УДК 517.972.5 + 51-72

Аппроксимация решения односторонней задачи анизотропной диффузии-абсорбции[1]

Саженкова Т.В., Саженков С.А.
Алтайский государственный университет, г. Барнаул
Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, г. Новосибирск
Новосибирский государственный университет, г. Новосибирск
КРИ Хэйлунцзянского университета, г. Харбин
sazhenkov_an@mail.ru, sazhenkovs@yandex.ru

Аннотация

Рассматривается однородная задача Дирихле для нелинейного уравнения анизотропной диффузии-абсорбции с ограничением значений диффузионного потока. Изучается семейство приближённых решений, получаемых с помощью метода штрафа с применением интегрального оператора штрафа А. Каплана. Устанавливается, что семейство приближённых решений слабо сходится к решению исходной задачи в анизотропном пространстве Соболева первого порядка при стремлении малого параметра регуляризации к нулю и что имеет место свойство равномерной аппроксимации в классах функций, непрерывных по Гёльдеру.

Ключевые слова: нелинейные краевые задачи, метод штрафов, интегральные штрафные функции.

Введение

В статье рассматривается задача описания стационарного процесса нелинейной анизотропной диффузии-абсорбции в ограниченном континууме Ω d-мерного пространства независимых переменных $\boldsymbol{x}$ ($d \in \mathbb{N}$ задано произвольно). Вектор-функция диффузионного потока $\boldsymbol{J}$, задаваемая законом Фика или законом Фурье, нелинейно зависит от градиента искомой скалярной функции $u = u(\boldsymbol{x})$. Эта зависимость — степенная и анизотропная, а именно, дивергенция диффузионного потока имеет вид $\boldsymbol{p}$-лапласиана:

$$\Delta_{\boldsymbol{p}} u = \sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i}\big(|\partial_{x_i} u|^{p_i-2}\partial_{x_i} u\big), \quad \boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_d).$$

Функция абсорбции также нелинейна и имеет вид $a(u) = |u|^{q-2}u$. С физической точки зрения, искомая функция u может иметь смысл концентрации вещества или температуры континуума. Также u может иметь смысл деформации в задаче равновесия гиперупругого материала, скажем, слоистого композита. Вообще, уравнения вида $-\Delta_{\boldsymbol{p}} u + \alpha(u) = f$ (с нелинейным младшим членом $\alpha(u)$) возникают в самых различных задачах математического моделирования неизотропных по пространству природных явлений и технологических процессов. Современная теория уравнений с анизотропным $\boldsymbol{p}$-лапласианом и естественным образом связанная с ней теория анизотропных пространств Соболева в целом построены и изложены в монографиях [1, 2] и статьях [3–7]. В настоящей работе изучается задача с ограничениями на абсолютные величины компонент диффузионного потока, $|\partial_{x_i} u| \le K_i$ ($K_i = \mathrm{const}_i > 0$, $i = 1, \ldots, d$), что приводит к тому, что математическая

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 18-01-00649). Название проекта: «Прямые методы вариационного исчисления и задачи гидродинамики».

формулировка записывается в виде вариационного неравенства или, эквивалентно, в виде задачи минимизации функционала

$$F(u)=\int_\Omega\Big(\sum_{i=1}^d\frac{1}{p_i}|\partial_{x_i}u|^{p_i}+\frac{1}{q}|u|^q\Big)d\boldsymbol{x}-\int_\Omega fu\,d\boldsymbol{x}$$

на выпуклом замкнутом множестве $\{u\colon\ |\partial_{x_i}u|\le K_i\ \ \forall\, i=1,\dots,d\}$.[2] Здесь f — заданная плотность распределённых внешних источников или (в задачах гидродинамики и гиперупругости) распределённых внешних массовых сил.

Одним из распространённых подходов к исследованию таких задач является метод штрафа, который позволяет эффективно изучать отмеченные выше вопросы о существовании и качественных свойствах решений и к тому же является конструктивным в том смысле, что позволяет аппроксимировать решения исходной односторонней задачи с помощью семейств решений приближённых задач безусловной минимизации. Метод штрафа является методом этой статьи. С помощью интегральной версии функции штрафа, предложенной А. Капланом [10], удаётся получить новые результаты об аппроксимации решения задачи нелинейной анизотропной диффузии-абсорбции с ограничением на градиент в терминах равномерной сходимости (в $C_{loc}(\overline{\Omega})$).

Настоящая статья занимает место среди других исследований проблем описания процессов диффузии-реакции-абсорбции в системах с односторонними ограничениями на диффузионный поток (см., например, [11–13]) и является развитием работ [14–17].

1. Постановка и разрешимость задачи

В настоящей работе рассматривается следующая однородная задача Дирихле для уравнения анизотропной диффузии-абсорбции с односторонним ограничением на диффузионный поток.

