УДК 514.764.256

Конформно плоские (псевдо)римановы многообразия с метрической связностью с векторным кручением[1]

Балащенко В.В., Клепиков П.Н., Родионов Е.Д.
Белорусский государственный университет, г. Минск
Алтайский государственный университет, г. Барнаул
balashchenko@bsu.by, klepikov.math@gmail.com, edr2002@mail.ru

Аннотация

Широко известная теорема Вейля–Схоутена дает необходимые и достаточные условия того, что (псевдо)риманово многообразие является конформно плоским. Данная работа посвящена доказательству аналогичной теоремы в случае (псевдо)римановых многообразий с метрической связностью с векторным кручением.

Ключевые слова: (псевдо)римановы многообразия, метрическая связность с векторным кручением, конформные деформации.

1. Введение и основные результаты

Пусть (M, g) — (псевдо)риманово многообразие. Определим на данном многообразии метрическую связность ∇ с помощью формулы

$$\nabla_X Y = \nabla^g_X Y + g(X, Y)V - g(V, Y)X, \tag{1}$$

где V — некоторое фиксированное векторное поле, X и Y — произвольные векторные поля, ∇^g — связность Леви-Чивита. Связность ∇ является одной из трех основных связностей, описанных Э. Картаном в работе [1], и называется метрической связностью с векторным кручением или полусимметрической связностью (с точностью до направления).

Данная связность играет важную роль в случае двумерных поверхностей, так как в этом случае любая метрическая связность является связностью с векторным кручением [1]. В работах [2–7] изучаются различные аспекты метрических связностей с векторным кручением.

Важная теорема о связи конформных деформаций и метрических связностей с векторным кручением была доказана К. Яно в работе [8].

Теорема 1. *Риманово многообразие допускает метрическую связность с векторным кручением, тензор кривизны которой равен нулю, тогда и только тогда, когда оно является конформно плоским.*

Данная теорема также обобщается и на случай псевдоримановой метрики, т.к. доказательство не использует положительную определенность метрического тензора.

Однако более известные условия на конформно плоские многообразия известны как теорема Вейля–Схоутена:

Теорема 2. *(Псевдо)риманово многообразие размерности $n \geqslant 3$ является конформно плоским тогда и только тогда, когда тензор Схоутена–Вейля равен нулю при $n = 3$, или тензор Вейля равен нулю при $n > 3$.*

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант: № 18–31–00033 мол_а).

Данная работа посвящена изучению (псевдо)римановых многообразий, которые являются конформно плоскими по отношению к метрической связности ∇ с векторным кручением. То есть таких многообразий, для которых существует конформная деформация метрики такая, что новый метрический тензор имеет нулевой тензор кривизны по отношению к связности $\widetilde{\widetilde{\nabla}}$.

Основным результатом данной работы является доказательство следующей теоремы.

Теорема 3. *Пусть (M, g) — (псевдо)риманово многообразие размерности $n \geqslant 3$ с метрической связностью с векторным кручением. Тогда (M, g) является конформно плоским (преобразование типа II) тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

- *1-форма π замкнута, т.е. $d\pi = 0$;*
- *тензор Схоутена–Вейля равен нулю при $n = 3$, или тензор Вейля равен нулю при $n > 3$.*

2. Основные обозначения и факты

Пусть (M, g) — (псевдо)риманово многообразие. Метрическая связность ∇ с векторным кручением определяется с помощью формулы (1). Зададим следующие тензорные поля связности ∇ с помощью равенств:

- тензор кривизны
$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z;$$
- тензор Риччи
$$r(X, Y) = \mathrm{tr}(Z \to R(X, Z)Y);$$
- тензор одномерной кривизны
$$A = \frac{1}{n-2}\left(r - \frac{s \cdot g}{2(n-1)}\right),$$
где $s = \mathrm{tr}_g(r)$ — скалярная кривизна;
- тензор Вейля
$$W(X, Y)Z = R(X, Y)Z - A(X, Z)Y - g(X, Z)\mathcal{A}(Y) + g(Y, Z)\mathcal{A}(X) + A(Y, Z)X,$$
где $\mathcal{A}(X)$ определяется через равенство $g\left(\mathcal{A}(X), Y\right) = A(X, Y)$;
- тензор Схоутена–Вейля
$$SW(X, Y, Z) = \left(\nabla_Y A\right)(X, Z) - \left(\nabla_X A\right)(Y, Z) + 2\pi(Y)A(X, Z) - 2\pi(X)A(Y, Z),$$
где $\pi(X) = g(X, V)$.

Отметим, что определения почти всех тензорных полей совпадают с определениями соответствующих тензоров в случае связности Леви-Чивита. Однако для тензора Схоутена–Вейля необходима поправка в виде двух дополнительных слагаемых. Использование такого определения тензора Схоутена–Вейля необходимо для предложение 1. Также заметим, что, в отличие от случая связности Леви-Чивита, в данном случае тензор Риччи не обязан быть симметричным. Однако верна

Теорема 4 ([9,10]). *Пусть (M, g) — (псевдо)риманово многообразие с метрической связностью с векторным кручением. Тогда тензор Риччи является симметричным тогда и только тогда, когда 1-форма π замкнута (т.е. $d\pi = 0$).*

Определение 1. *Пусть (M, g) — (псевдо)риманово многообразие с метрической связностью ∇ с векторным кручением. Конформной деформацией метрического тензора g называется новый метрический тензор $\widetilde{g} = e^{2f} g$, где f — некоторая гладкая функция на M.*
Будем говорить, что конформная деформация имеет тип I, если векторные поля под действием преобразования не изменяются, но соответствующие им двойственные 1-формы меняются: $\widetilde{\pi} = e^{2f}\pi$.
Будем говорить, что конформная деформация имеет тип II, если 1-формы под действием преобразования не изменяются, но соответствующие им двойственные векторные поля меняются: $\widetilde{V} = e^{-2f} V$.

