УДК 514.764.22, 514.765.2

Солитоны Риччи на эйнштейново подобных локально однородных (псевдо)римановых многообразиях[1]

Балащенко В.В., Вылегжанин Д.В., Клепиков П.Н., Родионов Е.Д.
Белорусский государственный университет, г. Минск
Алтайский государственный университет, г. Барнаул
balashchenko@bsu.by, vylegzhanin@bsu.by, klepikov.math@gmail.com, edr2002@mail.ru

Аннотация

Данная работа представляет собой обзор результатов, касающихся солитонов Риччи на эйнштейново подобных локально однородных (псевдо)римановых многообразиях. В числе прочего приводятся некоторые результаты о таких многообразиях в произвольной размерности.

Ключевые слова: солитоны Риччи, локально однородные пространства, (псевдо)римановы многообразия.

Пусть (M, g) — (псевдо)риманово многообразие размерности n; X, Y, Z, V — векторные поля на M. Обозначим через ∇ связность Леви-Чивита и через

$$R(X, Y)Z = [\nabla_Y, \nabla_X]Z + \nabla_{[X,Y]}Z$$

тензор кривизны Римана. Тензор Риччи r, оператор Риччи ρ и скалярную кривизну s определим как

$$r(X, Y) = \mathrm{tr}(V \to R(X, V)Y), \quad g(\rho(X), Y) = r(X, Y), \quad s = \mathrm{tr}(\rho).$$

Определение 1. *(Псевдо)риманово многообразие называется многообразием Эйнштейна, если выполнено уравнение*

$$r = \Lambda \cdot g,$$

где Λ — некоторая константа.

(Псевдо)римановы многообразия с метриками, обобщающими условия Эйнштейна, исследовались в работах многих математиков. Одним из таких обобщений являются эйнштейново подобные многообразия класса $\mathcal{B}$ в смысле А. Грея [1].

Определение 2. *Будем говорить, что (псевдо)риманово многообразие (M, g) принадлежит к классу $\mathcal{B}$, если для любых векторных полей X, Y, Z выполнено*

$$\nabla_X r(Y, Z) = \nabla_Y r(X, Z).$$

Условие, определяющее класс $\mathcal{B}$, также известно как условие Кодацци.

Многообразия Эйнштейна и их прямые произведения входят в класс $\mathcal{B}$. Кроме них класс $\mathcal{B}$ содержит в себе локально симметричные пространства ($\nabla R = 0$), Риччи параллельные многообразия ($\nabla r = 0$) и, в случае постоянной скалярной кривизны, конформно плоские многообразия ($W = 0$), а также другие классы (псевдо)римановых многообразий (см., например, [2]).

Другим обобщением многообразий Эйнштейна являются солитоны Риччи, впервые рассмотренные Р. Гамильтоном в работе [3].

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант: № 18–31–00033 мол_а).

Определение 3. *(Псевдо)риманово многообразие* (M, g) *называется солитоном Риччи, если метрика* g *удовлетворяет уравнению:*

$$r = \Lambda \cdot g + L_X g,$$

где r *— тензор Риччи,* $\Lambda \in \mathbb{R}$ *— константа,* $L_X g$ *— производная Ли метрики* g *по направлению полного дифференцируемого векторного поля* X.
Если $M = G/H$ *— однородное пространство с инвариантной (псевдо)римановой метрикой* g*, тогда* $(G/H, g)$ *— однородный солитон Риччи.*

Солитоны Риччи естественным образом связаны с решениями уравнения потока Риччи [3]. Метрика g_0 — метрика солитона Риччи тогда и только тогда, когда $g(t) = \sigma(t)\,\psi_t^*(g_0)$ — решение уравнения потока Риччи:

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -2r(g), \quad g(0) = g_0,$$

где $r(g)$ — тензор Риччи метрики g, $\sigma(t)$ — гладкая функция, ψ_t — однопараметрическое семейство диффеоморфизмов на многообразии, причем $\sigma(0) = 1$ и $\psi_0 = \mathrm{Id}_M$.

