УДК 514.764.22, 514.765.2

Эйнштейново подобные локально однородные (псевдо)римановы многообразия[1]

Балащенко В.В., Вылегжанин Д.В., Клепиков П.Н., Родионов Е.Д.
Белорусский государственный университет, г. Минск
Алтайский государственный университет, г. Барнаул
balashchenko@bsu.by, vylegzhanin@bsu.by, klepikov.math@gmail.com, edr2002@mail.ru

Аннотация

Данная работа представляет собой обзор результатов, касающихся эйнштейново подобных (псевдо)римановых многообразий. В числе прочего приводятся некоторые классификационные результаты в случае локально однородных многообразий малой размерности.

Ключевые слова: эйнштейново подобные метрики, тензор Риччи, уравнение Кодацци.

Пусть (M, g) — (псевдо)риманово многообразие размерности n; X, Y, Z, V — векторные поля на M. Обозначим через ∇ связность Леви-Чивита и через

$$R(X,Y)Z = [\nabla_Y, \nabla_X]Z + \nabla_{[X,Y]}Z$$

тензор кривизны Римана. Тензор Риччи r и скалярную кривизну s определим как

$$r(X,Y) = \mathrm{tr}(V \to R(X,V)Y), \quad s = \mathrm{tr}_g(r).$$

Определение 1. *(Псевдо)риманово многообразие называется многообразием Эйнштейна, если выполнено уравнение*

$$r = \Lambda\, g,$$

где Λ — некоторая константа.

(Псевдо)римановы многообразия с метриками обобщающими условия Эйнштейна исследовались в работах многих математиков. Одними из таких обобщений являются эйнштейново подобные многообразия в смысле А. Грея [1].

Определение 2. *Будем говорить, что (псевдо)риманово многообразие (M, g) принадлежит к классу $\mathcal{A}$, если для любых векторных полей X, Y, Z выполнено*

$$\nabla_X r(Y,Z) + \nabla_Y r(Z,X) + \nabla_Z r(X,Y) = 0.$$

Определение 3. *Будем говорить, что (псевдо)риманово многообразие (M, g) принадлежит к классу $\mathcal{B}$, если для любых векторных полей X, Y, Z выполнено*

$$\nabla_X r(Y,Z) = \nabla_Y r(X,Z).$$

Определение 4. *Будем говорить, что (псевдо)риманово многообразие (M, g) принадлежит к классу $\mathcal{C}^{\perp}$, если для любых векторных полей X, Y, Z выполнено*

$$\nabla_X r(Y,Z) = \frac{1}{(n+2)(n-1)}\left(n(Xs)g(Y,Z) + \frac{1}{2}(n-2)\big((Ys)g(X,Z) + (Zs)g(X,Y)\big)\right).$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант: № 18–31–00033 мол_а).

Условие, определяющее класс $\mathcal{A}$, также известно как условие Киллинга, класс $\mathcal{B}$ — условие Кодацци. Про класс $\mathcal{C}^{\perp}$ известно следующее: "Данному условию удовлетворяет любое двумерное риманово многообразие, однако мне не известно есть ли в данном классе другие интересные многообразия" (цитата из [1]). В дальнейшем три данных класса многообразий будут обозначаться словосочетанием "эйнштейново подобные".

Многообразия Эйнштейна и их прямые произведения входят в классы $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}^{\perp}$. Кроме них класс $\mathcal{B}$ содержит в себе локально симметричные пространства ($\nabla R = 0$), Риччи параллельные многообразия ($\nabla r = 0$) и, в случае постоянной скалярной кривизны, конформно плоские многообразия ($W = 0$), а также другие классы (псевдо)римановых многообразий (см., например, [2]).

Известные следующие результаты, касающиеся глобальной геометрии римановых многообразий из классов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ (см. [1]).

Теорема 1. *Пусть M — риманово многообразие, принадлежащее классу $\mathcal{A}$, и пусть секционная кривизна M отрицательна. Тогда кривизна Риччи не имеет минимумов и максимумов. В частности, если M компактно, тогда M обязано быть многообразием Эйнштейна.*

Теорема 2. *Пусть M — риманово многообразие, принадлежащее классу $\mathcal{B}$, и пусть секционная кривизна M положительна. Тогда кривизна Риччи не имеет минимумов и максимумов. В частности, если M компактно, тогда M обязано быть многообразием Эйнштейна.*

В случае однородных многообразий известны некоторые результаты для многообразий малой размерности. Так, например, получены следующие результаты относительно однородных эйнштейново подобных (псевдо)римановых многообразий.