Задача A. *В ограниченной области $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ с гладкой границей $\partial\Omega$ требуется найти функцию $u=u(\boldsymbol{x})$, удовлетворяющую уравнению*

$$-\operatorname{div}_x\boldsymbol{J}+|u|^{q-2}u=f, \tag{1a}$$

в котором

$$\begin{gathered}\boldsymbol{J}=(J_1,\dots,J_d),\quad J_i\in\partial\Phi_i(\partial_{x_i}u),\quad \Phi_i(\tau)=\frac{1}{p_i}\int_\Omega Q_i(\tau(\boldsymbol{x}))d\boldsymbol{x},\\ Q_i(\tau)=\begin{cases}|\tau|^{p_i} & \textit{при}\ \ |\tau|\le K_i,\\ +\infty & \textit{при}\ \ |\tau|>K_i,\end{cases}\qquad K_i=\mathrm{const}_i>0,\quad i=1,\dots,d,\end{gathered} \tag{1b}$$

и граничному условию

$$u|_{\partial\Omega}=0. \tag{1c}$$

В постановке задачи A $p_i\in(1,+\infty)$ — заданные постоянные показатели; q — также заданный постоянный показатель, такой, что

$$q\in\begin{cases}\Big(1,\dfrac{p_*d}{d-p_*}\Big) & \text{при}\quad d>p_*,\\ (1,+\infty) & \text{при}\quad d\le p_*,\end{cases}\qquad \text{где } p_*:=\min_{i=1,\dots,d}p_i; \tag{2}$$

[2] По аналогии с теорией гиперупругости этот функционал можно назвать *запасённой* $\boldsymbol{p}$*-энергией* [8], [9, §17.3]. В рамках этой теории равенство $|\partial_{x_i}u|=K_i$ является критерием перехода в пластическое состояние (или критерием разрыва) анизотропного материала в пространственном направлении $\boldsymbol{e}_i$, где $\{\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_d\}$ — стандартный декартов базис в $\mathbb{R}^d_x$.

$f \in W^{-1,\boldsymbol{p}'}(\Omega)$ — заданный функционал, $W^{-1,\boldsymbol{p}'}(\Omega)$ ($\boldsymbol{p}' = (p_1', \ldots, p_d')$, $p_i^{-1} + (p_i')^{-1} = 1$) — пространство, сопряжённое к анизотропному пространству Соболева $W_0^{1,\boldsymbol{p}}(\Omega)$. Норма в $W_0^{1,\boldsymbol{p}}(\Omega)$ вводится стандартно [3]:

$$\|\phi\|_{W_0^{1,\boldsymbol{p}}(\Omega)} = \sum_{i=1}^{d} \Big(\int_\Omega |\partial_{x_i}\phi(\boldsymbol{x})|^{p_i}\, d\boldsymbol{x} \Big)^{1/p_i}.$$

Соотношения (1b) означают, что компоненты J_i диффузионного потока $\boldsymbol{J}$ являются элементами субдифференциалов $\partial\Phi_i$ функционалов $\Phi_i\colon \tau \mapsto \dfrac{1}{p_i}\displaystyle\int_\Omega Q_i(\tau(\boldsymbol{x}))d\boldsymbol{x}$ соответственно в точках $\tau = \partial_{x_i}u$. Заметим, что при каждом $i = 1, \ldots, d$ функционал Φ_i является дифференцируемым по Гато отображением на множестве

$$M_i := \{\tau\colon\ \Omega \mapsto \mathbb{R}^d \text{ — измеримая функция, } |\tau(\boldsymbol{x})| \le K_i\} \subset L^{p_i}(\Omega)$$

и его производная по Гато $\Phi_i'(\tau)$ определяется формулой

$$\langle \Phi_i'(\tau), v\rangle = \int_\Omega |\tau(\boldsymbol{x})|^{p_i-2}\tau(\boldsymbol{x})v(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} \quad \forall\, v \in L^{p_i}(\Omega). \tag{3}$$

Обозначение 1. *Здесь и далее через $\langle\cdot,\cdot\rangle$ обозначаются скобки двойственности, то есть через $\langle\Psi,\psi\rangle$ обозначается значение какого-либо функционала $\Psi \in \mathcal{V}^*$ на некотором элементе $\psi \in \mathcal{V}$, где $\mathcal{V}$ — рефлексивное банахово пространство, а $\mathcal{V}^*$ — сопряжённое к $\mathcal{V}$.*

В силу известного свойства эквивалентности в субдифференциальном исчислении [18, глава I, §5] заключаем, что $\partial\Phi_i(\tau)$ определён на M_i и $\partial\Phi_i(\tau) = \{\Phi_i'(\tau)\}$. Также заметим, что Φ_i не является собственной функцией на $L^{p_i}(\Omega) \setminus M_i$ и, значит, $\partial\Phi_i(\tau) = \emptyset$ при $\tau \in L^{p_i}(\Omega) \setminus M_i$. Эти наблюдения приводят нас к следующей формулировке.

Определение 1. Слабым обобщённым решением (с.о.р.) *задачи A называется функция $u \in W_0^{1,\boldsymbol{p}}(\Omega)$, удовлетворяющая оценкам*

$$|\partial_{x_i}u| \le K_i \text{ почти всюду в } \Omega \text{ для всех } i = 1, \ldots, d \tag{4a}$$

и вариационному неравенству

$$\int_\Omega \Big[\sum_{i=1}^{d} |\partial_{x_i}u|^{p_i-2}\partial_{x_i}u\, \partial_{x_i}(\varphi - u) + |u|^{q-2}u(\varphi - u)\Big] d\boldsymbol{x} \ge \langle f, \varphi - u\rangle \tag{4b}$$

для любой пробной функции $\varphi \in W_0^{1,\boldsymbol{p}}(\Omega)$ такой, что $|\partial_{x_i}\varphi| \le K_i$ почти всюду в Ω для всех $i = 1, \ldots, d$.

Замечание 1. *В силу (2) и первой теоремы вложения Соболева [19, глава I, теорема 1.1] имеем, что $W_0^{1,\boldsymbol{p}}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$. Отсюда и из неравенства Гёльдера следует, что интеграл выражения $|u|^{q-2}u(\varphi - u)$ в (4b) имеет смысл.*

Обозначение 2. *Введём обозначения для двух зависящих от с.о.р. задачи A подобластей в Ω:*[3]

$$\Omega_- := \{\boldsymbol{x} \in \Omega\colon\ |\partial_{x_i}u| < K_i\ \ \forall\, i = 1, \ldots, d\}, \quad \Omega_M := \Omega \setminus \overline{\Omega}_-.$$

[3]С.о.р. задачи A существует и единственно. См. предложение 2.

