Перекрученная плоская лента Мебиуса

М.А. Чешкова
Алтайский государственный университет
cma@yandex.ru

Впервые уравнение неориентируемой поверхности, открытой Мебиусом, было получено Машке [1]. Если гауссова кривизна листа Мебиуса равна нулю, то он называется плоским. Библиография работ на эту тему дана в [2]. В [3–5] строятся пересекающиеся листы Мебиуса, указано разрезание бутылки Клейна на два листа Мебиуса.

Рассмотрим линейчатую поверхность [6, с. 102] M:

$$r(u, v) = s(v) + ul(v), \tag{1}$$

где $s = s(v)$ – 2π-периодическая, а $l = l(v)$ – 2π-антипериодическая вектор-функции.

Когда точка кривой $s = s(v)$ завершит полный оборот, то прямая $L = (s(v), l(v))$ сменит направление на противоположное.

Рассмотрим вектор нормали $n = [s'(v), l(v)]$ вдоль линии $s = s(v)$. Если $n \neq 0$, то $n = n(v)$ сменит направление на противоположное, когда точка кривой $s = s(v)$ завершит полный оборот. Поверхность M в этом случае односторонняя.

Формула (1) при $v \in [0, 2\pi), u \in [-1, 1]$ задает лист Мебиуса, а кривая $s = s(v)$ есть средняя линия листа Мебиуса.

Линейчатая поверхность (1) имеет нулевую гауссову кривизну, если [6, с. 103]

$$(s(v)', l(v), l(v)')) = 0, \tag{2}$$

где $(, ,)$ – смешанное произведение трех векторов.

Поверхность в этом случае либо плоскость, либо образующие параллельны некоторой прямой и поверхность цилиндрическая, либо образующие проходят через неподвижную точку и поверхность является конической, либо образована касательными к пространственной кривой — ребру возврата. В последнем случае поверхность называется торсом, а точки ребра возврата — фокальными точками.

Плоский лист Мебиуса не может быть ни конусом, ни цилиндром [2].

Наиболее простые листы Мебиуса получаются, если средняя линия расположена на цилиндре $s(v) = (\cos(v), \sin(v), g(v))$, где $g(v)$ – 2π-периодическая функция, а

$$l(v)' = f(v)s(v)'. \tag{3}$$

Так как функция $s(v)'$ — 2π-периодическая, а функция $l(v)'$ — 2π-антипериодическая, то из (4) следует, что $f(v)$ – 2π-антипериодическая функция.

Определим ребро возврата и торс, который образуют прямые плоского листа Мебиуса. Пусть $F(v) = s(v) - \frac{1}{f(v)} l(v)$ — точка образующей.

Имеем

$$F(v)' = s'(v) - \frac{1}{f(v)} l(v)' - (\frac{1}{f(v)})' l(v). \tag{4}$$

В силу (3) $F(v)' || l(v)$, т.е. поверхность есть торс.

Формула (4) примет вид

$$F(v)' = -(\frac{1}{f(v)})' l(v). \tag{5}$$

Тогда фокальная линия

$$F(v) = s(v) - \frac{1}{f(v)} l(v) \tag{6}$$

есть ребро возврата торса.

Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Если гладкая замкнутая неплоская кривая без самопересечения задается 2π-периодической вектор-функцией $s = s(v)$, то вектор-функция $r(u,v) = s(v) + ul(v)$, где $l(v) = \int f(v)s(v)'dv$, $f(v)$ – 2π-антипериодическая функция, определяет плоский лист Мебиуса. Лист Мебиуса с краем называют также лентой Мебиуса.

Пример.

Рассмотрим плоскую ленту Мебиуса с линией центров $s(v) = (\cos(v), \sin(v), \frac{1}{4}\sin(4v))$, функцией $f(v) = \sin(\frac{v}{2})$ и с параметрами $v \in [0, 2\pi], u \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$.

