УДК 514.75

Примеры поверхностей постоянной средней кривизны

Чешкова М.А.
Алтайский государственный университет
cma41@yandex.ru

Аннотация

Пусть M – гладкая поверхность в евклидовом пространстве E^3, n – единичный вектор нормали.

Поверхность $\bar{M}$ в E^3 называется параллельной поверхности M, если она состоит из концов отрезков постоянной длины, отложенных на нормалях поверхности M от точек этой поверхности. Касательные плоскости в соответствующих точках будут параллельными.

Используя теорему Бонне, для поверхности постоянной положительной гауссовой кривизны строятся поверхности постоянной средней кривизны.

1. Введение

Пусть M – гладкая поверхность в евклидовом пространстве E^3, n –единичный вектор нормали. Определен оператор $A : \partial_X n = -AX$. Собственные значения k_1, k_2 оператора A называются главными кривизнами поверхности, полусумма их $H = \frac{1}{2}(k_1+k_2)$ есть средняя кривизна, а произведение $K = k_1k_2$ – гауссова кривизна поверхности.

Имеет место теорема Пуассона-Лапласса [1, с. 12]:

Теорема 1. *Предположим, что двумерная гладкая поверхность M в E^3 является границей раздела двух однородных сред находящихся в равновесии. Пусть P_1, P_2 – давление в средах. Тогда средняя кривизна H поверхности M постоянна и равна $H = h(P_1 - P_2)$, где постоянная $\lambda = \frac{1}{h}$ называется коэффициентом поверхностного натяжения.*

Поверхности, для которых $H = const$ называются поверхностями постоянной средней кривизны (ПСК). Если $H = 0$, то поверхности минимальные.

Поверхность $\bar{M}$ в E^3 называется параллельной поверхности M [2, с. 303], если она состоит из концов отрезков постоянной длины, отложенных на нормалях поверхности M от точек этой поверхности. Касательные плоскости в соответствующих точках будут параллельными.

Для поверхностей в E^3 имеет место обратная теорема Бонне [3, с. 110]:

Теорема 2. *Какова бы ни была поверхность M имеющая постоянную положительную гауссову кривизну, существует параллельная ей поверхность с постоянной средней кривизной.*

2. Основные формулы

Пусть $r = r(u, v)$ – уравнение поверхности M, n - орт нормали, $h = const$. Уравнение параллельной поверхности $\bar{r}$ имеет вид

$$\bar{r} = r + hn. \tag{1}$$

Обозначим через $K, H, \bar{K}, \bar{H}$ – гауссовы и средние кривизны поверхностей $M, \bar{M}$, соответственно. Имеем ([2, с. 306])

$$\bar{K} = \frac{K}{1 - 2hH + h^2 K}, \quad \bar{H} = \frac{H - hK}{1 - 2hH + h^2 K}. \tag{2}$$

Положим в (2)

$$1 - Kh^2 = 0, \quad h = \pm \frac{1}{\sqrt{K}}.$$

Тогда

$$\bar{H} = \pm \frac{\sqrt{K}}{2}.$$

Это есть результат обратной теоремы Бонне. Он дает возможность построения поверхностей постоянной средней кривизны по поверхностям постоянной гауссовой кривизны (ПГК).

Будем строить параллельные поверхности для поверхности вращения постоянной положительной гауссовой кривизны.

3. Поверхности постоянной средней кривизны

В евклидовом пространстве E^3 рассмотрим поверхность вращения M, полученную вращением плоской кривой вокруг оси. Обозначим через $k = (0, 0, 1)$ – орт оси, а через $e = (\cos(v), \sin(v), 0)$ – радиус-вектор единичной окружности, расположенной в плоскости, ортогональной оси.

Тогда поверхность M можно задать в виде

$$r = ue(v) + f(u)k, \tag{3}$$

где $f = f(u)$ – дифференцируемая функция, u, v – параметры.

Обозначим через n – орт нормали к поверхности M. Тогда

$$n = \frac{f(u)'e(v) - k}{\sqrt{(f(u)')^2 + 1}}. \tag{4}$$

Главные кривизны k_1, k_2 поверхности M имеют вид

$$k_1 = -\frac{f(u)'}{u\sqrt{(f(u)')^2 + 1}}, \quad k_2 = -\frac{f(u)''}{\sqrt{(f(u)')^2 + 1}^3}. \tag{5}$$

Имеем дифференциальное уравнение

$$\frac{f(u)'}{u\sqrt{(f(u)')^2 + 1}} \frac{f(u)''}{\sqrt{(f(u)')^2 + 1}^3} = K. \tag{6}$$

Получим решения

$$f(u) = \pm \int_0^u \sqrt{\frac{Kt^2 - (c-1)}{c - Kt^2}} dt + c_1, \quad c, c_1 = const. \tag{7}$$

Имеем

$$f(u) = \pm \frac{I\sqrt{c-1} EllipticE(\frac{u\sqrt{Kc}}{c}, \frac{\sqrt{(c-1)c}}{c-1})}{\sqrt{K}} + c_1. \tag{8}$$

Для определенности, полагаем $K = 1$.

