УДК 514.765

Четырехмерные локально однородные псевдоримановы многообразия с изотропным тензором Схоутена–Вейля[1]

Клепиков П.Н.
Алтайский государственный университет, г. Барнаул
klepikov.math@gmail.com

Аннотация

Изотропный тензор Схоутена–Вейля ранее изучался в случае трехмерных групп Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой. В случае локально однородных псевдоримановых пространств с нетривиальной подгруппой изотропии были классифицированы многообразия с изотропным тензором Вейля. В данной работе получена классификация четырехмерных локально однородных псевдоримановых многообразий с изотропным тензором Схоутена–Вейля. Кроме того, получены некоторые результаты о тензорах кривизны подобных многообразий.

Ключевые слова: локально однородные пространства, изотропный тензор Схоутена–Вейля, алгебры Ли.

1. Введение

(Псевдо)римановы многообразия с нулевым тензором Схоутена–Вейля изучались в работах многих математиков. В частности, в класс данных многообразий входят многообразия Эйнштейна ($r = \lambda g$) и их прямые произведения, локально симметрические пространства ($\nabla R = 0$), Риччи паралелльные многообразия ($\nabla r = 0$) и конформно плоские многообразия ($W = 0$) (см. [1]). Также отметим, что в случае многообразий постоянной скалярной кривизны класс многообразий с нулевым тензором Схоутена–Вейля совпадается с классом $\mathcal{B}$ эйнштейново подобных многообразий в смысле А. Грея [2].

Для локально однородных пространств с нулевым тензором Схоутена–Вейля известны некоторые классификационные результаты в случае малых размерностей. Например, Дж. Кальварузо и А. Заем классифицировали левоинвариантные псевдоримановы метрики Эйнштейна, конформно плоские и Риччи параллельные метрики на четырехмерных группах Ли [3–5]. Более того, А. Заем и А. Хаджи-Бадали классифицировали четырехмерные эйнштеново подобные псевдоримановы локально однородные пространства с нетривиальной подгруппой изотропии [6]. Классификация четырехмерных групп Ли с левоинвариантной псевдоримановой метрикой и нулевым тензором Схоутена–Вейля была получена в работе [7]. В случае римановой метрики Д.С. Воронов, О.П. Хромова, Е.Д. Родионов и В.В. Славский получили классификацию четырехмерных метрических групп Ли с нулевым тензором Схоутена–Вейля [8–10].

(Псевдо)римановы многообразия с изотропным тензором Схоутена–Вейля естественным образом возникают при изучении локально конформно однородных (псевдо)римановых пространств [11]. Ранее данные многообразия в случае трехмерных групп Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой изучались в работах [12, 13]. В них была получена полная классификация метрических групп Ли, тензор Схоутена–Вейля которых является изотропным. Кроме того, в работах [14, 15] была получена классификация четырехмерных локально однородных многообразий с нетривиальной подгруппой изотропии и изотропным тензором Вейля. Данная работа продолжает исследования многообразий

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант: № 18–31–00033 мол_а).

с изотропным тензором Схоутена–Вейля в случае четырехмерных локально однородных (псевдо)римановых многообразий с нетривиальной подгруппой изотропии.

Целью данной работы является доказательство следующей

Теорема 1. *Пусть $(M = G/H, g)$ — локально однородное псевдориманово многообразие размерности 4 с нетривиальной подгруппой изотропии. Тогда $(M = G/H, g)$ имеет изотропный тензор Схоутена–Вейля тогда и только тогда, когда алгебра Ли группы G содержится в таблице 1.*

2. Основные обозначения и факты

Пусть $(M = G/H, g)$ — локально однородное (псевдо)риманово многообразие размерности m. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G, $\mathfrak{h}$ — подалгебра изотропии (алгебра Ли группы H), $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ — фактор-пространство, являющиеся дополнением к $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$.

Пара $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ определяет представление изотропии $\psi\colon \mathfrak{h} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$ правилом $\psi_X(Y) = [X, Y]_{\mathfrak{m}}$. Каждая инвариантная (псевдо)риманова метрика на однородном пространстве G/H соответствует невырожденной симметричной билинейной форме g на $\mathfrak{m}$, которая определяется равенством

$$(\psi_X)^t \cdot g + g \cdot \psi_X = 0, \quad \forall X \in \mathfrak{h}, \tag{1}$$

где $(\psi_X)^t$ — транспонированная матрица. Данная билинейная форма определяет связность Леви–Чивита $\nabla\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$ равенством

$$\nabla_X(Y_{\mathfrak{m}}) = \frac{1}{2}[X, Y]_{\mathfrak{m}} + v(X, Y),$$

где $v\colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{m}$ определяется через равенство

$$2g(v(X, Y), Z_{\mathfrak{m}}) = g(X_{\mathfrak{m}}, [Z, Y]_{\mathfrak{m}}) + g(Y_{\mathfrak{m}}, [Z, X]_{\mathfrak{m}}).$$

Тензор кривизны $R\colon \mathfrak{m} \times \mathfrak{m} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$ определяется выражением

$$R(X, Y) = [\nabla_Y, \nabla_X] + \nabla_{[X,Y]}.$$

Тензор Риччи r определяется как свертка тензора кривизны по второму и четвертому индексу, скалярная кривизна $Scal$ определяется как полная свертка тензора Риччи r с метрическим тензором g.