Определение 2. *(Псевдо)риманово многообразие (M, g) с метрической связностью ∇ с векторным кручением называется конформно плоским, если существует такая конформная деформация, что $\widetilde{g}$ имеет нулевой тензор кривизны относительно связности $\widetilde{\nabla}$.*

3. Конформные деформации (псевдо)римановых многообразий с метрической связностью с векторным кручением

Данный раздел посвящен доказательству основного результата работы, а именно теоремы 3.

Предложение 1. *Пусть (M, g) — (псевдо)риманово многообразие с метрической связностью ∇ с векторным кручением размерности $n \geqslant 3$. Тогда тензор Вейля W и тензор Схоутена–Вейля SW (при $n = 3$) инвариантны при конформных деформациях (и типа I, и типа II).*

Доказательство данного предложения основано на прямых вычислениях, и приводить его мы не будем. Однако, приведем формулу, показывающую как при конформных деформациях типа II изменяется тензор одномерной кривизны:

$$\widetilde{A}(X, Y) = \widehat{A}(X, Y) - \left(\widehat{\nabla}_X \psi\right)(Y) + \psi(X)\psi(Y) - \frac{1}{2} g(X, Y)\|\psi\|^2, \tag{2}$$

где $\psi = df - \pi$ и $\widehat{A}$ — тензор одномерной кривизны (M, g) относительно связности Леви-Чивита $\widehat{\nabla}$.

Для доказательства необходимость условий, приведенных в теореме 3, осталось заметить, что после конформной деформации тензор кривизны $\widetilde{R}$ будет тривиален, а следовательно тензор Риччи $\widetilde{r}$ будет симметричен. Тогда по теореме 4 получаем требуемое.

Докажем достаточность. Предположим, что выполняется: 1-форма π замкнута; тензор Схоутена–Вейля равен нулю при $n = 3$ или тензор Вейля равен нулю при $n > 3$. Тогда, из (2) получаем, что выполняется уравнение

$$\widehat{A}(X, Y) - \left(\widehat{\nabla}_X \psi\right)(Y) + \psi(X)\psi(Y) - \frac{1}{2} g(X, Y)\|\psi\|^2 = 0.$$

Данное уравнение также появляется в доказательстве теоремы Вейля–Схоутена. Аналогично ему, заключаем, что при выполнении условий теоремы 3 оно имеет решение — функцию ψ. А следовательно $df = d\psi + \pi$ является дифференциалом некоторой функции (как минимум локально). Таким образом, достаточность доказана.

В заключении отметим, что случай конформных деформаций типа I является более сложным. Авторам известны лишь необходимые условия в этом случае.

Список литературы

1. Cartan E. Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée (deuxième partie) // Ann. Ecole Norm. Sup. — 1925. — Vol. 42. — P. 17–88.
2. Muniraja G. Manifolds Admitting a Semi-Symmetric Metric Connection and a Generalization of Schur's Theorem // Int. J. Contemp. Math. Sci. — 2008. — Vol. 3, no. 25. — P. 1223–1232.
3. Agricola I., Thier C. The Geodesics of Metric Connections with Vectorial Torsion // Annals of Global Analysis and Geometry. — 2004. — Vol. 26. — P. 321–332.
4. Murathan C., Özgür C. Riemannian manifolds with a semi-symmetric metric connection satisfying some semisymmetry conditions // Proceedings of the Estonian Academy of Sciences. — 2008. — Vol. 57, no. 4. — P. 210–216.
5. Yilmaz H. B., Zengin F. Ö., Uysal. S. A. On a Semi Symmetric Metric Connection with a Special Condition on a Riemannian Manifold // European journal of pure and applied mathematics. — 2011. — Vol. 4, no. 2. — P. 152–161.
6. Zengin F. Ö., Demirbağ S. A., Uysal. S. A., Yilmaz H. B. Some vector fields on a riemannian manifold with semi-symmetric metric connection // Bulletin of the Iranian Mathematical Society. — 2012. — Vol. 38, no. 2. — P. 479–490.
7. Agricola I., Kraus M. Manifolds with vectorial torsion // Differential Geometry and its Applications. — 2016. — Vol. 46. — P. 130–146.
8. Yano K. On semi-symmetric metric connection // Revue Roumame de Math. Pure et Appliquees. — 1970. — Vol. 15. — P. 1579–1586.
9. Barua B., Ray A. Kr. Some properties of a semi-symmetric metric connection in a Riemannian manifold // Indian J. pure appl. Math. — 1985. — Vol. 16, no. 7. — P. 736–740.
10. De U.C., De B.K. Some properties of a semi-symmetric metric connection on a Riemannian manifold // Istanbul Univ. Fen. Fak. Mat. Der. — 1995. — Vol. 54. — P. 111–117.