Замечание 2. *Так как множество* $M \overset{def}{=} \bigcap_{i=1}^{d} M_i$ *является выпуклым и содержит начало координат,* $0 \in M$*, то в смысле теории распределений вариационное неравенство* (4b) *эквивалентно в* Ω_- *эллиптическому уравнению с* $\boldsymbol{p}$*-лапласианом и нелинейным младшим слагаемым:*[4]

$$-\sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i}(|\partial_{x_i} u|^{p_i-2}\partial_{x_i} u) + |u|^{q-2}u = f. \tag{5}$$

В Ω_M *(при* $\Omega_M \neq \emptyset$*) неравенство* (4b) *к уравнению* (5)*, вообще говоря, не сводится и сохраняет свой вид с* $|\partial_{x_i} u| \equiv K_i$ *при некоторых или, возможно, при всех* $i = 1, \ldots, d$*.*

Обозначение 3. *Введём обозначение для класса искомых решений* u*:*

$$\mathcal{M} := \{\phi \in W_0^{1,\boldsymbol{p}}(\Omega)\colon\ |\partial_{x_i}\phi| \le K_i \text{ почти всюду в } \Omega \text{ при всех } i = 1, \ldots, d\}. \tag{6}$$

Справедливость двух следующих утверждений непосредственно вытекает из хорошо известных положений выпуклого анализа и теории вариационных неравенств для монотонных операторов [20, глава III, теорема 1.4], [18, глава I, предложение 5.5; глава II, предложение 2.1].

Предложение 1. *Функция* $u \in \mathcal{M}$ *является с.о.р. задачи* A *в смысле определения* 1 *тогда и только тогда, когда она доставляет инфимум на* $\mathcal{M}$ *функционалу*

$$F(\phi) = \int_\Omega \Big(\sum_{i=1}^{d} \frac{1}{p_i}|\partial_{x_i}\phi|^{p_i} + \frac{1}{q}|\phi|^q\Big)d\boldsymbol{x} - \langle f, \phi\rangle, \tag{7}$$

то есть, когда

$$F(u) = \inf_{\phi\in\mathcal{M}} F(\phi). \tag{8}$$

Предложение 2. *При любом заданном* $f \in W^{-1,\boldsymbol{p}'}(\Omega)$ *задача* A *имеет единственное с.о.р. в смысле определения* 1*.*

Замечание 3. *Множество* $\mathcal{M}$ *состоит из достаточно регулярных функций. По второй теореме вложения Соболева [19, глава I, теорема 1.2] имеем, что если* $\phi \in \mathcal{M}$*, то* $\phi \in W_0^{1,\infty}(\Omega)$ *и оператор естественного вложения* $\mathcal{M}$ *в* $W_0^{1,\infty}(\Omega)$ *непрерывен. А по первой теореме вложения Соболева [19, глава I, теорема 1.1] имеем, что если* $\phi \in \mathcal{M}$*, то* ϕ *можно доопределить до непрерывной в* $\overline{\Omega}$ *функции. В частности, для любой* $\boldsymbol{x}_0 \in \partial\Omega$ *имеем, что* $\operatorname*{ess\,lim}_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0\\ \boldsymbol{x}\in\Omega}} \phi(\boldsymbol{x}) = 0$ *для* ***любой*** *последовательности* $\{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0,\ \boldsymbol{x} \in \Omega\}$*.*

2. Функция штрафа А. Каплана

В приложениях часто бывает полезно определить решение задачи вида (8) приближённо с помощью решения задач безусловной оптимизации. Такую возможность даёт метод штрафа, имеющий большую историю и давно сложившийся в стройную теорию. Его основные положения можно найти, например, в [1,10,20,21]. Также с помощью этого метода можно продуктивно изучать вопросы о повышении регулярности решений задач оптимизации с нелинейными ограничениями (см. [1, глава 3, п. 5.5]).

[4] Напомним, что уравнение (5) является нелинейным вырождающимся в направлении $\boldsymbol{e}_i$ при $p_i > 2$ и нелинейным сингулярным в направлении $\boldsymbol{e}_j$ при $p_j \in (1,2)$. При $p_1 = \ldots = p_d = 2$ уравнение (5) — это полулинейное уравнение с лапласианом $\Delta_2 \equiv \Delta_x$.

Кратко напомним, что для какого-либо замкнутого выпуклого непустого подмножества $\mathcal{K}$ рефлексивного банахова пространства $\mathcal{V}$ *оператором штрафа, связанным с* $\mathcal{K}$, называется любой оператор $\beta\colon \mathcal{V} \mapsto \mathcal{V}^*$, обладающий следующими свойствами:

$$\beta\colon\ \mathcal{V} \mapsto \mathcal{V}^* \quad \text{— монотонный, ограниченный и полунепрерывный оператор,} \tag{9a}$$

$$\{\phi\colon\ \phi \in \mathcal{V},\ \beta(\phi) = 0\} = \mathcal{K}. \tag{9b}$$

Рассмотрим для некоторого дифференцируемого по Гато строго выпуклого функционала $\Psi\colon \mathcal{V} \mapsto \mathbb{R}$ задачу минимизации:

$$\text{найти} \quad u \in \mathcal{K} \quad \text{такую, что} \quad \Psi(u) = \inf_{\phi\in\mathcal{K}} \Psi(\phi). \tag{10}$$

Задача

$$\Psi'(u_\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\beta(u_\varepsilon) = 0, \quad u_\varepsilon \in \mathcal{K} \quad (\varepsilon > 0), \tag{11}$$

в постановке которой β — оператор штрафа, связанный с $\mathcal{K}$, называется *задачей со штрафом, ассоциированной с задачей* (10). Предположим дополнительно, что нормы в $\mathcal{V}$ и $\mathcal{V}^*$ *строго* выпуклы.[5] Известно [1, глава III, §5], что при сделанных выше предположениях операторы штрафа существуют, задача (11) однозначно разрешима при любом фиксированном $\varepsilon \in (0,1)$ и последовательность её решений u_ε слабо в $\mathcal{V}$ сходится к единственному решению $u \in \mathcal{K}$ задачи (10).