Тензор Схоутена–Вейля определяется равенством

$$SW(X, Y, Z) = \frac{1}{n-2}\Big(\nabla_Z r(X, Y) - \nabla_Y r(X, Z) - \\ - \frac{1}{2(n-1)}\left(g(X, Y)\nabla_Z Scal - g(X, Z)\nabla_Y Scal\right)\Big),$$

или, в силу постоянства скалярной кривизны:

$$SW(X, Y, Z) = \frac{1}{n-2}\left(\nabla_Z r(X, Y) - \nabla_Y r(X, Z)\right).$$

Если размерность многообразия $m \geqslant 4$, то тензор Схоутена–Вейля связан с дивергенцией тензора Вейля следующим равенством [1]:

$$SW = -(n-3)\,\mathrm{div}\, W.$$

Таблица 1

Четырехмерные локально однородные псевдоримановы многообразия с нетривиальной подгруппой изотропии и изотропным тензором Схоутена–Вейля

<table>
<tr><th>№</th><th>Скобки Ли</th><th>Скалярное произведение на дополнении к подалгебре изотропии</th><th>Ограничения</th></tr>
<tr><td>$1.1^1.1$</td><td>$[e_1,u_1]=u_1$, $[e_1,u_3]=-u_3$, $[u_1,u_3]=u_2$, $[u_2,u_4]=u_2$, $[u_3,u_4]=u_3$</td><td>$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{13} & 0 \\ 0 & \frac{\alpha_{13}^2+4\alpha_{24}^2}{4\alpha_{44}} & 0 & \alpha_{24} \\ \alpha_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{24} & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix}$</td><td>$\alpha_{13} \neq 0$, $\alpha_{44} \neq 0$</td></tr>
<tr><td>$1.1^1.3$</td><td>$[e_1,u_1]=u_1$, $[e_1,u_3]=-u_3$, $[u_1,u_3]=e_1+u_2$</td><td>$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{24} \\ \alpha_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{24} & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix}$</td><td>$\alpha_{13} \neq 0$, $\alpha_{24} \neq 0$</td></tr>
<tr><td>$1.1^2.1$</td><td>$[e_1,u_1]=u_3$, $[e_1,u_3]=-u_1$, $[u_1,u_3]=-u_2$, $[u_1,u_4]=u_1$, $[u_2,u_4]=2u_2$, $[u_3,u_4]=u_3$</td><td>$\begin{pmatrix} \alpha_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\alpha_{24}^2-\alpha_{33}^2}{\alpha_{44}} & 0 & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & \alpha_{24} & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix}$</td><td>$\alpha_{24}^2 \neq \alpha_{33}^2$, $\alpha_{33} \neq 0$, $\alpha_{44} \neq 0$</td></tr>
<tr><td>$1.1^2.3$</td><td>$[e_1,u_1]=u_3$, $[e_1,u_3]=-u_1$, $[u_1,u_3]=e_1+u_2$</td><td rowspan="2">$\begin{pmatrix} \alpha_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & \alpha_{24} & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix}$</td><td>$\alpha_{33} \neq 0$, $\alpha_{24} \neq 0$</td></tr>
<tr><td>$1.1^2.4$</td><td>$[e_1,u_1]=u_3$, $[e_1,u_3]=-u_1$, $[u_1,u_3]=-e_1+u_2$</td><td>$\alpha_{33} \neq 0$, $\alpha_{24} \neq 0$</td></tr>
<tr><td>$1.3^1.1$</td><td>$[e_1,u_1]=e_1$, $[e_1,u_3]=u_1$, $[e_1,u_4]=u_2$, $[u_1,u_2]=-\frac{1}{2}u_2$, $[u_1,u_3]=u_3$, $[u_1,u_4]=\frac{1}{2}u_4$, $[u_2,u_3]=\frac{1}{2}u_4$</td><td>$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\alpha_{23} \\ 0 & 0 & \alpha_{23} & 0 \\ 0 & \alpha_{23} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ -\alpha_{23} & 0 & \alpha_{34} & \alpha_{44} \end{pmatrix}$</td><td>$\alpha_{34}^2+\alpha_{44}^2 \neq 0$, $\alpha_{33}\alpha_{44} \neq \alpha_{34}^2$, $\alpha_{23} \neq 0$</td></tr>
