерной кривизны A. Тогда в базисе $\{e_i \wedge e_j\}_{i<j}$ диагонализируем оператор*

кривизны $\mathcal{R} : \Lambda^2 M^n \to \Lambda^2 M^n$, *причем спектр оператора* $\mathcal{R}$ *есть* $\{K_{ij}\}_{i<j}$, *где* $K_{ij} = K_\sigma(e_i \wedge e_j)$.

Доказательство. Рассмотрим разложение тензора кривизны (1) в координатном виде. Тогда, пользуясь формулой (4), а также симметриями тензора кривизны, нетрудно видеть, что в базисе $\{e_i \wedge e_j\}_{i<j}$ матрица оператора кривизны диагонализируема и по главной диагонали стоят секционные кривизны $K_\sigma(e_i \wedge e_j)$.

Теорема доказана.

Естественно, что результаты теоремы 1 позволяют поставить следующие вопросы.

1. Возможно ли «услышать» секционную кривизну конформно плоских римановых метрик?
2. Справедливо ли утверждение теоремы 1 в случае, когда метрика не является конформно плоской?
3. Как изменяется спектр оператора кривизны при конформных деформациях римановых метрик?

Рассмотрим конформную деформацию $\bar{g} = e^{2f(x)}g$ исходной метрики g на многообразии M^n. Имеет место

Теорема 2. *Пусть* (M^n, g) *— конформно плоское риманово многообразие, т.е.* $W = 0$. *Тогда для конформно деформированного риманова многообразия* $(\bar{M}^n, \bar{g})$ *существует ортобазис* $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n\} \subset T_x\bar{M}^n$ *такой, что в базисе* $\{\bar{e}_i \wedge \bar{e}_j\}_{i<j}$, *диагонализируем оператор кривизны* $\bar{\mathcal{R}} : \Lambda^2 \bar{M}^n \to \Lambda^2 \bar{M}^n$, *причем спектр оператора* $\bar{\mathcal{R}}$ *есть* $\{\bar{K}_{ij}\}_{i<j}$, *где* $\bar{K}_{ij} = \bar{K}_\sigma(\bar{e}_i \wedge \bar{e}_j)$, *и справедливы формулы:*

$$\bar{K}_{ij} = K_{ij} - (f_{,ii} + f_{,jj}) + (f_{,i})^2 + (f_{,j})^2 - f_{,k}f_{,}^{k}e^{-2f}, \tag{5}$$

где $f_{,i}$; $f_{,ij}$ *– ковариантные производные функции конформной деформации* f *относительно начальной метрики.*

Доказательство. Действительно, так как при конформной деформации тензор Вейля W инвариантен, то $\bar{W} = 0$, а значит, существование искомого базиса $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n\}$ следует из теоремы 1. Далее, согласно [6] имеем:

$$\bar{A}_{ij} = A_{ij} - f_{,ij} + f_{,i}f_{,j} - (1/2)f_{,k}f_{,}^{k}g_{ij}, \tag{6}$$

где $g_{ij} = e^{-2f}\bar{g}_{ij} = e^{-2f}\delta_{ij}$. Для завершения доказательства теоремы достаточно заметить, что для конформно плоских метрик секционная и одномерная кривизны связаны формулами $K_{ij} = A_{ii} + A_{jj}$, (см., например, [6]).

Теорема доказана.

Следствие. *Базисы* $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ *и* $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ *теорем 1 и 2 отличаются друг от друга на суперпозицию конформного и ортогонального преобразований.*

Рассмотрим более подробно однородный риманов случай. Тогда из теорем 1 и 2 и теоремы Алексеевского-Кимельфельда [7] следует

Теорема 3. *Пусть* (M^n, g) *— связное конформно плоское риманово многообразие, допускающее транзитивную группу конформных преобразований. Тогда существует ортобазис* $\{e_1, e_2, \dots, e_n\} \subset T_x M^n$ *такой, что в базисе* $\{e_i \wedge e_j\}_{i<j}$*, диагонализируем оператор кривизны* $\mathcal{R} : \Lambda^2 M^n \to \Lambda^2 M^n$*, причем спектр оператора кривизны* $\mathcal{R}$ *есть*

$$K_{ij} = K_{ij}(AK) - (f_{,ii} + f_{,jj}) + (f_{,i})^2 + (f_{,j})^2 - f_{,k} f^k_{,} e^{-2f}, \qquad (7)$$

где $f_{,i}$*;* $f_{,ij}$ *– ковариантные производные функции конформной деформации* f *относительно начальной метрики, а* $K_{ij}(AK)$ *– секционная кривизна одного из конформно плоских многообразий списка Алексеевского-Кимельфельда [7].*

Теоремы 2 и 3 устанавливают, как изменяется спектр оператора кривизны конформно плоских римановых метрик при конформных деформациях.

Библиографический список

1. Берестовский В.Н., Свиркин В.М. Оператор Лапласа на однородных нормальных римановых многообразиях // Математические труды. — 2009. — №2.

2. Шарафутдинов В.А. Локальная слышимость гиперболической метрики // Сиб. матем. журн. — 2009. — Т. 50, №5.

3. Gordon C.S. Survey of isospectral manifolds // Handbook of differential geometry / ed. by Dillen, Franki J.E. et al. — Amsterdam : North-Holland, 2000. — Vol. 1.

4. Kac M. Can one hear the shape of a drum? // Amer. Math. Monthly. — 1966. — No. 73.

5. Бессе А. Многообразия Эйнштейна. — М. : Мир, 1990. — Т. 1, 2.

6. Nikonorov Yu.G., Rodionov E.D., Slavskii V.V. Geometry of homogeneous riemannian manifolds // Journal of Mathematical Sciences. — 2007. — Vol. 146, No. 6.

7. Алексеевский Д.В., Кимельфельд Б.Н. Классификация однородных конформно плоских римановых многообразий // Математические заметки. — 1978. — Т. 24.