УДК 519

О некоторых свойствах интегральных штрафных функций

Плотникова Е.А., Саженков А.Н., Саженкова Т.В.
Новосибирский государственный технический университет,
Алтайский государственный университет
pselena@gmail.com, sazhenkov_an@mail.ru

Аннотация

Решение нелинейных экстремальных задач с ограничениями с применением методов штрафных функций позволяет использовать методы безусловной оптимизации. В работах таких авторов, как А. Фиакко, Г. Мак-Кормик, Ж. Сеа, Э. Полак, И.И. Ерёмин, Б.Т. Поляк, представлены исследования вопросов сходимости метода штрафных функций для задач выпуклого программирования с конечным числом ограниченийдля вполне определённого круга штрафных функций. Для нахождения экстремумов нелинейного выпуклого функционала на выпуклом замкнутом множестве пространства Соболева, посредством перехода к решению задачи на всём пространстве, в данной работе предлагается использовать интегральные функции штрафа, и представлено исследование некоторых свойств этих интегральных функций, позволяющих использовать их в качестве штрафных.

Пусть рассматривается задача минимизации функционала

$$I\left(u\right)=\iint\limits_{D}(\sum_{i,j=1}^{2}a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}+a_0uv)dx_1dx_2-2\iint\limits_{D}fudx_1dx_2$$

на множестве K, где $a_{ij}=a_{ij}\left(x_1,x_2\right)=a_{ji}\left(x_1,x_2\right)\in L^{\infty}\left(D\right)$, $a_0=a_0\left(x_1,x_2\right)\geqslant 0$ почти всюду в D, $f=f\left(x_1,x_2\right)\in L^2\left(D\right)$, D – область в пространстве R^2, Γ – кусочно-гладкая граница D, пространство $V=H_0^1\left(D\right)$ – пространство Соболева, т.е.

$$V=\left\{u(x_1,x_2)\middle| u\left(x_1,x_2\right)\in L^2\left(D\right),\,\frac{\partial u}{\partial x_i}\in L^2\left(D\right),\,i=1,\,2,\ldots,u=0\ \text{ почти всюду на }\ \Gamma\right\},$$

$$K=\left\{u\left(x_1,x_2\right)|u(x_1,x_2)\in V,\,\left|\mathrm{grad}\,u\left(x_1,x_2\right)\right|\leq 1\ \text{ почти всюду в }\ D\right\}.$$

Подмножество K является выпуклым замкнутым множеством.

Билинейная форма

$$a\left(u,v\right)=\iint\limits_{D}(\sum_{i,j=1}^{2}a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}+a_0uv)dx_1dx_2$$

является здесь непрерывной на V, удовлетворяющей условию положительной определённости:

$$\sum_{i,j=1}^{2}a_{ij}\left(x_1,x_2\right)\varepsilon_i\varepsilon_j\geqslant\gamma\left\|\varepsilon\right\|^2,\ \ \gamma>0$$

почти всюду в D для любого $\varepsilon\in R^2$. Данное условие даёт для функционала $I\left(u\right)$ выполнение следующего неравенства: $I\left(u_1\right)-I\left(u_2\right)\geqslant\gamma\left\|u_1-u_2\right\|^2$.

Оператор, отвечающий представленной билинейной форме, обозначим A, таким образом, $a\,(u,v) = (Au,v)$. Тогда задача минимизации функционала $I\,(u)$ на K равносильна задаче упруго-пластичности [1]:

$$Au = f \ \text{ в } \ D_-,$$
$$|\text{grad } u(x_1,x_2)| = 1 \ \text{ в } \ D_1,$$