<tr><td>$1.4^1.1$</td><td>$[e_1,u_2]=u_1$, $[e_1,u_3]=u_2$, $[e_1,u_4]=e_1$, $[u_1,u_2]=u_1$, $[u_1,u_3]=u_2$, $[u_1,u_4]=u_1$, $[u_2,u_3]=u_3$, $[u_3,u_4]=-u_3$</td><td rowspan="7">$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha_{22} & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ -\alpha_{22} & 0 & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & \alpha_{34} & \alpha_{44} \end{pmatrix}$</td><td>$\alpha_{33} \neq 0$, $\alpha_{22} \neq 0$, $\alpha_{44} \neq 0$</td></tr>
<tr><td>$1.4^1.2$</td><td>$[e_1,u_2]=u_1$, $[e_1,u_3]=u_2$, $[e_1,u_4]=e_1$, $[u_1,u_4]=pu_1$, $[u_2,u_4]=(p-1)u_2$, $[u_3,u_4]=(p-2)u_3$</td><td>$\alpha_{33} \neq 0$, $p \neq 3$, $p \neq \frac{5}{3}$, $\alpha_{22} \neq 0$, $\alpha_{44} \neq 0$</td></tr>
<tr><td>$1.4^1.3$</td><td>$[e_1,u_2]=u_1$, $[e_1,u_3]=u_2$, $[e_1,u_4]=e_1$, $[u_1,u_4]=2u_1$, $[u_2,u_3]=e_1$, $[u_2,u_4]=u_2$</td><td>$\alpha_{33} \neq \alpha_{44}$, $\alpha_{22} \neq 0$, $\alpha_{44} \neq 0$</td></tr>
<tr><td>$1.4^1.4$</td><td>$[e_1,u_2]=u_1$, $[e_1,u_3]=u_2$, $[e_1,u_4]=e_1$, $[u_1,u_4]=2u_1$, $[u_2,u_3]=-e_1$, $[u_2,u_4]=u_2$</td><td>$\alpha_{33} \neq -\alpha_{44}$, $\alpha_{22} \neq 0$, $\alpha_{44} \neq 0$</td></tr>
<tr><td>$1.4^1.5$</td><td>$[e_1,u_2]=u_1$, $[e_1,u_3]=u_2$, $[u_1,u_2]=u_1$, $[u_1,u_3]=u_2$, $[u_2,u_3]=u_3$</td><td>$\alpha_{33} \neq 0$, $\alpha_{22} \neq 0$, $\alpha_{44} \neq 0$</td></tr>
<tr><td>$1.4^1.6$</td><td>$[e_1,u_2]=u_1$, $[e_1,u_3]=u_2$, $[u_1,u_4]=u_1$, $[u_2,u_4]=u_2$, $[u_3,u_4]=u_1+u_3$</td><td>$\alpha_{22} \neq 0$, $\alpha_{44} \neq 0$</td></tr>
<tr><td>$1.4^1.7$</td><td>$[e_1,u_2]=u_1$, $[e_1,u_3]=u_2$, $[u_1,u_4]=u_1$, $[u_2,u_4]=u_2$, $[u_3,u_4]=-u_1+u_3$</td><td>$\alpha_{22} \neq 0$, $\alpha_{44} \neq 0$</td></tr>
<tr><td>$2.5^1.1$</td><td>$[e_1,u_2]=u_1$, $[e_1,u_3]=-u_4$, $[e_1,u_4]=-2e_1$, $[e_2,u_2]=-2e_2$, $[e_2,u_3]=-u_2$, $[e_2,u_4]=u_1$, $[u_1,u_2]=2e_2-u_1$, $[u_1,u_3]=u_2+u_4$, $[u_1,u_4]=2e_1-u_1$, $[u_2,u_3]=-2u_3$, $[u_2,u_4]=u_2-u_4$, $[u_3,u_4]=2u_3$</td><td>$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{24} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{24} \\ \alpha_{24} & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & \alpha_{24} & 0 & 0 \end{pmatrix}$</td><td>$\alpha_{33} \neq 0$, $\alpha_{24} \neq 0$</td></tr>
<tr><td>$2.5^2.1$</td><td>$[e_1,u_2]=-e_1+u_1$, $[e_1,u_3]=-u_2$, $[e_1,u_4]=e_2$, $[e_2,u_2]=-e_2$, $[e_2,u_3]=u_4$, $[e_2,u_4]=-e_1-u_1$, $[u_1,u_2]=e_1-u_1$, $[u_1,u_3]=u_2$, $[u_1,u_4]=-e_2$, $[u_2,u_3]=-2u_3$, $[u_2,u_4]=-u_4$</td><td>$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha_{22} & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ -\alpha_{22} & 0 & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & \alpha_{34} & \alpha_{44} \end{pmatrix}$</td><td>$\alpha_{33} \neq 0$, $\alpha_{22} \neq 0$, $\alpha_{44} \neq 0$</td></tr>
</table>

Квадрат длины тензора Схоутена–Вейля $\|SW\|^2$ определяется как полная свертка тензора Схоутена–Вейля с метрическим тензором по каждому индексу.