Оператор штрафа β, вообще говоря, можно определять различными способами и вопрос выбора «наилучшего» оператора является весьма тонким, а ответ на него неочевиден. В настоящей статье для построения приближённых решений задачи A методом штрафа примéним анизотропную версию функции штрафа, предложенной А. Капланом и получившей широкое применение при изучении нелинейных задач вариационного исчисления с ограничениями [10, 16, 22–24].

Определение 2. Интегральной функцией штрафа А. Каплана, *связанной с множеством* $\mathcal{M}$ *(определённым формулой* (6) *выше), называется функционал* $\Phi^{(\boldsymbol{t})}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\colon W^{1,\boldsymbol{p}}_0(\Omega) \mapsto \mathbb{R}$*, определённый формулой*

$$\Phi^{(\boldsymbol{t})}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(\phi) = \int_\Omega \sum_{i=1}^d \frac{1}{\varepsilon_i p_i}\left(|\partial_{x_i}\phi|^{p_i} - K_i^{p_i} + \sqrt{(|\partial_{x_i}\phi|^{p_i} - K_i^{p_i})^2 + \varepsilon_i^{2+t_i}}\right) d\boldsymbol{x}, \quad \varepsilon_i > 0,\ t_i \geq 0. \tag{12}$$

Обозначение 4. *В* (12) *и в дальнейшем используются обозначения для векторов в* $\mathbb{R}^d_+$*:*

$$\boldsymbol{t} := (t_1, \ldots, t_d), \quad \boldsymbol{\varepsilon} := (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_d).$$

Обозначение 5. *Введём обозначение для внутренности множества* $\mathcal{M}$*:*

$$\begin{aligned} int\,\mathcal{M} := \{\phi \in \mathcal{M} :\ & \exists\, \delta_i = const \in (0, K_i^{p_i}),\ \textit{так что}\ |\partial_{x_i}\phi|^{p_i} \leq K_i^{p_i} - \delta_i \\ & \textit{при почти всех}\ \boldsymbol{x} \in \Omega\ \textit{для всех}\ i = 1, \ldots, d\}. \end{aligned} \tag{13}$$

Функционал $\Phi^{(\boldsymbol{t})}_{\boldsymbol{\varepsilon}}$ обладает следующими основными свойствами.

Предложение 3. *Семейство* $\{\Phi^{(\boldsymbol{t})}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\}_{\boldsymbol{\varepsilon}\in(0,1)^d}$ *удовлетворяет следующим требованиям:*

(i) $\Phi^{(\boldsymbol{t})}_{\boldsymbol{\varepsilon}}$ *— выпуклые функционалы,*

(ii) $\Phi^{(\boldsymbol{t})}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(\phi) \underset{\boldsymbol{\varepsilon}\to\boldsymbol{0}}{\longrightarrow} 0 \quad \forall\,\phi \in \mathrm{int}\,\mathcal{M}$,

[5] Заметим, что нормы в $W^{1,\boldsymbol{p}}_0(\Omega)$ и $W^{-1,\boldsymbol{p}'}(\Omega)$ ($p \in (1, +\infty)$) строго выпуклы.

(iii) $\Phi_{\boldsymbol\varepsilon}^{(\boldsymbol t)}(\phi) \underset{\boldsymbol\varepsilon\to\mathbf 0}{\longrightarrow} +\infty \quad \forall\,\phi\in W_0^{1,\boldsymbol p}(\Omega)\setminus\mathcal M.$

(iv) *При фиксированных* $\boldsymbol\varepsilon\in(0,1)^d$ *и* $\boldsymbol t\in\mathbb R_+^d$ *функционал* $\Phi_{\boldsymbol\varepsilon}^{(\boldsymbol t)}$ *дифференцируем по Гато; его производная* $(\Phi_{\boldsymbol\varepsilon}^{(\boldsymbol t)})'\colon W_0^{1,\boldsymbol p}(\Omega)\mapsto W^{-1,\boldsymbol p'}(\Omega)$ *определяется формулой*

$$\langle(\Phi_{\boldsymbol\varepsilon}^{(\boldsymbol t)})'(\phi),\psi\rangle=\sum_{i=1}^d\frac{1}{\varepsilon_i}\int_\Omega\Bigl(1+\frac{|\partial_{x_i}\phi|^{p_i}-K_i^{p_i}}{\sqrt{(|\partial_{x_i}\phi|^{p_i}-K_i^{p_i})^2+\varepsilon_i^{2+t_i}}}\Bigr)|\partial_{x_i}\phi|^{p_i-2}\partial_{x_i}\phi\,\partial_{x_i}\psi\,d\boldsymbol x$$
$$\forall\,\phi,\psi\in W_0^{1,\boldsymbol p}(\Omega). \quad (14)$$