Солитоны Риччи исследованы в работах многих математиков (см., например, обзор [4]). Классификация однородных солитонов Риччи известна только в малых размерностях и не является исчерпывающей (см. [5]).

Определение 4. *Солитон Риччи называется растягивающимся, если* $\Lambda < 0$*; устойчивым, если* $\Lambda = 0$*; стягивающимся, если* $\Lambda > 0$*. Также назовем солитон Риччи тривиальным, если он изометричен многообразию Эйнштейна или прямому произведению эйнштейнового многообразия и (псевдо)евклидова пространства.*

Если однородный риманов солитон устойчив, то тензор Риччи тривиален (см. подробнее в [6]) и, по теореме Алексеевского-Кимельфельда, многообразие является плоским (см. [7]). В случае стягивающегося однородного риманова солитона из работ [3,8] вытекает, что он изометричен произведению компактного однородного эйнштейнова многообразия и евклидова пространства. Если однородный риманов солитон растягивающийся, то M некомпактно (см. [9]). Известные нетривиальные растягивающиеся однородные римановы солитоны Риччи изометричны солвсолитонам.

В общем случае задача изучения, исследования и классификации солитонов Риччи на многообразиях является довольно сложной. Поэтому предполагаются ограничения либо на строение многообразия, либо на класс рассматриваемых метрик, либо на размерность многообразия, либо на класс векторных полей, участвующих в записи уравнения солитона Риччи.

Одним из естественных ограничений является предположение, что рассматриваемое многообразие является однородным пространством и, в частности, группой Ли. В этом направлении известен ряд результатов. Например (см. [10, 11])

Теорема 1. *На группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой, размерности не более четырех, не существует нетривиальных однородных инвариантных солитонов Риччи.*

Аналогичный факт известен для унимодулярных групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой любой конечной размерности [10]. В связи с этим возникает следующий

Вопрос. *Существуют ли нетривиальные однородные инвариантные солитонов Риччи на группах Ли размерности более четырех с левоинвариантной римановой метрикой?*

Другим важным примером являются алгебраические солитоны Риччи на группах Ли, которые впервые были рассмотрены Х. Лауре. Им же было доказано, что каждый алгебраический солитон Риччи на группе Ли с левоинвариантной римановой метрикой является однородным солитоном Риччи (см. [12]). Позднее этот результат был обобщен К. Онда на случай групп Ли с левоинвариантной псевдоримановой метрикой (см. [13]).

Определение 5. *Группа Ли G с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой g называется алгебраическим солитоном Риччи, если в соответствующей алгебре Ли выполняется уравнение:*

$$\rho = \Lambda \cdot \mathrm{Id} + D, \tag{1}$$

где ρ — оператор Риччи, $\Lambda \in \mathbb{R}$ — константа, Id — тождественный оператор, D — оператор дифференцирования алгебры Ли группы G.

Ранее конформно плоские солитоны Риччи на метрических группах Ли изучались в работе [14], где была получена классификация конформно плоских однородных инвариантных солитонов Риччи в четырехмерном случае; в работе [15], в которой получены некоторые результаты о конформно плоских солитонах Риччи в случае римановой метрики, а также в работах [16, 17] при дополнительном условии диагонализируемости оператора Риччи.

Представляется актуальным исследовать пересечение класса эйнштейново подобных многообразий и класса многообразий, которые являются солитонами Риччи, т.к. оба данных класса обобщают условие Эйнштейна. В этом напралении известен следующий результат (см. [18]).

Теорема 2. *Пусть (G, g) — группа Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой нетривиального алгебраического солитона Риччи, принадлежащая к классу $\mathcal{B}$ эйнштейново подобных многообразий. Тогда солитон Риччи обязательно устойчив и оператор Риччи недиагонализируем, имеет единственное собственное значение равное нулю и его жорданова форма имеет блоки размера только 1×1 и 2×2.*

Из данной теоремы в частности следует

Теорема 3. *Пусть (G, g) — группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой алгебраического солитона Риччи. Если (G, g) принадлежит к классу $\mathcal{B}$ эйнштейново подобных многообразий, то алгебраический солитон Риччи является тривиальным.*

При более сильном ограничении, что метрическая группа Ли является конформно плоской, известен следующий результат (см. [18]).