В трехмерном случае классифицированы однородные лоренцевы многообразия с эйнштейново подобными метриками [3]. В частности, доказана следующая

Теорема 3. *Трехмерная связная, односвязная унимодулярная группа Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой принадлежит классу $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда она является естественно редуктивной.*

В четырехмерном случае также известен ряд результатов. Например, получена классификация четырехмерных групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой, принадлежащих классу $\mathcal{B}$ [4–8]. В случае псевдоримановой метрики эйнштейново подобные однородные пространства были классифицированы в работах [9–13].

В качестве примера приведем следующий результат.

Теорема 4. *Пусть (G, g) — четырехмерная метрическая группа Ли, принадлежащая классу $\mathcal{B}$, метрика которой не является ни конформно плоской, ни Риччи параллельной. Тогда метрическая алгебра Ли группы G содержится в таблице 1 (в данной таблице δ_i, $\varepsilon_i = \pm 1$).*

Таблица 1

Метрические алгебры Ли четырехмерных групп Ли, принадлежащих классу $\mathcal{B}$, метрика которых не является ни конформно плоской, ни Риччи параллельной

1	$[e_2,e_3]=3\alpha_1e_3,\ [e_2,e_4]=-\frac{\varepsilon_2}{2\alpha_1}e_3+\alpha_1e_4,\ \alpha_1>0$	$\begin{pmatrix}\varepsilon_1&0&0&0\\0&\varepsilon_2&0&0\\0&0&0&\varepsilon_3\\0&0&\varepsilon_3&0\end{pmatrix}$
2	$[e_1,e_2]=\frac{\delta_1\sqrt{5}+\varepsilon_1}{2\alpha_1}e_2,\quad [e_1,e_3]=\frac{3\varepsilon_1+\delta_1\sqrt{5}}{4\alpha_1}e_3,\quad [e_1,e_4]=\alpha_1e_3-\frac{\delta_1\sqrt{5}+3\varepsilon_1}{4\alpha_1}e_4,$ $\alpha_1>0$	
3	$[e_1,e_4]=(\alpha_1+\alpha_2)e_1+\alpha_3e_2,\quad [e_2,e_4]=-\alpha_3\varepsilon_1\varepsilon_2e_1+(\alpha_1-\alpha_2)e_2,$ $[e_3,e_4]=\frac{2\alpha_1^2+2\alpha_2^2+\varepsilon_3}{2\alpha_1}e_3,\quad \alpha_1>0,\quad \alpha_2>0,\quad \alpha_3\geqslant 0,\quad 2\alpha_1^2\varepsilon_3+2\alpha_2^2\varepsilon_3+1\neq 0,$ $\alpha_3^2+\left(2\alpha_1^2-2\alpha_2^2-\varepsilon_3\right)^2\neq 0$	
4	$[e_1,e_2]=-e_1+e_2,\ [e_1,e_3]=e_3,\ [e_2,e_3]=e_3,\ [e_2,e_4]=-\alpha_1e_1+\alpha_1e_2+\alpha_2e_3,$ $[e_3,e_4]=\varepsilon_1\varepsilon_3e_1-\varepsilon_1\varepsilon_3e_2+\frac{\alpha_1^2-4\alpha_2\varepsilon_1\varepsilon_3+2\varepsilon_3}{2\alpha_1}e_3,\ \alpha_1>0,\ \alpha_1^2-4\alpha_2\varepsilon_1\varepsilon_3+2\varepsilon_3\neq 0$	$\begin{pmatrix}\varepsilon_1&0&0&0\\0&-\varepsilon_1&0&0\\0&0&0&\varepsilon_3\\0&0&\varepsilon_3&0\end{pmatrix}$
5	$[e_1,e_2]=\alpha_1e_1+\alpha_1e_2+\alpha_2e_3,\ [e_1,e_4]=-\frac{\varepsilon_1\left(\alpha_2^2\varepsilon_3+2\right)}{2\alpha_1}e_3,\ [e_3,e_4]=\frac{\varepsilon_1\left(\alpha_2^2\varepsilon_3+2\right)}{2\alpha_2}e_3,$ $\alpha_1>0,\ \alpha_2>0,\ \alpha_2^2+2\varepsilon_3\neq 0$	
6	$[e_1,e_4]=\alpha_1e_1+(\alpha_2+\alpha_3)e_2,\ [e_2,e_4]=(\alpha_2-\alpha_3)e_1+\alpha_1e_2,$ $[e_3,e_4]=\frac{2\alpha_1^2-2\alpha_3^2+\varepsilon_3}{2\alpha_1}e_3,\ \alpha_1>0,\ \alpha_3>0,\ 2\alpha_1^2\varepsilon_3-2\alpha_3^2\varepsilon_3+1\neq 0,$ $\alpha_2^2+\left(2\alpha_1^2+2\alpha_3^2-\varepsilon_3\right)^2\neq 0$	$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&0&\varepsilon_3\\0&0&\varepsilon_3&0\end{pmatrix}$