Доказательство. Обоснование утверждений (i)–(iii) проводится аналогично доказательству для конечной (неинтегральной) функции штрафа А. Каплана, следуя рассуждениям из [14], [10, глава III, §3.4]. Обоснование утверждения (iv) заключается в непосредственном вычислении производной по Гато. □

Замечание 4. *Оператор* $\beta_{\varepsilon_i}^{(t_i)}$, *определённый по формуле*

$$\langle\beta_{\varepsilon_i}^{(t_i)}(\phi),\psi\rangle=\int_\Omega\Bigl(1+\frac{|\partial_{x_i}\phi|^{p_i}-K_i^{p_i}}{\sqrt{(|\partial_{x_i}\phi|^{p_i}-K_i^{p_i})^2+\varepsilon_i^{2+t_i}}}\Bigr)|\partial_{x_i}\phi|^{p_i-2}\partial_{x_i}\phi\,\partial_{x_i}\psi\,d\boldsymbol x\quad\forall\,\phi,\psi\in W_0^{1,\boldsymbol p}(\Omega),$$

можно назвать приближённым оператором штрафа А. Каплана, соответствующим множеству $\mathcal M_i=\{\phi\in W_0^{1,\boldsymbol p}(\Omega)\colon\ |\partial_{x_i}\phi|\le K_i\}$, *а задачу*

$$F'(u_{\boldsymbol\varepsilon})+\sum_{i=1}^d\frac{1}{\varepsilon_i}\beta_{\varepsilon_i}^{(t_i)}(u_{\boldsymbol\varepsilon})=0,\quad u_{\boldsymbol\varepsilon}\in W_0^{1,\boldsymbol p}(\Omega),\quad \boldsymbol\varepsilon\in(0,1)^d \quad (15)$$

или, что то же самое,

$$F'(u_{\boldsymbol\varepsilon})+(\Phi_{\boldsymbol\varepsilon}^{(\boldsymbol t)})'(u_{\boldsymbol\varepsilon})=0,\quad u_{\boldsymbol\varepsilon}\in W_0^{1,\boldsymbol p}(\Omega),\quad \boldsymbol\varepsilon\in(0,1)^d \quad (16)$$

— задачей с приближённым (по А. Каплану) штрафом, ассоциированной с задачей А.

Так же, как и решение «абстрактной» задачи (11), решение задачи (15) понимается в обобщённом смысле.

Определение 3. Слабым обобщённым решением (с.о.р.) *задачи* (15) *называется функция* $u_{\boldsymbol\varepsilon}\in W_0^{1,\boldsymbol p}(\Omega)$, *удовлетворяющая интегральному равенству*

$$\int_\Omega\biggl(\sum_{i=1}^d|\partial_{x_i}u_{\boldsymbol\varepsilon}|^{p_i-2}\partial_{x_i}u_{\boldsymbol\varepsilon}\,\partial_{x_i}\varphi+|u_{\boldsymbol\varepsilon}|^{q-2}u_{\boldsymbol\varepsilon}\varphi\biggr)\,d\boldsymbol x$$
$$+\sum_{i=1}^d\frac{1}{\varepsilon_i}\int_\Omega\Bigl(1+\frac{|\partial_{x_i}u_{\boldsymbol\varepsilon}|^{p_i}-K_i^{p_i}}{\sqrt{(|\partial_{x_i}u_{\boldsymbol\varepsilon}|^{p_i}-K_i^{p_i})^2+\varepsilon_i^{2+t_i}}}\Bigr)|\partial_{x_i}u_{\boldsymbol\varepsilon}|^{p_i-2}\partial_{x_i}u_{\boldsymbol\varepsilon}\,\partial_{x_i}\varphi\,d\boldsymbol x=\langle f,\varphi\rangle$$
$$\forall\,\varphi\in W_0^{1,\boldsymbol p}(\Omega). \quad (17)$$

Замечание 5. *Обратим внимание на то, что оператор* $\beta_{\varepsilon_i}^{(t_i)}$, *строго говоря, не является оператором штрафа,* **связанным** *с множеством* $\mathcal M_i$ $(i=1,\dots,d)$. *Более того, для любой функции* $\phi\in W_0^{1,\boldsymbol p}(\Omega)$ *имеем, что*

$$\beta_{\varepsilon_i}^{(t_i)}(\phi)\underset{\varepsilon_i\to0}{\longrightarrow}\beta^{(t_i)}(\phi)\ \text{равномерно в}\ W^{-1,\boldsymbol p'}(\Omega), \quad (18)$$

где $\beta^{(t_i)}$ определяется формулой

$$\langle \beta^{(t_i)}(\phi), \psi \rangle = \int_{\{\boldsymbol{x}:\, |\partial_{x_i}\phi| = K_i\}} \partial_{x_i}\phi\, \partial_{x_i}\psi\, d\boldsymbol{x} + \int_{\{\boldsymbol{x}:\, |\partial_{x_i}\phi| > K_i\}} 2|\partial_{x_i}\phi|^{p_i - 2} \partial_{x_i}\phi\, \partial_{x_i}\psi\, d\boldsymbol{x} \quad \forall\, \phi, \psi \in W_0^{1,\boldsymbol{p}}(\Omega). \tag{19}$$

Обозначим

$$\mathring{\mathcal{M}}_i := \{\phi \in W_0^{1,\boldsymbol{p}}(\Omega):\ |\partial_{x_i}\phi| < K_i \text{ почти всюду в } \Omega\}. \tag{20}$$

Из (19) очевидно, что

$$\{\phi \in W_0^{1,\boldsymbol{p}}(\Omega):\ \beta^{(t_i)}(\phi) = 0\} = \mathring{\mathcal{M}}_i, \tag{21}$$

то есть предельный оператор штрафа связан с незамкнутым в $W_0^{1,\boldsymbol{p}}(\Omega)$ выпуклым множеством $\mathring{\mathcal{M}}_i$, замыканием которого в $W_0^{1,\boldsymbol{p}}(\Omega)$ является множество $\mathcal{M}_i$.