Имеем
$$f(u)=\pm\int_0^u\sqrt{\frac{t^2-(c-1)}{c-t^2}}dt+c_1,\quad c,c_1=const,$$
$$f(u)=\pm I\sqrt{c-1}EllipticE(\frac{u}{\sqrt{c}},\frac{\sqrt{(c-1)c}}{c-1})+c_1,$$
$$n=\pm(\sqrt{u^2-c+1}e(v)-\sqrt{c-u^2}k.$$
Полагая $c=1/2$, получим
$$f(u)=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}EllipticE(u\sqrt{2},I)+c_1. \tag{9}$$

Построение поверхности вращения постоянной кривизны рассматривается в [4–6].

Рассмотрим поверхности вращения $M1$, $M2$ при $c_1=0$ и $c_1=-\sqrt{2}EllipticE(I)$, $u\in[-\sqrt{c},\sqrt{c}]$, $v\in[-\pi,\pi]$.

Имеем
$$M1\ :\ r(u,v)=(u\cos(v),u\sin(v),-\frac{\sqrt{2}}{2}EllipticE(u\sqrt{2},I)),$$
$$M2\ :\ r(u,v)=(u\cos(v),u\sin(v),\frac{\sqrt{2}}{2}EllipticE(u\sqrt{2},I)+\sqrt{2}EllipticE(I)).$$

Используя математический пакет построим поверхности вращения постоянной гауссовой кривизны $M1$, $M2$ (рисунок 1).

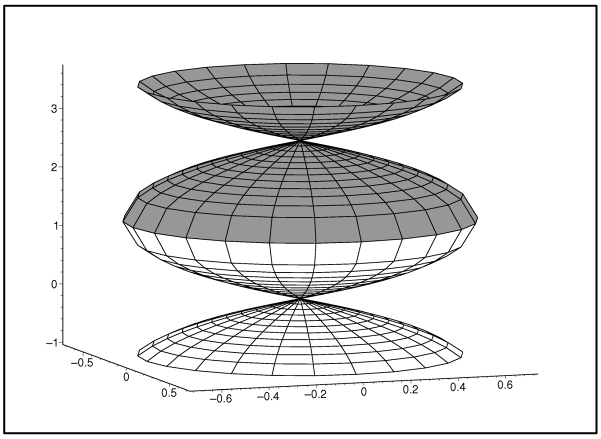

Рисунок 1. Поверхности ПГК $M1, M2$

Построим поверхности $\bar{M}1$, $\bar{M}2$ постоянной средней кривизны.

Полагая в (1) $h=1$, а в (4) подставим функции $f=f(u)$ из (9).

Имеем
$$f'(u)=\pm\sqrt{\frac{2u^2+1}{1-2u^2}},$$
$$n=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2u^2+1}\cos(v),\sqrt{2u^2+1}\sin(v),\sqrt{1-2u^2}).$$

Построим поверхности $\bar{M}1$, $\bar{M}2$ постоянной средней кривизны (рисунок 2), определяемые уравнениями

$$\bar{M}1 \ : \ r(u,v) = (u\cos(v) - \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2u^2+1}\cos(v), u\sin(v) - \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2u^2+1}\sin(v),$$
$$-\frac{\sqrt{2}}{2}EllipticE(u\sqrt{2}, I) - \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-2u^2}),$$

$$\bar{M}2 \ : \ r(u,v) = (u\cos(v) - \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2u^2+1}\cos(v), u\sin(v) - \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2u^2+1}\sin(v),$$
$$\frac{\sqrt{2}}{2}EllipticE(u\sqrt{2}, I) - \frac{\sqrt{2}}{2}EllipticE(I) - \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-2u^2}).$$