Тензор Схоутена–Вейля SW будем называть *изотропным*, если квадрат его длины равен нулю ($\|SW\|^2 = 0$), а сам тензор не равен нулю ($SW \neq 0$).

Далее приведем математическую модель, позволяющую вычислять квадрат длины тензора Схоутена–Вейля на локально однородном (псевдо)римановом пространстве (см. подробнее [16, 17]).

Пусть, как и ранее, $(M = G/H, g)$ — локально однородное (псевдо)риманово многообразие размерности m, $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G, $\mathfrak{h}$ — подалгебра изотропии, $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ дополнение в $\mathfrak{g}$ к $\mathfrak{h}$, $h = \dim \mathfrak{h}$.

Пусть $\{e_1, e_2, \ldots, e_h, u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ — базис в $\mathfrak{g}$, где $\{e_i\}$ и $\{u_i\}$ есть базисы $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{m}$ соответственно. Положим

$$[u_i, u_j]_{\mathfrak{m}} = c_{ij}^k u_k, \quad [u_i, u_j]_{\mathfrak{h}} = C_{ij}^k e_k, \quad [h_i, u_j]_{\mathfrak{m}} = \bar{c}_{ij}^k u_k,$$

где c_{ij}^k, C_{ij}^k и $\bar{c}_{ij}^k$ — массивы соответствующих размеров.

Первым шагом является вычисление представления изотропии ψ на базисных векторах $\mathfrak{h}$:

$$(\psi_i)_j^k = (\psi(e_i))_j^k = \bar{c}_{ij}^k \tag{2}$$

и запись системы уравнений (1).

Далее вычисляются компоненты связности Леви–Чивита ∇ с помощью известного метрического тензора g_{ij} и структурных констант c_{ij}^k, C_{ij}^k и $\bar{c}_{ij}^k$:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\left(c_{ij}^k + g^{sk} c_{sj}^l g_{il} + g^{sk} c_{si}^l g_{jl}\right), \quad \bar{\Gamma}_{ij}^k = \frac{1}{2}\bar{c}_{ij}^k - \frac{1}{2} g^{sk} \bar{c}_{is}^l g_{jl}, \tag{3}$$

где $\nabla_{u_i} u_j = \Gamma_{ij}^k u_k$, $\nabla_{h_i} u_j = \bar{\Gamma}_{ij}^k u_k$, $\{g^{ij}\}$ — матрица обратная к $\{g_{ij}\}$.

Следующим шагом является вычисление компонент тензора кривизны R и тензора Риччи r:

$$R_{ijks} = \left(\Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^p - \Gamma_{jk}^l \Gamma_{il}^p + c_{ij}^l \Gamma_{lk}^p + C_{ij}^l \bar{\Gamma}_{lk}^p\right) g_{ps}, \quad r_{ik} = R_{ijks} g^{js}. \tag{4}$$

В конце вычисляются компоненты тензора Схоутена–Вейля

$$SW_{ijk} = \frac{1}{n-2}\left(r_{ij,k} - r_{ik,j}\right) = \frac{1}{n-2}\left(r_{sk}\Gamma_{ji}^s + r_{is}\Gamma_{jk}^s - r_{sj}\Gamma_{ki}^s - r_{is}\Gamma_{kj}^s\right)$$

и квадрат длины тензора Схоутена–Вейля

$$\|SW\|^2 = SW_{ijk} SW_{\alpha\beta\gamma} g^{i\alpha} g^{j\beta} g^{k\gamma}.$$

Отметим, что подобные математические модели для метрических групп Ли также были построены в работах [18, 19], а для локально однородных пространств в работах [3, 17].

В данной работе мы будем использовать классификацию четырехмерных локально однородных (псевдо)римановых многообразий полученную в работе [20]. Данная классификация приведена в таблице 3 в конце данной работы. Для каждого случая указаны скобки Ли, определяющие алгебру Ли группы G, параметры могут принимать любые действительные значения, если не указано обратное; во всех случаях подалгебра изотропии $\mathfrak{h} = \mathrm{span}\,(e_i)$, дополнение $\mathfrak{m} = \mathrm{span}\,(u_i)$. Далее по тексту мы будем ссылаться на случаи из данной классификации по их номеру (например, “$2.1^3.5$”).