Вектор $l(v) = (l_1(v), l_2(v), l_3(v))$ определится из системы

$$l_1(v)' = -\sin(\frac{v}{2})\sin(v), l_2(v)' = \sin(\frac{v}{2})\cos(v), l_3(v)' = \sin(\frac{v}{2})\cos(4v).$$

Решение этой системы имеет вид:

$$l_1(v) = -\sin(\frac{v}{2}) + \frac{1}{3}\sin(\frac{3v}{2}), l_2(v) = \cos(\frac{v}{2}) - \frac{1}{3}\cos(\frac{3v}{2}),$$

$$l_3(v) = \frac{1}{7}\cos(\frac{7v}{2}) - \frac{1}{9}\cos(\frac{9v}{2}).$$

Уравнения плоской ленты Мебиуса примут вид:

$$x = \cos(v) + u(-\sin(\frac{v}{2}) + \frac{1}{3}\sin(\frac{3v}{2})),$$

$$y = \sin(v) + u(\cos(\frac{v}{2}) - \frac{1}{3}\cos(\frac{3v}{2})),$$

$$\frac{1}{3}\sin(3v) + u(\frac{1}{7}\cos(\frac{7v}{2}) - \frac{1}{9}\cos(\frac{9v}{2})).$$

Построим плоскую ленту Мебиуса и среднюю линию. Обозначим их как перекрученная лента (рис. *1*), средняя линия (рис. *2*).

Для рассматриваемой поверхности линия

$$F(v) = s(v) - \frac{1}{\sin(\frac{v}{2})}l(v) \tag{7}$$

есть фокальная линия торса.

Имеем

$$F(v)' = -(\frac{1}{\sin(\frac{v}{2})})'l(v). \tag{8}$$

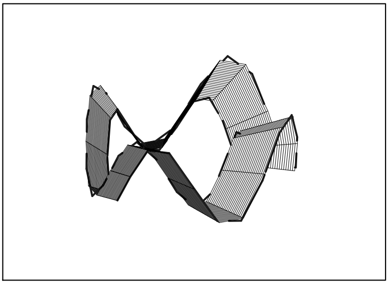

Рис. 1. Перекрученная лента

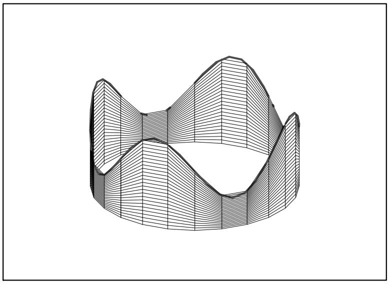

Рис. 2. Средняя линия на цилиндре

Кривая $F(v) = s(v) - \frac{1}{sin(\frac{v}{2})} l(v)$ на промежутке $[0, 2\pi]$ имеет асимптоты при $v = 0, v = 2\pi$.

Так как $F(v)' = 0$ при $v = \pi$, то на этом промежутке при $v = \pi$ гладкость кривой нарушается.

Запишем уравнения, определяющие фокальную кривую. Имеем

$$\begin{gathered} x = \cos(v) - \frac{1}{\sin(\frac{v}{2})}(-\sin(\frac{v}{2}) + \frac{1}{3}\sin(\frac{3v}{2})), \\ y = \sin(v) - \frac{1}{\sin(\frac{v}{2})}(\cos(\frac{v}{2}) - \frac{1}{3}\cos(\frac{3v}{2})), \\ z = \frac{1}{3}\sin(3v) - \frac{1}{\sin(\frac{v}{2})}(\frac{1}{7}\cos(\frac{7v}{2}) - \frac{1}{9}\cos(\frac{9v}{2})). \end{gathered} \tag{9}$$

Построим фокальную кривую (рис. *3*).

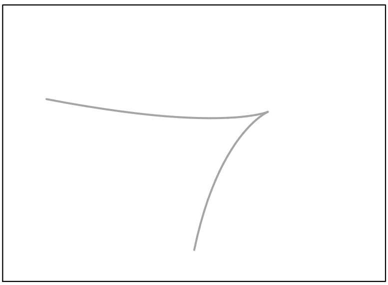

Рис. 3. Фокальная кривая $v \in [\pi - 1/10, \pi + 1/10]$

Запишем уравнение торса, образованного касательными к фокальной кривой.