где $D_- = \{(x_1,x_2)\,|\,|\text{grad } u\,(x_1,x_2)| < 1\}$, $D_1 = \{(x_1,x_2)\,|\,|\text{grad } u\,(x_1,x_2)| = 1\}$, а функции $u\,(x_1,x_2)$ и $\frac{\partial u}{\partial x_i}\,(x_1,x_2)$, $i = 1,2$ – "непрерывны" на кривой, разделяющей D_- и D_1. Здесь D_- является областью упругости, D_1 – областью пластичности, в них выполняются разные по сути уравнения. Условия $|\text{grad } u(x_1,x_2)| \le 1$ и $\{u\,(x_1,x_2) = 0 \ \text{ на } \ \Gamma\}$ для правильного многоугольника D эквивалентны условию $u\,(x_1,x_2) \le \phi\,(x_1,x_2)$, где функция $\phi\,(x_1,x_2)$ является решением задачи $(\frac{\partial \phi}{\partial x_1})^2 + (\frac{\partial \phi}{\partial x_2})^2 = 1$, $\phi\,(x_1,x_2) = 0$ на Γ. Поэтому для правильного многоугольника решение исходной задачи может быть сведено к решению вариационно-разностной задачи на неотрицательной четверти R_+^2 [2].

Для произвольной выпуклой области D с кусочно-гладкой границей задачу минимизации функционала $I\,(u)$ на K предлагается решать методом штрафов с использованием интегральных функций штрафа, учитывающих, по сути, континуальное множество условий (во множестве точек области D): показательная штрафная функция

$$\Phi_k(u) = A_k \iint\limits_D e^{A_k\left(|\text{grad} u(x_1,x_2)|^2 - 1\right)}\, dx_1\, dx_2$$

или

$$\Phi_k^{(t)}(u) = A_k \iint\limits_D \left(g(u) + \sqrt{g^2(u) + A_k^{-2-t}} \right) dx_1\, dx_2,$$

где $t \ge 0$ – константа, $A_k > 0$, $A_k \to +\infty$ при $k \to +\infty$, $g(u) = |\text{grad } u(x_1,x_2)|^2 - 1$.

Функции $\Phi_k^{(t)}(u)$введены в рассмотрение А.А. Капланом [2]. Для применения интегральных функций к различным задачам и допустимым множествам, естественно, требуется обсуждение возможности их использования в качестве штрафных, а также вопросов сходимости.

В работах [3–7] представлены исследования вопросов сходимости методов штрафных функций в применении к задаче минимизации выпуклой функции f на компакте $K \subset R^n$, задаваемом системой неравенств $g_j(x) \le 0$, $j = 1,2,\ldots,m$ с выпуклыми функциями g_j, в предположении, что существует точка x_0, в которой $g_j(x_0) < 0$ для всех j (не пустая внутренность K). При этом в [3–5] рассматриваются штрафные функции типа срезки, обратная, логарифмическая и показательная ($\Phi_k(x) = \sum\limits_{j=1}^{m} e^{A_k g_j(x)}$, $A_k \to +\infty$, $k \to \infty$) штрафные функции, а в работах [6, 7] для решения поставленной задачи методом штрафов А.А. Капланом вводятся в рассмотрение функции: $\Phi_k^{(t)}(x) = A_k \sum\limits_{j=1}^{m} \left(g_j(x) + \sqrt{g_j^2(x) + A_k^{-2-t}} \right)$, $t \ge 0$ – константа, $A_k > 0$, $A_k \to +\infty$.

Аналогами показательной штрафной функции и этих функций и являются рассматриваемые интегральные штрафные функции. В работах [8–10], с использованием методов исследования [3–6], установлена справедливость следующих двух теорем.

Теорема 1. *Система функций:* $\Phi_k^{(t)}(x) = A_k \sum\limits_{j=1}^{m} \left(g_j(x) + \sqrt{g_j^2(x) + A_k^{-2-t}} \right)$, $t \ge 0$ *– константа,* $A_k > 0$, $A_k \to +\infty$ *при* $k \to +\infty$ *обладает свойствами:*

1. $\Phi_k^{(t)} : R^n \to R$ *– выпуклые функции;*

2. $\lim\limits_{k\to\infty} \Phi_k^{(t)}(x) = 0$, *если* $x \in int K$;

3. $\lim\limits_{k\to\infty} \Phi_k^{(t)}(x) = +\infty$, *если* $x \notin K$;

4. Начиная с некоторого номера, функции $F_k(x) = f(x) + \Phi_k^{(t)}(x)$ *достигают своего безусловного минимума, последовательность* $\{x^k\}$ *точек минимума функций* F_k *ограничена, любая ее предельная точка принадлежит множеству* K *и доставляет минимум* f *на* K.