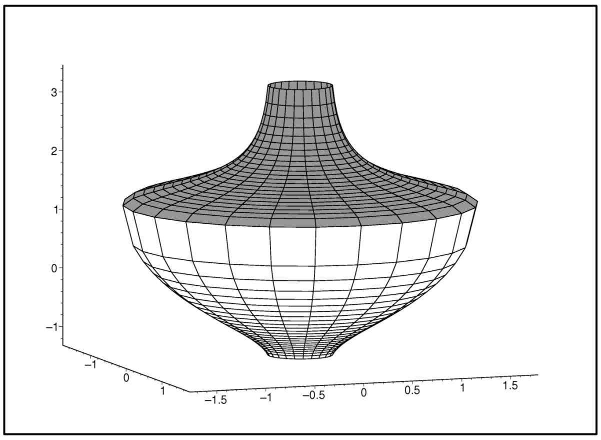

Рисунок 2. Поверхности ПСК $\bar{M}1$, $\bar{M}2$

Построим еще один вариант поверхностей $\bar{M}_1$, $\bar{M}_2$ постоянной средней кривизны (рисунок 3), где $h = -1$. Имеем

$$\bar{M}_1 \ : \ r(u,v) = (u\cos(v) - \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2u^2+1}\cos(v), u\sin(v) - \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2u^2+1}\sin(v),$$
$$-\frac{\sqrt{2}}{2}EllipticE(u\sqrt{2}, I) - \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-2u^2}).$$

$$\bar{M}_2 \ : \ r(u,v) = (u\cos(v) - \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2u^2+1}\cos(v), u\sin(v) - \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2u^2+1}\sin(v),$$
$$\frac{\sqrt{2}}{2}EllipticE(u\sqrt{2}, I) + \sqrt{2}EllipticE(I) - \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-2u^2}).$$

Расссмотрим еще примеры поверхностей.

Полагая $c = 1/4$, получим

$$F(u) = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}EllipticE(2u, 1/\sqrt{3}I) + c_1. \tag{10}$$

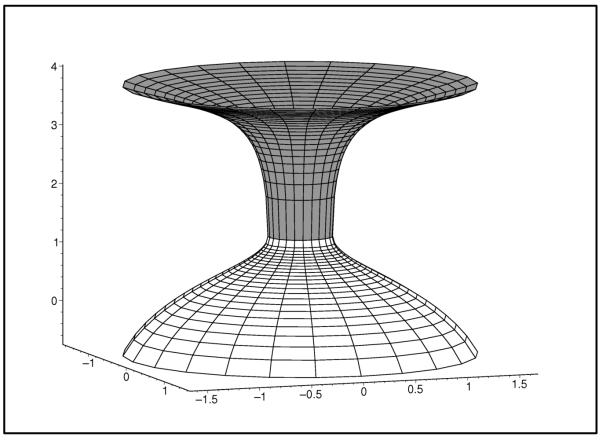

Рисунок 3. Поверхности ПСК $\bar{M}_1$, $\bar{M}_2$

$$n = \pm(\sqrt{u^2 + 3/4}\cos(v), \sqrt{u^2 + 3/4}\sin(v), -\sqrt{1/4 - u^2}).$$

Рассмотрим поверхности вращения постоянной гауссовой кривизны M_1^*, M_2^*, M_3^*, M_4^* при $c_1 = 0$ и $c_1 = a = \sqrt{3}/2EllipticE(1/\sqrt{3}I)$, $u \in [0, \sqrt{1/4}]$, $v \in [-\pi, \pi]$.

Имеем

$$M_1^* \;:\; r(u,v) = (u\cos(v), u\sin(v), -F(u)),$$

$$M_2^* \;:\; r(u,v) = (u\cos(v), u\sin(v), F(u) - 2a),$$

$$M_3^* \;:\; r(u,v) = (u\cos(v), u\sin(v), -F(u) + 2a),$$

$$M_4^* \;:\; r(u,v) = (u\cos(v), u\sin(v), -F(u)).$$

Построим поверхности постоянной гауссовой кривизны M_1^*, M_2^*, M_3^*, M_4^* (рисунок 4).