Ввиду этого замечания предельный переход при $\boldsymbol{\varepsilon} \to 0$ в задаче (15) является несколько более деликатным, чем в классической монографии [1, глава 3, теорема 5.2]. Результаты о разрешимости задачи (15) при фиксированных $\varepsilon > 0$, предельном переходе в этой задаче при $\boldsymbol{\varepsilon} \to 0$ и усиленном свойстве аппроксимации решения задачи A с помощью семейства $\{u_\varepsilon\}$ излагаются в следующем параграфе в виде трёх теорем.

3. Разрешимость задачи со штрафом. Аппроксимация решений задачи A

Первый основной результат работы состоит в следующем.

Теорема 1. *(i) При любом фиксированном $\boldsymbol{\varepsilon} \in (0,1)^d$ и для любого заданного $f \in W^{-1,\boldsymbol{p}'}(\Omega)$ существует единственное с.о.р. $u_{\boldsymbol{\varepsilon}}$ задачи (15) в смысле определения 3.*

(ii) Пусть $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}_+^d$. Тогда имеет место предельное соотношение

$$u_{\boldsymbol{\varepsilon}} \underset{\boldsymbol{\varepsilon} \to \boldsymbol{0}}{\longrightarrow} u \quad \text{слабо в } W_0^{1,\boldsymbol{p}}(\Omega), \tag{22}$$

в котором $u \in \mathcal{M}$ — это с.о.р. задачи A.

Доказательство. Обоснование теоремы проводится систематическим применением известных методов решения нелинейных задач для монотонных и псевдомонотонных операторов [1, глава 2], классических положений теории пространств Соболева [19, глава I, §1.2] и теории интеграла Лебега [25, глава V, §5], [26, §§1.3-1.4]. Обоснование предельного перехода при $\boldsymbol{\varepsilon} \to \boldsymbol{0}$ в целом опирается на рассуждение из [1, глава 3, док-во теоремы 5.2] с естественными модификациями, связанными со спецификой структуры функции штрафа. □

Замечание 6. (О сходимости энергий.) *Так как $\{u_{\boldsymbol{\varepsilon}}\}_{\boldsymbol{\varepsilon} \to 0}$ — минимизирующая последовательность для функционала F, то справедливо предельное соотношение для запасённых $\boldsymbol{p}$-энергий*

$$\sum_{i=1}^{d} \frac{1}{p_i} \|\partial_{x_i} u_{\boldsymbol{\varepsilon}}\|^{p_i}_{L^{p_i}(\Omega)} + \frac{1}{q}\|u_{\boldsymbol{\varepsilon}}\|^q_{L^q(\Omega)} - \langle f, u_{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle \underset{\boldsymbol{\varepsilon} \to \boldsymbol{0}}{\longrightarrow} \sum_{i=1}^{d} \frac{1}{p_i} \|\partial_{x_i} u\|^{p_i}_{L^{p_i}(\Omega)} + \frac{1}{q}\|u\|^q_{L^q(\Omega)} - \langle f, u \rangle. \tag{23}$$

В изотропном случае $p_1 = \ldots = p_d = 2$ из (23) очевидно вытекает, что

$$u_{\boldsymbol{\varepsilon}} \underset{\boldsymbol{\varepsilon} \to \boldsymbol{0}}{\longrightarrow} u \text{ сильно в } W_0^{1,2}(\Omega). \tag{24}$$

Также, аналогично [1, глава 3, п. 5.3] выводим предельное соотношение

$$\int_\Omega \Big[\sum_{i=1}^d \big(|\partial_{x_i} u_{\boldsymbol\varepsilon}|^{p_i-2}\partial_{x_i} u_{\boldsymbol\varepsilon} - |\partial_{x_i} u|^{p_i-2}\partial_{x_i} u\big)\, \partial_{x_i}\big(u_{\boldsymbol\varepsilon} - u\big) + \big(|u_{\boldsymbol\varepsilon}|^{q-2}u_{\boldsymbol\varepsilon} - |u|^{q-2}u\big)\big(u_{\boldsymbol\varepsilon} - u\big)\Big]\, d\boldsymbol{x} \underset{\boldsymbol\varepsilon\to\boldsymbol 0}{\longrightarrow} 0. \quad (25)$$

Отметим, что свойства (23)–(25) от выбора оператора штрафа не зависят.[6]

Следующие тонкие и нестандартные свойства семейства $\{u_{\boldsymbol\varepsilon}\}$ имеют место именно благодаря конструкции функции штрафа А. Каплана. Для того, чтобы их сформулировать, введём в рассмотрение следующие зависящие от решения задачи (15) подмножества в Ω.