7	$[e_1,e_4]=(\alpha_1+1)e_1+(\alpha_2-1)e_2,\ [e_2,e_4]=(\alpha_2+1)e_1+(\alpha_1-1)e_2,$ $[e_3,e_4]=\frac{2\alpha_1^2+\varepsilon_3}{2\alpha_1}e_3,\ \alpha_1\neq 0,\ 2\alpha_1^2\varepsilon_3+1\neq 0,\ 2\alpha_1^2+4\alpha_1\alpha_2-\varepsilon_3\neq 0$	
8	$[e_1,e_4]=(\alpha_1+\alpha_2)e_1-\frac{2\alpha_1\alpha_2-\varepsilon_3}{2\alpha_1}e_2+e_3,\quad [e_3,e_4]=\frac{2\alpha_1^2+\varepsilon_3}{2\alpha_1}e_3,$ $[e_2,e_4]=\frac{2\alpha_1\alpha_2+\varepsilon_3}{2\alpha_1}e_1+(\alpha_1-\alpha_2)e_2+e_3,\ \alpha_1>0,\ \alpha_2\neq 0,\ 2\alpha_1^2+\varepsilon_3\neq 0$	
9	$[e_1,e_4]=-\frac{\sqrt{2}}{2}e_1+\alpha_1e_2,\ [e_2,e_4]=-\alpha_1e_1+\frac{\sqrt{2}}{2}e_2,\ [e_3,e_4]=\alpha_2e_3,\ \alpha_1\geqslant 0,$ $\alpha_2>0$	$\begin{pmatrix}\varepsilon_1&0&0&0\\0&\varepsilon_1&0&0\\0&0&0&\varepsilon_3\\0&0&\varepsilon_3&0\end{pmatrix}$
10	$[e_1,e_4]=-\frac{\sqrt{6}}{2}e_1+(\alpha_1+1)e_2,\ [e_2,e_4]=(\alpha_1-1)e_1+\frac{\sqrt{6}}{2}e_2,\ [e_3,e_4]=\alpha_2e_3,$ $\alpha_1\geqslant 0,\ \alpha_2\neq 0$	$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}$
11	$[e_1,e_4]=-\frac{\sqrt{2}}{2}e_1+(\alpha_1+1)e_2,\ [e_2,e_4]=(\alpha_1-1)e_1+\frac{\sqrt{2}}{2}e_2,\ [e_3,e_4]=\alpha_2e_3,$ $\alpha_2>0$	$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$
12	$[e_1,e_3]=-\sqrt{3}\alpha_1e_3+\alpha_1e_4,\ [e_1,e_4]=\alpha_1e_3+\sqrt{3}\alpha_1e_4,\ [e_3,e_4]=2\varepsilon_1\varepsilon_3\alpha_1e_1,$ $\alpha_1>0$	$\begin{pmatrix}\varepsilon_1&0&0&0\\0&\varepsilon_2&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$
13	$[e_1,e_2]=\alpha_1e_1+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\alpha_1\right)e_3,\quad [e_2,e_3]=-\alpha_1e_1+\left(\alpha_1-\sqrt{2}\right)e_3,$ $[e_1,e_4]=\left(\alpha_1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)e_1+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\alpha_1\right)e_3,\quad [e_2,e_4]=\alpha_2e_1,$ $[e_3,e_4]=\alpha_1e_1+\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}-\alpha_1\right)e_3,\ \alpha_2\neq 0$	$\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$
14	$[e_1,e_2]=\alpha_1e_1-\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2(2\alpha_2^2-\varepsilon_2)}{2\alpha_2}e_3,\ [e_2,e_3]=\alpha_2e_1,\ [e_1,e_4]=-\frac{2\alpha_2^2+\varepsilon_2}{2\alpha_2}e_1,$ $[e_2,e_4]=\alpha_3e_1,\ [e_3,e_4]=-\frac{2\alpha_2^2+\varepsilon_2}{2\alpha_2}e_3,\ \alpha_1\geqslant 0,\ \alpha_2>0,\ \alpha_3\neq 0$	$\begin{pmatrix}0&\varepsilon_1&0&0\\\varepsilon_1&0&0&0\\0&0&0&\varepsilon_2\\0&0&\varepsilon_2&0\end{pmatrix}$
15	$[e_1,e_2]=\frac{2\alpha_1^2+\varepsilon_1}{2\alpha_1}e_1,\quad [e_2,e_3]=-\frac{2\alpha_1^2+3\varepsilon_1}{4\alpha_1}e_3,\quad [e_1,e_4]=\alpha_1e_3,$ $[e_2,e_4]=\alpha_2e_3+\frac{2\alpha_1^2-\varepsilon_1}{4\alpha_1}e_4,\ \alpha_1\neq 0,\ \alpha_1\neq\frac{\sqrt{2}}{2},\ \alpha_2\neq 0,\ 6\alpha_1^2+\varepsilon_1\neq 0$	
16	$[e_1,e_2]=-\frac{\sqrt{6}}{3}e_1,\quad [e_2,e_3]=\frac{2\sqrt{6}}{3}e_3,\quad [e_1,e_4]=\frac{\sqrt{6}}{6}e_3,$ $[e_2,e_4]=\alpha_1e_1+\alpha_2e_3+\frac{\sqrt{6}}{3}e_4,\ \alpha_1>0,\ \alpha_2\neq 0$	$\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&\varepsilon_2\\0&0&\varepsilon_2&0\end{pmatrix}$