Ниже по тексту, при указании вида инвариантной метрики, мы будем ссылаться на таблицу 2. Так, например, фраза “Метрический тензор имеет вид 4” означает, что матрица метрического тензора имеет вид, приведенный в таблице 2 под номером 4 вместе с соответствующими ограничениями на компоненты метрического тензора.

Таблица 2

Вид инвариантного метрического тензора

№	Матрица метрического тензора	Ограничения	№	Матрица метрического тензора	Ограничения
1	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{13} & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & \alpha_{24} \\ \alpha_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{24} & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix}$	$\alpha_{13} \neq 0$, $\alpha_{24}^2 \neq \alpha_{22}\alpha_{44}$	9	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{24} & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & \alpha_{24} \\ \alpha_{24} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{24} & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\alpha_{24} \neq 0$
2	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{24} \\ \alpha_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{24} & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\alpha_{13} \neq 0$, $\alpha_{24} \neq 0$	10	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{24} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{24} & \alpha_{23} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{24} & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\alpha_{24} \neq 0$
3	$\begin{pmatrix} \alpha_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & \alpha_{24} & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix}$	$\alpha_{33} \neq 0$, $\alpha_{24}^2 \neq \alpha_{22}\alpha_{44}$	11	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\alpha_{23} \\ 0 & 0 & \alpha_{23} & 0 \\ 0 & \alpha_{23} & \alpha_{44} & 0 \\ -\alpha_{23} & 0 & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix}$	$\alpha_{23} \neq 0$
4	$\begin{pmatrix} \alpha_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix}$	$\alpha_{33} \neq 0$, $\alpha_{44} \neq 0$	12	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{24} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{24} \\ \alpha_{24} & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & \alpha_{24} & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\alpha_{24} \neq 0$
5	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\alpha_{23} \\ 0 & 0 & \alpha_{23} & 0 \\ 0 & \alpha_{23} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ -\alpha_{23} & 0 & \alpha_{34} & \alpha_{44} \end{pmatrix}$	$\alpha_{23} \neq 0$	13	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{44} & 0 \\ 0 & \alpha_{44} & 0 & 0 \\ \alpha_{44} & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix}$	$\alpha_{44} \neq 0$
6	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha_{22} & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ -\alpha_{22} & 0 & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & \alpha_{34} & \alpha_{44} \end{pmatrix}$	$\alpha_{22} \neq 0$, $\alpha_{44} \neq 0$	14	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{24} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{24} \\ \alpha_{24} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{24} & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\alpha_{24} \neq 0$
7	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{13} & 0 \\ 0 & \alpha_{44} & 0 & 0 \\ \alpha_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix}$	$\alpha_{13} \neq 0$, $\alpha_{44} \neq 0$	15	$\begin{pmatrix} \alpha_{44} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix}$	$\alpha_{44} \neq 0$
8	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha_{24} & \alpha_{23} \\ 0 & 0 & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ -\alpha_{24} & \alpha_{23} & 0 & 0 \\ \alpha_{23} & \alpha_{24} & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\alpha_{23}^2 + \alpha_{24}^2 \neq 0$			

3. Кривизна четырехмерных локально однородных (псевдо)римановых многообразий с нетривиальной подгруппой изотропии

В данном разделе мы приведем некоторые теоремы о тензорах кривизны четырехмерных локально однородных (псевдо)римановых многообразий. Но сначала упомянем следующую лемму, доказательство которой приводится, например, в [1].

Лемма 1. *Пусть $\{R = 0\}$ обозначает класс всех плоских (псевдо)римановых многообразий; $\{r = 0\}$ — класс многообразий с нулевым тензором Риччи; $\{\nabla R = 0\}$ — класс локально симметричных; $\{W = 0\}$ — класс конформно плоских многообразий; $\{\nabla r = 0\}$ — класс Риччи параллельных многообразий; $\{\nabla W = 0\}$ — класс многообразий с парал-*

лельным тензором Вейля; $\{SW=0\}$ — класс многообразий с нулевым тензором Схоутена–Вейля. Тогда выполняются следующие включения:

- $\{R=0\}\subseteq\{r=0\}$, $\{R=0\}\subseteq\{\nabla R=0\}$, $\{R=0\}\subseteq\{W=0\}$;
- $\{r=0\}\subseteq\{\nabla r=0\}$, $\{\nabla R=0\}\subseteq\{\nabla r=0\}$;
- $\{W=0\}\subseteq\{\nabla W=0\}$, $\{\nabla R=0\}\subseteq\{\nabla W=0\}$;
- $\{\nabla r=0\}\subseteq\{SW=0\}$, $\{\nabla W=0\}\subseteq\{SW=0\}$.

