Геометрия и анализ в задачах математических олимпиад

А.Н. Саженков
Алтайский государственный университет
sazhenkov_ an@mail.ru

Существует целый пласт математической культуры, к которому не прикасаются в школьном курсе математики из-за “неэлементарности” или “ненужности”, а в университетском курсе – из-за “элементарности”. Многие из этих результатов принадлежат Л. Эйлеру, И. Ньютону, К. Гауссу, О. Коши, П. Дирихле, Б. Паскалю.

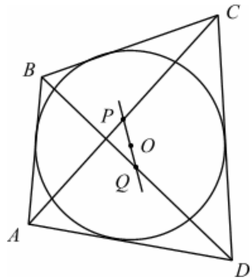
По-видимому, в связи с их “неэлементарностью” эти классические результаты элементарной математики называют “олимпиадными”, хотя они получены задолго до появления олимпиад. Некоторые олимпиадные темы пришли из университетских курсов и востребованы в этой области. Учащемуся, интересующемуся математикой, тем более студентам математических специальностей, необходимо познакомиться с этой классикой.

Этот пласт математической культуры, не востребованный в образовательных стандартах высшей и средней школы, требует дополнительного математического образования для знакомства с ним. Одним из стимулов к получению такого образования являются математические олимпиады и различные конкурсы.

Здесь мы приведем примеры таких задач, сопроводив их краткими указаниями к решению. Все следующие ниже примеры взяты из заданий математических олимпиад, некоторые из них могут стать темами исследовательской работы.

1. Теорема Ньютона

В описанном четырехугольнике центр вписанной окружности лежит на отрезке, соединяющем середины диагоналей.



Более того, центры вписанных в такой четырехугольник эллипсов заметают этот отрезок.

Идеи доказательства. Функция, определенная на координатной плоскости (x, y) соотношением $f(x, y) = ax+by+c$, здесь a, b, c – данные числа, называется *аффинной функцией* (если $c = 0$, то такая функция называется линейной). Ориентированное расстояние $f(x, y)$ от точки (x, y) до прямой l, заданной уравнением $ax + by + c = 0$, является функцией: $f(x, y) = \frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Ориентированная площадь треугольника является аффинной функцией. Сумма (и линейная комбинация) аффинных функций является аффинной функцией. Если аффинная функция на плоскости отлична от константы, то множество ее нулей есть прямая.

Рассмотрим функцию $F(X) = s(AXB) - s(BXC) + s(CXD) - s(DXA)$, она аффинная, отлична от константы, $F(P) = F(Q) = F(O) = 0$.

2. Какое наибольшее конечное число корней может иметь уравнение $|x - a_1| + \ldots + |x - a_{50}| = |x - b_1| + \ldots + |x - b_{50}|$, где a_1, a_2, …, a_{50}, b_1, b_2,…, b_{50} – различные числа? (Задача финального этапа Всероссийской олимпиады, автор – И. Рубанов.)

Идеи решения задачи. Рассмотрим на числовой прямой функцию $f(x) = |x - a_1| + \ldots + |x - a_{50}| - |x - b_1| - \ldots - |x - b_{50}|$. Замечаем, что числа $a_1, a_2, \ldots, a_{50}$, $b_1, b_2, \ldots, b_{50}$ разбивают числовую прямую на промежутки, на каждом из которых эта функция имеет вид $ax + b$. На первом и последнем из этих промежутков угловой коэффициент равен 0. На соседних промежутках функция монотонная, значит, имеет не более одного корня, а всего не более 50. Заметьте, что корней должно быть нечетное количество. Наконец, постройте пример таких наборов $a_1, a_2, \ldots, a_{50}$ и $b_1, b_2, \ldots, b_{50}$, чтобы данное уравнение имело 49 корней.

3. По шоссе в одном направлении едут 10 автомобилей. Шоссе проходит через несколько населенных пунктов. Каждый из автомобилей едет с некоторой постоянной скоростью в населенных пунктах и с некоторой другой постоянной скоростью вне населенных пунктов. Для разных автомобилей эти скорости могут отличаться. Вдоль шоссе расположено 2011 флажков. Известно, что каждый автомобиль проехал мимо каждого флажка, причем около флажков обгонов не происходило. Докажите, что мимо каких-то двух флажков автомобили проехали в одном и том же порядке. (Задача финального этапа Всероссийской олимпиады, автор – С. Берлов.)

Введем в пространстве систему координат $Oxyt$. Каждой точке шоссе сопоставим точку координатной плоскости Oxy, где x – суммарная длина участков пути в населенных пунктах; y – суммарная длина участков пути вне населенных пунктов от некоторой фиксированной точки, находящейся на шоссе, до флажков. Время, в которое машина проходит точку на шоссе, удовлетворяет соотношению $t = t_0 + \frac{x}{u} + \frac{y}{v}$, здесь t_0 – время прохождения фиксированной точки на шоссе; u и v – скорость машины вне населенных пунктов и в населенных пунктах соответственно. Соотношению $t = t_0 + \frac{x}{u} + \frac{y}{v}$ соответствует плоскость в пространстве. Проекция на плоскость Oxy пересечения двух плоскостей (плоскость – машина) соответствует местам обгона. Определите количество прямых (проекций пересечения двух плоскостей) и найдите, на сколько частей они разбивают плоскость. Применение принципа Дирихле завершит решение задачи.

Соображения непрерывности

4.1. На плоскости расположен выпуклый многоугольник. Докажите, что существует прямая, делящая площадь и периметр многоугольника пополам.

Постройте такую прямую для неравнобедренного треугольника.

Интересно, какое количество таких прямых может иметь произвольный треугольник?

4.2. Функция $f : R \to R$ непрерывна и такова, что $f(x) \cdot f(f(x)) = 1$ для любых x и $f(1000) = 999$. Найдите $f(500)$.

Заметьте, что эта функция принимает значение 500 и тогда $f(500) = \frac{1}{500}$.