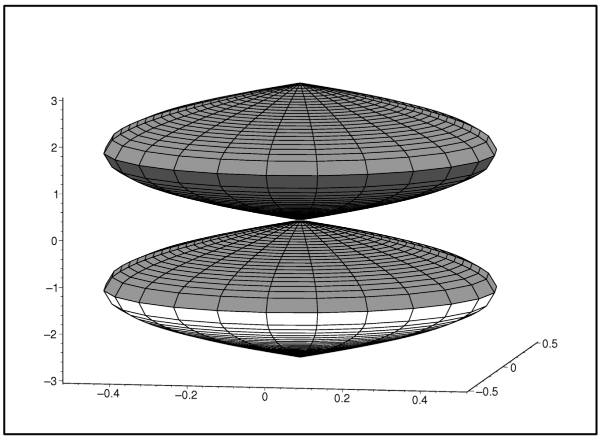

Рисунок 4. Поверхности ПГК M_1^*, M_2^*, M_3^*, M_4^*

Для данных поверхностей построим поверхности постоянной средней кривизны $\bar{M}_1^*$, $\bar{M}_2^*$, $\bar{M}_3^*$, $\bar{M}_4^*$ (рисунок 5).

$$\bar{M}_1^* \;:\; r(u,v) = (u\cos(v) - \sqrt{u^2 + 3/4}\cos(v), u\sin(v) - \sqrt{u^2 + 3/4}\sin(v), -F(u) + \sqrt{1/4 - u^2}),$$

$$\bar{M}_2^* \ : \ r(u,v) = (u\cos(v) - \sqrt{u^2+3/4}\cos(v), u\sin(v) - \sqrt{u^2+3/4}\sin(v), F(u) - 2a + \sqrt{1/4-u^2}),$$

$$\bar{M}_3^* \ : \ r(u,v) = (u\cos(v) - \sqrt{u^2+3/4}\cos(v), u\sin(v) - \sqrt{u^2+3/4}\sin(v), -F(u) + 2a + \sqrt{1/4-u^2}),$$

$$\bar{M}_4^* \ : \ r(u,v) = (u\cos(v) - \sqrt{u^2+3/4}\cos(v), u\sin(v) - \sqrt{u^2+3/4}\sin(v), -F(u) + \sqrt{1/4-u^2}).$$

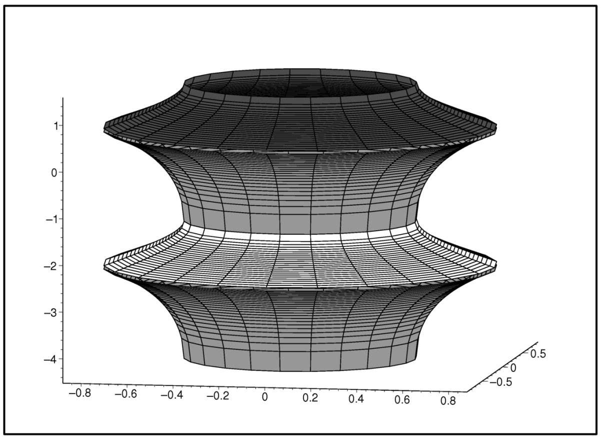

Рисунок 5. Поверхности ПСК $\bar{M}_1^*$, $\bar{M}_2^*$, $\bar{M}_3^*$, $\bar{M}_4^*$

Чтобы исследовать случай, когда $c < 0$, рассмотрим интеграл [2, с. 100]

$$f(u) = \pm\int_0^u \sqrt{\frac{t^2+c+1}{-c-t^2}}dt + c_1, \quad c, c_1 = const. \tag{11}$$

Полагая $c = -4/5$, получим

$$F(u) = \pm\frac{\sqrt{5}}{5} EllipticE(u\sqrt{5}/2, 2I) + c_1. \tag{12}$$

$$n = \pm(\sqrt{u^2+1/5}\cos(v), \sqrt{u^2+1/5}\sin(v), -\sqrt{4/5-u^2}).$$

Рассмотрим поверхности вращения постоянной гауссовой кривизны $P1$, $P2$, $P3$, $P4$ при $c_1 = 0$ и $c_1 = a = -\sqrt{5}/5EllipticE(2I)$, $u \in [\sqrt{1/5}, \sqrt{4/5}]$, $v \in [-\pi, \pi]$, $c_1 = b = \sqrt{5}/5EllipticE(1/2, 2I)$.

Имеем

$$P1 \ : \ r(u,v) = (u\cos(v), u\sin(v), F(u) - 2a),$$

$$P2 \ : \ r(u,v) = (u\cos(v), u\sin(v), -F(u) - 2a - 2b),$$

$$P3 \ : \ r(u,v) = (u\cos(v), u\sin(v), -F(u) - 4a),$$

$$P4 \ : \ r(u,v) = (u\cos(v), u\sin(v), F(u) - 2b).$$

Построим поверхности постоянной гауссовой кривизны $P1$, $P2$, $P3$, $P4$ (рисунок 6).