Теорема 2. *Пусть G/H — четырехмерное локально однородное (псевдо)риманово многообразие с нетривиальной подгруппой изотропии. Тогда $(G/H,g)$ является плоским многообразием (т.е. $R=0$) для любой инвариантной метрики g тогда и только тогда, когда G/H содержится в списке:*

$$\begin{array}{ccccccccc}
1.1^1.9, & 1.1^1.10, & 1.1^2.12, & 1.1^3.1, & 1.1^4.1, & 1.1^5.1, & 1.1^6.1, & 1.2^1.1, & 1.2^2.1,\\
1.3^1.18, & 1.3^1.32, & 1.4^1.23, & 1.4^1.26, & 2.1^1.3, & 2.1^2.6, & 2.1^3.6, & 2.1^4.2, & 2.2^1.6,\\
2.2^1.7, & 2.2^2.4, & 2.2^3.1, & 2.3^1.1, & 2.4^1.3, & 2.5^1.14, & 2.5^2.7, & 3.1^1.1, & 3.1^2.1,\\
3.2^1.2, & 3.2^1.4, & 3.2^2.2, & 3.3^1.4, & 3.3^2.4, & 3.4^1.1, & 3.4^2.1, & 3.5^1.4, & 3.5^2.4,\\
4.1^1.1, & 4.1^2.1, & 4.2^1.2, & 4.2^2.3, & 4.2^3.2, & 4.3^1.2, & 5.1^1.1, & 6.1^1.2, & 6.1^2.3,\\
6.1^3.3 & & & & & & & &
\end{array}$$

Замечание 1. *Всего в теореме 2 перечислено 46 типов локально однородных пространств.*

Доказательство. Ниже мы подробно рассмотрим случай $1.1^1.9$. Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Для случая $1.1^1.9$ существует базис $\{e_1,u_1,u_2,u_3,u_4\}$ в $\mathfrak{g}$ такой, что ненулевые скобки Ли имеют вид

$$[e_1,u_1]=u_1,\ [e_1,u_2]=\frac{1}{2}u_2,\ [e_1,u_3]=-u_3,\ [e_1,u_4]=-\frac{1}{2}u_4,\ [u_1,u_4]=u_2.$$

Далее, обозначая $\mathfrak{m}=\mathrm{span}\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$ и с использованием (1) и (2), мы получаем представление изотропии и вид инвариантного метрического тензора в данном базисе:

$$\psi_1=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\frac12&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-\frac12\end{pmatrix},\quad g=\begin{pmatrix}0&0&\alpha_{13}&0\\0&0&0&\alpha_{24}\\\alpha_{13}&0&0&0\\0&\alpha_{24}&0&0\end{pmatrix}.$$

Так как g невырождена, то $\alpha_{13}\alpha_{24}\neq 0$. Компоненты связности Леви-Чивита определяются с помощью (3):

$$(\Gamma_1)^k_j=(\Gamma_2)^k_j=(\Gamma_3)^k_j=0,$$
$$(\Gamma_4)^k_j=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&\frac{\alpha_{24}}{\alpha_{13}}\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad (\bar\Gamma_1)^k_j=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\frac12&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-\frac12\end{pmatrix}.$$

Далее с помощью (4) убеждаемся, что все компоненты тензора кривизны R тождественно равны нулю.

Остальные случаи теоремы 2 рассматриваются аналогично. □

Доказательство теорем 3–7 аналогично доказательству теоремы 2 и основывается на прямых вычислениях, поэтому мы приводить их не будем.

Теорема 3. *Пусть G/H — четырехмерное локально однородное (псевдо)риманово многообразие с нетривиальной подгруппой изотропии (кроме тех, что перечислены в теореме 2). Тогда $(G/H, g)$ является Риччи плоским многообразием (т.е. $r = 0$) для любой инвариантной метрики g тогда и только тогда, когда G/H содержится в списке:*

$1.3^1.17$, $1.3^1.23$, $1.3^1.31$, $2.2^1.5$, $2.2^2.3$, $2.5^1.2$, $2.5^1.11$, $2.5^1.12$, $2.5^1.13$, $2.5^2.6$, $3.2^1.3$, $4.3^1.1$

Замечание 2. *Всего в теореме 3 перечислено 12 типов локально однородных пространств.*

Теорема 4. *Пусть G/H — четырехмерное локально однородное (псевдо)риманово многообразие с нетривиальной подгруппой изотропии (кроме тех, что перечислены в теореме 2). Тогда $(G/H, g)$ является конформно плоским многообразием (т.е. $W = 0$) для любой инвариантной метрики g тогда и только тогда, когда G/H содержится в списке:*