В заключении отметим, что остается открытым вопрос о многообразиях, содержащихся в классе $\mathcal{C}^{\perp}$, а также об обобщении теорем 1 и 2 на псевдориманов случай.

Список литературы

1. Gray A. Einstein-like manifolds which are not Einstein // Geom. Dedicata. — 1978. — Vol. 7. — P. 259–280.

2. Бессе А. Многообразия Эйнштейна: В 2 т. / Пер. с англ. — М. : Мир, 1990.

3. Calvaruso G. Einstein-like metrics on three-dimensional homogeneous Lorentzian manifolds // Geom. Dedicata. — 2007. — Vol. 127. — P. 99–119.

4. Гладунова О.П., Славский В.В. Левоинвариантные римановы метрики на четырехмерных унимодулярных группах Ли с нулевой дивергенцией тензора Вейля // ДАН. — 2010. — Т. 431, № 6. — С. 736–768.

5. Воронов Д.С., Родионов Е.Д. Левоинвариантные римановы метрики на четырехмерных неунимодулярных группах Ли с нулевой дивергенцией тензора Вейля // ДАН. — 2010. — Т. 432, № 3. — С. 301–303.

6. Гладунова О.П., Славский В.В. О гармоничности тензора Вейля левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных унимодулярных группах Ли // Мат. труды. — 2011. — Т. 14, № 1. — С. 50–69.

7. Родионов Е.Д., Славский В.В., Хромова О.П. О гармоничности тензора Вейля левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных неунимодулярных разложимых группах Ли // Известия АлтГУ. — 2014. — № 1/1(81). — С. 122–126.

8. Родионов Е.Д., Славский В.В., Хромова О.П. О гармоничности тензора Вейля левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных неунимодулярных неразложимых группах Ли // Известия АлтГУ. — 2014. — № 1/2(81). — С. 62–73.

9. Calvaruso G., Zaeim A. Conformally flat homogeneous pseudo-Riemannian four-manifolds // Tokohu Math. J. — 2014. — Vol. 66. — P. 31–54.

10. Calvaruso G., Zaeim A. Four-dimensional Loretzian Lie groups // Diff. Geom. and its Appl. — 2013. — Vol. 31. — P. 496–509.

11. Calvaruso G., Zaeim A. Neutral Metrics on Four-Dimensional Lie Groups // Journal of Lie Theory. — 2015. — Vol. 25. — P. 1023–1044.

12. Zaeim A., Haji-Badali A. Einstein-like Pseudo-Riemannian Homogeneous Manifolds of Dimension Four // Mediterr. J. Math. — 2016. — Vol. 13(5). — P. 3455–3468.

13. Клепиков П.Н. Левоинвариантные псевдоримановы метрики на четырехмерных группах Ли с нулевым тензором Схоутена-Вейля // Известия высших учебных заведений. Математика. — 2017. — № 8. — С. 92–97.