Обозначение 6. *Для* $\boldsymbol\varepsilon \in (0,1)^d$ *и* $\boldsymbol\delta := (\delta_1,\dots,\delta_d) \in (0, K_1^{p_1}) \times \ldots \times (0, K_d^{p_d})$ *обозначим*

$$\begin{aligned}
&\Omega_-(\boldsymbol\varepsilon) := \{\boldsymbol x \in \Omega\colon\ |\partial_{x_i} u_{\boldsymbol\varepsilon}| < K_i \quad \forall\, i = 1,\dots,d\},\\
&\Omega_+(\boldsymbol\varepsilon) := \{\boldsymbol x \in \Omega\colon\ |\partial_{x_i} u_{\boldsymbol\varepsilon}| \ge K_i \quad \forall\, i = 1,\dots,d\},\\
&\Omega_-(\boldsymbol\varepsilon,\boldsymbol\delta) := \{\boldsymbol x \in \Omega\colon\ |\partial_{x_i} u_{\boldsymbol\varepsilon}|^{p_i} \le K^{p_i} - \delta_i \quad \forall\, i = 1,\dots,d\},\\
&\Omega_1(\boldsymbol\varepsilon,\boldsymbol\delta) := \{\boldsymbol x \in \Omega\colon\ K^{p_i} - \delta_i < |\partial_{x_i} u_{\boldsymbol\varepsilon}|^{p_i} < K^{p_i} \quad \forall\, i = 1,\dots,d\}.
\end{aligned}$$

Замечание 7. *Очевидно, множества* $\Omega_+(\boldsymbol\varepsilon)$, $\Omega_-(\boldsymbol\varepsilon,\boldsymbol\delta)$ *и* $\Omega_1(\boldsymbol\varepsilon,\boldsymbol\delta)$ *попарно не пересекаются и* $\Omega_+(\boldsymbol\varepsilon) \cup \Omega_-(\boldsymbol\varepsilon,\boldsymbol\delta) \cup \Omega_1(\boldsymbol\varepsilon,\boldsymbol\delta) = \Omega$ *для всех* $\boldsymbol\varepsilon \in (0,1)^d$ *и* $\boldsymbol\delta \in (0, K_1^{p_1}) \times \ldots \times (0, K_d^{p_d})$.

Следующее важное геометрическое свойство устанавливается в силу структуры оператора штрафа $(\Phi_{\boldsymbol\varepsilon}^{(\boldsymbol t)})'(u_{\boldsymbol\varepsilon})$ с помощью теорем Рисса и Егорова из теории измеримых по Лебегу функций [27, глава IV, §3, теоремы 4 и 5]. Оно позволяет затем установить результат о равномерной сходимости семейства $\{u_{\boldsymbol\varepsilon}\}$ при $\boldsymbol\varepsilon \to \boldsymbol 0$.

Теорема 2. *Существует возрастающая по включению*[7] *последовательность замкнутых множеств* $\{E^{\boldsymbol\varepsilon^{(l)}}\}$, $\boldsymbol\varepsilon^{(l)} \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} \boldsymbol 0$ *в* $\mathbb{R}_+^d$, *таких, что*

(i) $E^{\boldsymbol\varepsilon^{(l)}} \subset \Omega_-\big(\boldsymbol\varepsilon^{(l)}, (\boldsymbol\varepsilon^{(l)})^{\boldsymbol{1+t}/2}\big)$, $l = 1,2,3,\dots$,

(ii) $\operatorname{meas}\big(\Omega \setminus E^{\boldsymbol\varepsilon^{(l)}}\big) \le \min\limits_{i=1,\dots,d} \varepsilon_i^{(l-1)}$. *В частности,* $\operatorname{meas}\Big(\Omega \setminus \bigcup\limits_{l=1}^{\infty} E^{\boldsymbol\varepsilon^{(l)}}\Big) = 0$.

Обозначение 7. *В формулировке теоремы 2 обозначено*

$$(\boldsymbol\varepsilon^{(l)})^{\boldsymbol{1+t}/2} := \big((\varepsilon_1^{(l)})^{1+t/2}, (\varepsilon_2^{(l)})^{1+t/2}, \dots, (\varepsilon_d^{(l)})^{1+t/2}\big).$$

Также в формулировке теоремы 2 и далее в тексте через $\operatorname{meas} \mathcal{Q}$ *обозначается мера Лебега какого-либо измеримого (по Лебегу) множества* $\mathcal{Q}$.

Следующая теорема составляет второй основной результат работы.

Теорема 3. (О равномерной сходимости.) *Для любого* $\delta > 0$ *найдутся число* $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\delta) \in (0,1)$ *и замкнутое множество* $\Xi^\delta \subset \Omega$, $\operatorname{meas} \Xi^\delta > \operatorname{meas} \Omega - \delta$, *такие, что* $u_{\boldsymbol\varepsilon} \in C^{0+\vartheta}(\Xi^\delta)$ $\forall\, \vartheta \in [0,1)$, $\forall\, \boldsymbol\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]^d$ *и*

$$u_{\boldsymbol\varepsilon} \underset{\boldsymbol\varepsilon\to\boldsymbol 0}{\rightrightarrows} u \text{ в } C(\Xi^\delta) \text{ (то есть, равномерно в } C(\Xi^\delta)). \quad (26)$$

[6] Соотношения (23)–(25) выполняются для любого допустимого оператора штрафа.

[7] То есть $E^{\boldsymbol\varepsilon^{(n)}} \subset E^{\boldsymbol\varepsilon^{(m)}}$ при $m > n$.

Через $C^{0+\vartheta}(\Xi^\delta)$ в формулировке теоремы стандартно обозначено пространство непрерывных по Гёльдеру функций на множестве Ξ^δ с показателем ϑ; $C^{0+0}(\Xi^\delta) := C(\Xi^\delta)$.