$1.4^1.8$, $2.2^1.2$, $2.2^1.3$, $2.4^1.1$, $2.4^1.2$, $2.5^1.4$, $2.5^1.6$, $2.5^1.9$, $2.5^1.10$, $3.2^1.1$, $3.2^2.1$, $3.3^1.1$, $3.3^1.2$, $3.3^1.3$, $3.3^2.1$, $3.3^2.2$, $3.3^2.3$, $3.5^1.1$, $3.5^1.2$, $3.5^1.3$, $3.5^2.1$, $3.5^2.2$, $3.5^2.3$, $6.1^1.1$, $6.1^2.1$, $6.1^2.2$, $6.1^3.1$, $6.1^3.2$

Замечание 3. *Всего в теореме 4 перечислено 28 типов локально однородных пространств.*

Теорема 5. *Пусть G/H — четырехмерное локально однородное (псевдо)риманово многообразие с нетривиальной подгруппой изотропии (кроме тех, что перечислены в теореме 2). Тогда $(G/H, g)$ является локально симметричным многообразием (т.е. $\nabla R = 0$) для любой инвариантной метрики g тогда и только тогда, когда G/H содержится в списке:*

$1.1^1.5$, $1.1^1.6$, $1.1^1.7$, $1.1^2.6$, $1.1^2.7$, $1.1^2.8$, $1.1^2.9$, $1.1^2.10$, $1.3^1.11$, $1.3^1.17$, $1.3^1.31$, $1.4^1.8$, $1.4^1.14$, $1.4^1.21$, $1.4^1.22$, $1.4^1.24$, $1.4^1.25$, $2.1^1.1$, $2.1^1.2$, $2.1^2.1$, $2.1^2.2$, $2.1^2.3$, $2.1^2.4$, $2.1^2.5$, $2.1^3.1$, $2.1^3.2$, $2.1^3.3$, $2.1^3.4$, $2.1^3.5$, $2.1^4.1$, $2.2^1.1$, $2.2^1.4$, $2.2^1.5$, $2.2^2.1$, $2.2^2.2$, $2.2^2.3$, $2.4^1.1$, $2.4^1.2$, $2.5^1.2$, $2.5^1.6$, $2.5^1.7$, $2.5^1.8$, $2.5^1.9$, $2.5^1.10$, $2.5^1.11$, $2.5^1.12$, $2.5^1.13$, $2.5^2.4$, $2.5^2.5$, $2.5^2.6$, $3.2^1.1$, $3.2^1.3$, $3.2^2.1$, $3.3^1.2$, $3.3^1.3$, $3.3^2.2$, $3.3^2.3$, $3.5^1.1$, $3.5^1.2$, $3.5^1.3$, $3.5^2.1$, $3.5^2.2$, $3.5^2.3$, $4.2^1.1$, $4.2^2.1$, $4.2^2.2$, $4.2^3.1$, $4.3^1.1$, $6.1^1.1$, $6.1^2.1$, $6.1^2.2$, $6.1^3.1$, $6.1^3.2$

Замечание 4. *Всего в теореме 5 перечислено 73 типа локально однородных пространств.*

Теорема 6. *Пусть G/H — четырехмерное локально однородное (псевдо)риманово многообразие с нетривиальной подгруппой изотропии (кроме тех, что перечислены в теоремах 2, 3 и 5). Тогда $(G/H, g)$ является Риччи паралельным многообразием (т.е. $\nabla r = 0$) для любой инвариантной метрики g тогда и только тогда, когда G/H содержится в списке:*

$1.3^1.3$, $1.3^1.6$, $1.3^1.8$, $1.3^1.9$, $1.3^1.10$, $1.3^1.20$, $1.4^1.13$, $1.4^1.15$, $1.4^1.16$, $1.4^1.17$, $1.4^1.18$, $1.4^1.19$, $1.4^1.20$, $2.5^1.5$, $2.5^2.3$

Замечание 5. *Всего в теореме 6 перечислено 15 типов локально однородных пространств.*

Теорема 7. *Пусть G/H — четырехмерное локально однородное (псевдо)риманово многообразие с нетривиальной подгруппой изотропии (кроме тех, что перечислены в теоремах 2–6). Тогда $(G/H, g)$ имеет нулевой тензор Схоутена–Вейля (т.е. $SW = 0$) для любой инвариантной метрики g тогда и только тогда, когда G/H содержится в списке:*

$$\begin{array}{ccccccccc}
1.3^1.2, & 1.3^1.4, & 1.3^1.5, & 1.3^1.7, & 1.3^1.12, & 1.3^1.13, & 1.3^1.14, & 1.3^1.15, & 1.3^1.16, \\
1.3^1.19, & 1.3^1.21, & 1.3^1.22, & 1.3^1.24, & 1.3^1.25, & 1.3^1.26, & 1.3^1.27, & 1.3^1.28, & 1.3^1.29, \\
1.3^1.30, & 1.4^1.9, & 1.4^1.10, & 1.4^1.11, & 1.4^1.12, & 2.5^1.3, & 2.5^2.2 & &
\end{array}$$

Замечание 6. *Всего в теореме 7 перечислено 25 типов локально однородных пространств.*

4. Изотропный тензор Схоутена–Вейля

Доказательство теоремы 1 основывается на предложениях, которые будут доказаны в данном разделе.

