

# Две модели проективной плоскости

Чешкова М.А.

Алтайский государственный университет, г. Барнаул  
 ста41@yandex.ru

## Аннотация

Приводятся примеры построения моделей проективной плоскости используя периодические вектор-функции.

*Ключевые слова:* скрещенный колпак, поверхность Штейнера, периодические функции.

## 1. Введение

Если на поверхности в  $E^3$  существует замкнутая кривая (дезориентирующий контур), обладающая тем свойством, что при ее обходе локальная ориентация в касательном пространстве меняет знак, то поверхность называется односторонней.

Впервые уравнение односторонней поверхности, открытой Мебиусом, было получено Машке [1]. Если гауссова кривизна листа Мебиуса равна нулю, то он называется плоским. Библиография работ на эту тему дана в работе [2].

К односторонним поверхностям относятся: скрещенный колпак [3, с. 304], римская поверхность [3, с. 305], поверхность Штейнера [4, с. 302], поверхность Боя [3, с. 305], бутылка Клейна [3, с. 306]. Римская поверхность, поверхность Боя скрещенный колпак, поверхность Штейнера являются моделью проективной плоскости. Односторонние поверхности исследуются автором в [5, 6].

## 2. Построение моделей проективной плоскости

В евклидовом пространстве  $E^3$  рассмотрим гладкую замкнутую неплоскую кривую  $\gamma$ , заданную  $4\pi$ -периодической вектор-функцией  $\rho = \rho(u)$ , которая не является  $2\pi$ -периодической и  $2\pi$ -антипериодической.

Так как  $\rho(u) = \rho(u + 4\pi)$ , то функция  $s(u) = \frac{1}{2}(\rho(u) + \rho(u + 2\pi))$ , есть  $2\pi$ -периодическая не равная нулю, а вектор-функция  $l(u) = \frac{1}{2}(\rho(u) - \rho(u + 2\pi))$  есть  $2\pi$ -антипериодическая.

С помощью этих функций построим модели проективной плоскости.

Рассмотрим поверхность  $\mathbf{P}$ :

$$r(u, v) = (1 + \cos(v))s(u) + \sin(v)l(u), \quad u \in [-\pi, \pi], \quad v \in [-\pi, \pi].$$

**Теорема 1.** *Поверхность  $\mathbf{P}$  определяет модель проективной плоскости.*

*Доказательство.* Рассмотрим проективную плоскость как фактор-пространство [7, с. 75]

$$P^* = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi] / [(-\pi, -v) \sim (\pi, v), (-u, -\pi) \sim (u, \pi)].$$

Так как

$$\begin{aligned} r(\pi, v) &= (\cos(v) + 1)s(\pi) + \sin(v)l(\pi), \\ r(-\pi, -v) &= (1 + \cos(-v))s(-\pi) + \sin(-v)l(-\pi), \\ s(-\pi) &= s(\pi), l(-\pi) = -l(\pi), \\ r(u, \pi) &= (1 + \cos(\pi))s(u) + \sin(\pi)l(u) = 0, \\ r(-u, -\pi) &= (1 + \cos(-\pi))s(-u) + \sin(-\pi)l(-u) = 0, \end{aligned}$$

то имеем  $r(\pi, v) = r(-\pi, -v)$ ,  $r(u, \pi) = r(-u, -\pi)$ .

Следовательно, поверхность  $\mathbf{P}$  есть модель проективной плоскости. □

Построим некоторые модели проективной плоскости в  $E^3$ : скрещенный колпак [3, с. 304] и поверхность Штейнера [4, с. 302].