Доказательство. По теореме 2 в качестве Ξ^δ можно взять $E^{\varepsilon^{(l)}}$ при $\varepsilon_i^{(l-1)} \leq \delta \, \forall \, i = 1, \ldots, d$. По второй теореме вложения Соболева получаем, что семейство $\{u_{\boldsymbol{\varepsilon}}\}_{\boldsymbol{\varepsilon} \in (0,\varepsilon_0]^d}$ равномерно ограничено в $C^{0+\vartheta}(\Xi^\delta)$ $(\forall \, \vartheta \in [0,1))$. Значит, оно равномерно ограничено и равностепенно непрерывно в $C(\Xi^\delta)$. С другой стороны, в силу предельного соотношения (22) и первой теоремы вложения Соболева $u_{\boldsymbol{\varepsilon}} \underset{\boldsymbol{\varepsilon} \to \mathbf{0}}{\longrightarrow} u$ сильно в $L^q(\Xi^\delta)$ при любом $q \in [1, \infty)$. Отсюда по теореме Асколи — Арцела [28, §7.5.7] сразу следует (26). Остаётся заметить, что (26) выполняется для ***любой*** последовательности $\boldsymbol{\varepsilon} \to 0$ вследствие единственности с.о.р. задачи А и задачи (15).[8]

Теорема 3 доказана. □

Список литературы

1. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. — М. : Мир, 1972.

2. Antontsev S.N., Shmarev S. Evolution PDEs with Nonstandard Growth Conditions: Existence, Uniqueness, Localization, Blow-up. — Paris : Atlantis Press, 2015. — Vol. 4 of Atlantis Studies in Differential Equations.

3. Кружков С.Н., Королёв А.Г. К теории вложения анизотропных функциональных пространств // Докл. АН СССР. — 1985. — Т. 285. — С. 1054–1057.

4. Fragalà I., Gazzola F., Kawohl B. Existence and nonexistence results for anisotropic quasilinear elliptic equations // Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire. — 2004. — Vol. 21. — P. 715–734.

5. Haškovec J., Schmeiser C. A note on the anisotropic generalizations of the Sobolev and Morrey embedding theorems // Monatsh. Math. — 2009. — Vol. 158. — P. 71–79.

6. Rákosník J. Some remarks to anisotropic Sobolev spaces I // Beiträge Anal. — 1979. — P. 55–68.

7. Rákosník J. Some remarks to anisotropic Sobolev spaces II // Beiträge Anal. — 1980. — P. 127–140.

8. Lindqvist P. Notes on the p-Laplace Equation. — Second edition. — Jyväskylä : University Printing House, 2017.

9. Temam R., Miranville A. Mathematical Modeling in Continuum Mechanics. — Second edition. — Cambridge : Cambridge University Press, 2005.

10. Гроссман К., Каплан А.А. Нелинейное программирование на основе безусловной оптимизации. — Новосибирск : Наука, 1981.

11. Байокки К., Пухначёв В.В. Задачи с односторонними ограничениями для уравнений Навье — Стокса и проблема динамического краевого угла // Прикл. мех. и техн. физ. — 1990. — № 2(180). — С. 27–40.

[8] См. предложение 2 и теорему 1.

12. Чеботарёв А.Ю. Вариационные неравенства для оператора типа Навье — Стокса и односторонние задачи для уравнений вязкой теплопроводной жидкости // Мат. заметки. — 2001. — Т. 70, № 2. — С. 296–307.

13. Facciolo G., Lecumberry F., Almansa A. et al. Constrained anisotropic diffusion and some applications // Proceedings of the British Machine Conference / Ed. by Mike Chantler, Bob Fisher, Manuel Trucco. — BMVA Press, September 2006. — P. 107.1–107.10.

14. Гончарова А.В., Саженкова Т.В. Применение штрафных функций в решении экстремальных задач с ограничениями // МАК: «Математики — Алтайскому краю»: сборник трудов всероссийской конференции по математике. — Барнаул : Изд-во Алтайского гос. ун-та, 2016. — С. 33–35.

15. Саженков А.Н., Саженкова Т.В., Пронь С.П. Об исследовании одного класса штрафных функций // Труды семинара по геометрии и математическому моделированию. — 2016. — № 2. — С. 86–88.

16. Саженкова Т.В., Саженков А.Н., Плотникова Е.А. О применении одного класса интегральных штрафных функций при решении вариационных задач // Известия Алтайского гос. ун-та. — 2018. — № 1(99). — С. 123–126.

17. Kuznetsov I.V., Sazhenkov S.A. Anisotropic vanishing diffusion method applied to genuinely nonlinear forward-backward ultra-parabolic equations // Siberian Electron. Math. Reports. — 2018. — Vol. 15. — P. 1158–1173.

18. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. — М. : Мир, 1979.

19. Решетняк Ю.Г. Теоремы устойчивости в геометрии и анализе. — Новосибирск : Наука, 1982.

20. Киндерлерер Д., Стампаккья Г. Введение в вариационные неравенства и их приложения. — М. : Мир, 1983.

21. Гловински Р., Лионс Ж.-Л., Тремольер Р. Численное исследование вариационных неравенств. — М. : Мир, 1979.

22. Griffin J.D., Kolda T.G. Nonlinearly constrained optimization using heuristic penalty methods and asynchronous parallel generating set search // Applied Mathematics Research eXpress. — 2010. — Vol. 2010, no. 1. — P. 36–62.

23. Kaplan A.A. Convex programming algorithms using smoothing of exact penalty functions // Siberian Math. J. — 1982. — Vol. 23. — P. 491–500.

24. Kaplan A., Tichatschke R. Some results about proximal-like methods // Recent Advances in Optimization. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems / Ed. by A. Seeger. — Berlin, Heidelberg, New York : Springer-Verlag, 2006. — Vol. 563. — P. 61–86.

25. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М. : Наука, 1981.

26. Tao T. An Introduction to Measure Theory. — AMS, 2011.

27. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. — М. : Наука, 1974.

28. Дьедонне Ж. Основы современного анализа. — М. : Мир, 1964.