Приведенная теорема говорит о принадлежности рассматриваемого класса функций к внешним штрафным функциям для задачи минимизации выпуклой функции на компакте, задаваемом системой неравенств с выпуклыми функциями. Следующая теорема представляет оценку скорости сходимости метода штрафов для данного класса штрафных функций при $t > 0$.

Теорема 2. *Если функции* $f \in C^2(R^n)$, $g_j \in C^1(R^n)$, $j = 1, 2, \ldots, m$, $(f''(x)\varepsilon, \varepsilon) \geq \gamma \left\|\varepsilon\right\|^2$ *при некотором* $\gamma > 0$ *и любых* x *и* ε, *тогда для* $t > 0$ $\left\|x^k - x^*\right\|^2 \leqslant \frac{2m}{\gamma} A_k^{-\frac{t}{2}}$, *начиная с некоторого номера* k *(*$x*$ *– точное решение исходной задачи).*

Основываясь на результатах и алгоритмах работ [7–10], для рассматриваемых интегральных функций аналогичным образом устанавливается удовлетворение их условиям принадлежности к штрафным функциям и получается справедливость теоремы сходимости последовательности приближённых решений:

Теорема 3. *При реализации метода штрафов для решения задачи минимизации функционала* $I(u)$ *на* K, *с использованием рассматриваемых систем интегральных штрафных функций, имеет место сходимость последовательности приближённых решений к точному решению в метрике пространства* V. *При этом, начиная с некоторого номера, выполняется следующая оценка скорости сходимости метода:* $\left\|u^k - u^*\right\|^2 \leq \frac{A_k^{\tau-1}}{\gamma\sigma}\left(I\left(u^0\right) - I\left(u^*\right)\right) + \frac{mes\, D}{2\gamma} A_k^{-\tau-t}$, *где* u^0 *удовлетворяет условиям* $\left|g\left(u^0\right)\right| \geq \sigma > 0$, $u^0 \in K$, γ *– параметр сильной выпуклости функционала* $I(u)$, τ *– фиксированное число из интервала* $(0, 1)$, u^* *– точное решение задачи.*

Полученные результаты носят теоретический характер и могут быть использованы при численном решении задач данного вида.

Список литературы

1. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения краевых нелинейных задач / пер. с франц. — М. : Наука, 1972.

2. Каплан А.А. О некоторых приложениях программирования к решению нелинейных краевых задач // Вариационно-разностные методы математической физики. — Новосибирск, 1973.

3. Фиакко А., Мак-Кормик Г. Нелинейное программирование. Методы последовательной безусловной минимизации / пер. с англ. — М. : Наука, 1972.

4. Сеа Ж. Оптимизация. Теория и алгоритмы / пер. с франц. — М. : Наука, 1973.

5. Полак Э. Численные методы оптимизации. Единый подход / пер. с англ. — М. : Наука, 1974.

6. Каплан А.А. К вопросу о реализации метода штрафов. — Новосибирск, 1976.

7. Гроссман К., Каплан А.А. Нелинейное программирование на основе безусловной минимизации. — Новосибирск, 1981.

8. Пронь С.П., Саженкова Т.В. О численном исследовании одного класса штрафных функций // Вестник АлтГПА: Естественные и точные науки. — 2010. — № 2.

9. Карпова И.С., Саженкова Т.В. О применении некоторых классов штрафных функций в решении нелинейных задач с ограничениями // Сборник трудов молодых учёных АлтГУ. — 2015. — № 12.

10. Гончарова А.В., Саженкова Т.В. Применение штрафных функций в решении экстремальных задач с ограничениями // МАК 2016: Сборник трудов всероссийской конференции по математике. — Барнаул : изд-во АлтГУ, 2016.