Имеем

$$x = \cos(v) + (u - \frac{1}{\sin(\frac{v}{2})})(-\sin(\frac{v}{2}) + \frac{1}{3}\sin(\frac{3v}{2})),$$
$$y = \sin(v) + (u - \frac{1}{\sin(\frac{v}{2})})(\cos(\frac{v}{2}) - \frac{1}{3}\cos(\frac{3v}{2})), \qquad (10)$$
$$z = \frac{1}{3}\sin(3v) + (u - \frac{1}{\sin(\frac{v}{2})})(\frac{1}{7}\cos(\frac{7v}{2}) - \frac{1}{9}\cos(\frac{9v}{2})).$$

Построим торс на промежутках $v \in [1, \pi], u \in [0, 3]$ (торс 1, рис. *4*), $v \in [\pi, \pi + 1], u \in [0, 3]$ (торс 2, рис. *5*).

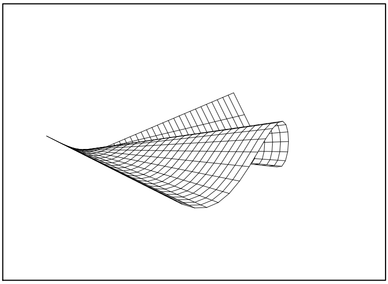

Рис. 4. Торс 1, $v \in [1, \pi]$, $u \in [0, 3]$

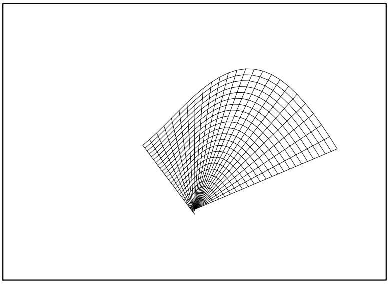

Рис. 5. Торс 2, $v \in [\pi, \pi + 1]$, $u \in [0, 3]$

Совместим торс и ленту Мебиуса (рис. *6*, *7*).

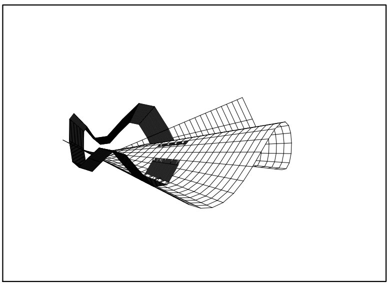

Рис. 6. Торс 1 и лента Мебиуса

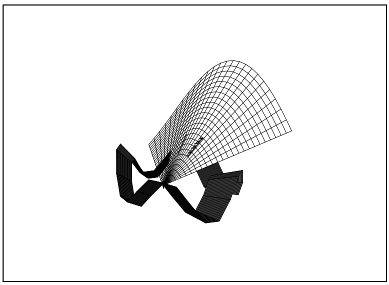

Рис. 7. Торс 2 и лента Мебиуса

Библиографический список

1. Mashke H. Note on the unilateral surface of Moebius // Trans. Amer. Math. Sos. — 1900. — Vol. 1, no. 1.

2. Сабитов И.Х. Изометрические погружения и вложения плоского листа Мебиуса в эвклидовы пространства // Известия РАН. — 2007. — Т. 71, №5.

3. Чешкова М.А. О листе Мебиуса // Вестник БГПУ. — 2006. — Т. 6.

4. Чешкова М.А. Самопересечение листа Мебиуса // Математическое образование в регионах России : труды международной научно-практической конференции. — Барнаул, 2007.

5. Чешкова М.А. О бутылке Клейна // Известия Алтайского государственного университета. — 2012. — №1/1.

6. Норден А.П. Теория поверхностей. — М. : ГИТТЛ, 1956.