Теорема 4. *Если зафиксировать сигнатуру псевдоримановой метрики, а также действительное число $c_{n-1\,n}^{n} \geqslant 0$ (определяющее ковариантную производную тензора Риччи), то существует не более двух конформно плоских метрических алгебр Ли (с точностью до изометрии), которые являются нетривиальными алгебраическими солитонами Риччи; причем одна из них имеет неотрицательную кривизну Риччи, а вторая — неположительную.*

Список литературы

1. Gray A. Einstein-like manifolds which are not Einstein // Geom. Dedicata. — 1978. — Vol. 7. — P. 259–280.
2. Бессе А. Многообразия Эйнштейна: В 2 т. / Пер. с англ. — М. : Мир, 1990.
3. Hamilton R.S. The Ricci flow on surfaces // Contemporary Mathematics. — 1988. — Vol. 71. — P. 237–261.
4. Cao H.-D. Recent progress on Ricci solitons // Advanced Lectures in Mathematics. — 2010. — Vol. 11. — P. 1–38.
5. Arroyo R.M., Lafuente R. Homogeneous Ricci solitons in low dimensions // Int Math Res Notices. — 2015. — Vol. 2015, no. 13. — P. 4901–4932.
6. Lauret J. Einstein solvmanifolds and nilsolitons, New development in Lie theory and geometry // Contemp. Math. — 2009. — Vol. 491. — P. 1–35.
7. Alexeevskii D.V., Kimel'fel'd B.N. Structure of homogeneous Riemannian spaces with zero Ricci curvature // Funktional. Anal. i Pril. — 1975. — Vol. 9, no. 2. — P. 5–11.
8. Petersen P., Wylie W. On gradient Ricci solitons with symmetry // Proc. Amer. Math. Soc. — 2009. — Vol. 137, no. 6. — P. 2085–2092.
9. Ivey T. Ricci solitons on compact three-manifolds // Differential Geometry and Applications. — 1993. — Vol. 3, no. 4. — P. 301–307.
10. Cerbo F.L. Generic properties of homogeneous Ricci solitons // Adv. Geom. — 2014. — Vol. 14, no. 2. — P. 225–237.
11. Клепиков П.Н., Оскорбин Д.Н. Однородные инвариантные солитоны Риччи на четырехмерных группах Ли // Известия АлтГУ. — 2015. — Т. 85, № 1/2. — С. 122–129.
12. Lauret J. Ricci soliton homogeneous nilmanifolds // Math. Ann. — 2001. — Vol. 319, no. 4. — P. 715–733.
13. Onda K. Examples of Algebraic Ricci Solitons in the Pseudo-Riemannian Case // Acta Mathematica Hungarica. — 2014. — Vol. 144, no. 1. — P. 247–265.
14. Chaichi M., Keshavarzi Y. Conformally Flat Pseudo-riemannian Homogeneous Ricci Solitons 4-spaces // Indian Journal of Science and Technology. — 2015. — Vol. 8, no. 12. — P. 1–11.
15. Catino G., Mantegazza C. The Evolution of the Weyl Tensor under the Ricci Flow // Ann. Inst. Fourier. — 2011. — Vol. 61, no. 4. — P. 1407–1435.
16. Клепиков П.Н., Оскорбин Д.Н. Конформно плоские солитоны Риччи на группах Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой // Известия АлтГУ. — 2016. — Т. 89, № 1. — С. 123–128.
17. Клепиков П.Н., Родионов Е.Д. Алгебраические солитоны Риччи на метрических группах Ли с нулевым тензором Схоутена–Вейля // Доклады академии наук. — 2017. — Т. 472, № 5. — С. 506–508.
18. Клепиков П.Н. Конформно плоские алгебраические солитоны Риччи на группах Ли // Матем. заметки. — 2018. — Т. 104, № 1. — С. 62–73.