Рассмотрим цилиндр

$$R(u, v) = 1/2e(u) + vk, \quad e(u) = (\cos(u), \sin(u), 0), \quad k = (0, 0, 1).$$

Зададим линию

$$\rho(u) = 1/2e(u) - 1/4 \sin(u/2)k.$$

Имеем

$$s(u) = (0, 0, -1/4 \sin(u)), l(u) = 1/2e(u/2).$$

Поверхность  $\mathbf{P}$  определится в виде

$$r(u, v) = (1/2 \sin(v) \cos(u/2), 1/2 \sin(v) \sin(u/2), -1/4(1 + \cos(v)) \sin(u)), \quad u \in [-\pi, \pi], \quad v \in [pi, \pi].$$

**Теорема 2.** Поверхность  $\mathbf{P}$  есть поверхность Штейнера.

*Доказательство.* Непосредственной проверкой убеждаемся, что

$$x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2 + xyz = 0.$$

Таким образом, в прямоугольных координатах имеем уравнение поверхности Штейнера [4, с. 302].  $\square$

Построим эту кривую (рисунок 1) и эту поверхность (рисунок 2).

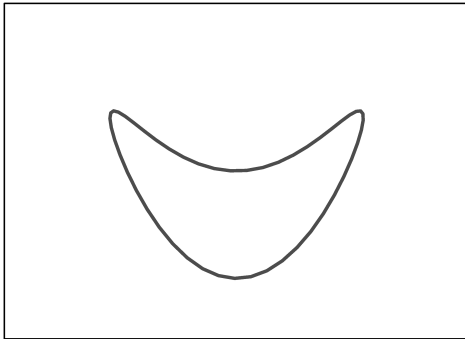


Рисунок 1. Обмотка цилиндра

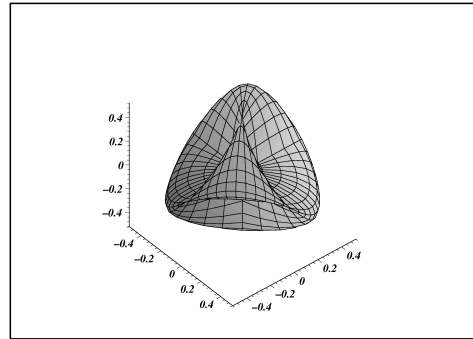


Рисунок 2. Поверхность Штейнера

Рассмотрим также обмотку цилиндра  $\rho(u) = e(u) + \sin(u/2)k$ .

Имеем  $s(u) = e(u)$ ,  $l(u) = \sin(u/2)k$ ,

$$r(u, v) = ((1 + \cos(v)) \cos(u), (1 + \cos(v)) \sin(u), \sin(v) \sin(u/2)).$$

Полученную поверхность обозначим  $\mathbf{P1}$ .

Поверхность  $\mathbf{P1}$  называется скрещенным колпаком [3, с. 304].

Построим ее (рисунок 3).

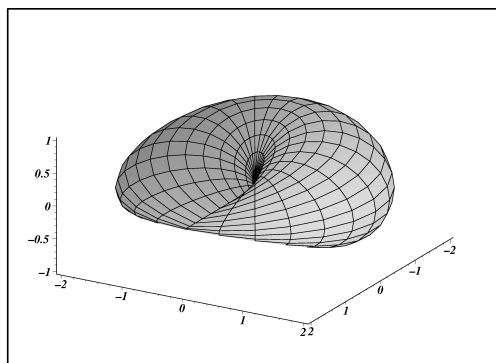


Рисунок 3. Скрещенный колпак

## Список литературы

1. Mashke H. Note on the unilateral surface of Moebius // Trans. Amer. Math. Sos. — 1900. — no. 1:1.
2. Сабитов И.Х. Изометрические погружения и вложения плоского листа Мебиуса в евклидовы пространства // Известия РАН. — 2007. — № 71(5). — С. 197–224.
3. Кривошапко С.Н., Иванов В.Н., Халаби С.М. Аналитические поверхности. — М. : Наука, 2006.
4. Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия. — М. : Наука, 1981.
5. Чешкова М.А. Об одной модели бутылки Клейна // Известия Алтайского гос. ун-та. — 2016. — № 1(89). — С. 180–184.
6. Чешкова М.А. Односторонние поверхности // Известия Алтайского гос. ун-та. — 2015. — № 1/2(85). — С. 164–168.
7. Борисович Ю.Г., Близняков Н.М., Израилевич Я.А., Фоменко А.Т. Введение в топологию. — М. : Наука, 1995.