Для данных поверхностей построим поверхности постоянной средней кривизны $\bar{P}1$, $\bar{P}2$, $\bar{P}3$, $\bar{P}4$ (рисунок 7).

$$\bar{P}1 \ : \ r(u,v) = ((u+\sqrt{u^2+1/5})\cos(v), (u+\sqrt{u^2+1/5})\sin(v), F(u) - 2a - \sqrt{4/5-u^2}),$$

$$\bar{P}2 \ : \ r(u,v) = ((u+\sqrt{u^2+1/5})\cos(v), (u+\sqrt{u^2+1/5})\sin(v), -F(u) - 2a - 2b - \sqrt{4/5-u^2}),$$

$$\bar{P}3 \ : \ r(u,v) = ((u+\sqrt{u^2+1/5})\cos(v), (u+\sqrt{u^2+1/5})\sin(v), -F(u) - 4a - \sqrt{4/5-u^2}),$$

$$\bar{P}4 \ : \ r(u,v) = ((u+\sqrt{u^2+1/5})\cos(v), (u+\sqrt{u^2+1/5})\sin(v), F(u) - 2b - \sqrt{4/5-u^2}).$$

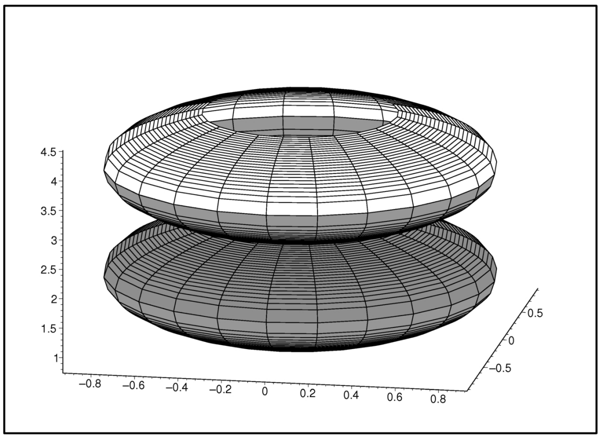

Рисунок 6. Поверхности ПГК $P1$, $P2$, $P3$, $P4$

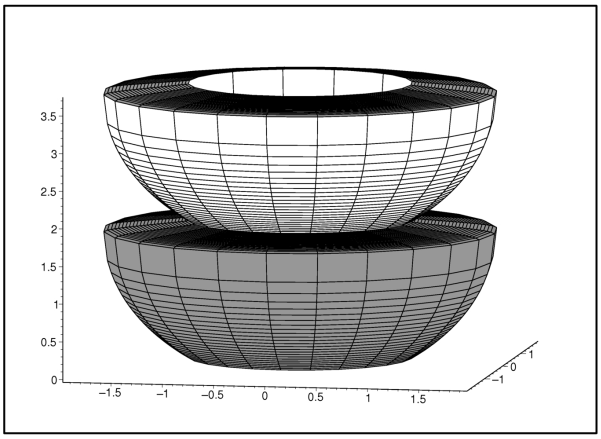

Рисунок 7. Поверхности ПСК $\bar{P}1$, $\bar{P}2$, $\bar{P}3$, $\bar{P}4$

Замечание 1. *Поверхности ПСК есть поверхности вращения, у которых плоские меридианы имеют вид*

$$R = (u + \pm\sqrt{u^2 - c + 1})e(v_0) + (f(u) - \sqrt{c - u^2})k.$$

Список литературы

1. Тужилин А.А., Фоменко А.Т. Элементы геометрии и топологии минимальных поверхностей. — М. : Наука, 1991.

2. Каган В.Ф. Основы теории поверхностей в тензорном изложении. — М. : ГИНТЛ, 1947. — Т. 1.

3. Каган В.Ф. Основы теории поверхностей в тензорном изложении. — М. : ГИНТЛ, 1947. — Т. 2.

4. Бобенко А.И. Поверхности постоянной средней кривизны и интегрируемые уравнения // УМН. — 1991. — Т. 6, № 4(280). — С. 3–42.

5. Бердинский Д.А. О поверхностях постоянной средней кривизны в группах гейзенберга // Мат. труды. — 2010. — Т. 13, № 2. — С. 3–9.

6. Чешкова М.А. Построение поверхности вращения постоянной гауссовой кривизны // Сборник трудов Всероссийской конференции по математике “МАК-2017” ; Материалы молодежной прикладной IT школы “Математическое методы и модели в экологии”, Барнаул, 29 июня - 1 июля 2017 г. : [тексты докладов]. — Барнаул : Изд-во АлтГУ, 2017. — С. 41–46.

7. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. — М. : Наука, 1981.