Предложение 1. *Пусть $(M = G/H, g)$ — локально однородное (псевдо)риманово многообразие размерности 4 с нетривиальной подгруппой изотропии. Тогда тензор Схоутена–Вейля многообразия $(G/H, g)$ равен нулю для любой инвариантной метрики g, если и только если G/H содержится в следующем списке:*

$$\begin{array}{cccccc}
1.1^1.(5\text{-}10) & 1.1^2.(6\text{-}10) & 1.1^2.12 & 1.1^3.1 & 1.1^4.1 & 1.1^5.1 \\
1.1^6.1 & 1.2^1.1 & 1.2^2.1 & 1.3^1.(2\text{-}32) & 1.4^1.(8\text{-}26) & 2.1^1.(1\text{-}3) \\
2.1^2.(1\text{-}6) & 2.1^3.(1\text{-}6) & 2.1^4.(1,2) & 2.2^1.(1\text{-}7) & 2.2^2.(1\text{-}4) & 2.2^3.1 \\
2.3^1.1 & 2.4^1.(1\text{-}3) & 2.5^1.(2\text{-}14) & 2.5^2.(2\text{-}7) & 3.1^1.1 & 3.1^2.1 \\
3.2^1.(1\text{-}4) & 3.2^2.(1,2) & 3.3^1.(1\text{-}4) & 3.3^2.(1\text{-}4) & 3.4^1.1 & 3.4^2.1 \\
3.5^1.(1\text{-}4) & 3.5^2.(1\text{-}4) & 4.1^1.1 & 4.1^2.1 & 4.2^1.(1,2) & 4.2^2.(1\text{-}3) \\
4.2^3.(1,2) & 4.3^1.(1,2) & 5.1^1.1 & 6.1^1.(1,2) & 6.1^2.(1\text{-}3) & 6.1^3.(1\text{-}3)
\end{array}$$

Доказательство. Данное предложение является прямым следствием теорем 2–7 в силу леммы 1. □

Предложение 2. *Пусть $(M = G/H, g)$ — локально однородное (псевдо)риманово многообразие размерности 4 с нетривиальной подгруппой изотропии. Тогда, если G/H есть случай $1.1^1.8$ или $1.1^2.11$, то квадрат длины тензора Схоутена–Вейля $\|SW\|^2$ не равен нулю ни для какой инвариантной метрики g.*

Доказательство. **Случай** $1.1^1.8$**.** В данном случае скобки Ли имеют следующий вид:

$$[e_1, u_1] = u_1, \qquad [e_1, u_2] = \frac{1}{2}u_2, \qquad [e_1, u_3] = -u_3, \qquad [e_1, u_4] = -\frac{1}{2}u_4,$$
$$[u_1, u_3] = -2e_1, \qquad [u_1, u_4] = u_2, \qquad [u_2, u_3] = u_4,$$

где $\mathfrak{h} = \operatorname{span}(e_1)$, $\mathfrak{m} = \operatorname{span}(u_1, u_2, u_3, u_4)$.

Вычислим представление изотропии (2):

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Пусть метрический тензор имеет вид:

$$g = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{14} & \alpha_{24} & \alpha_{34} & \alpha_{44} \end{pmatrix},$$

тогда условие инвариантности метрического тензора (1) будет иметь вид:

$$\alpha_{22} = 0, \quad 2\alpha_{11} = 0, \quad \frac{3}{2}\alpha_{12} = 0, \quad \frac{1}{2}\alpha_{14} = 0,$$
$$-\frac{1}{2}\alpha_{23} = 0, \quad -2\alpha_{33} = 0, \quad -\frac{3}{2}\alpha_{34} = 0, \quad -\alpha_{44} = 0.$$

Таким образом, инвариантный метрический тензор имеет вид 2.

Нетривиальными компонентами тензора Схоутена–Вейля являются:

$$SW_{223} = -SW_{232} = -SW_{441} = \frac{3\alpha_{24}}{2\alpha_{13}}.$$

Квадрат длины тензора Схоутена–Вейля имеет следующий вид:

$$\|SW\|^2 = -\frac{9}{\alpha_{13}^3}.$$

Он, очевидно, не равен нулю ни для какой инвариантной метрики g.

Случай $1.1^2.11$**.** В данном случае скобки Ли имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} &[e_1, u_1] = u_3, && [e_1, u_2] = \frac{1}{2}u_4, && [e_1, u_3] = -u_1, \\ &[e_1, u_4] = -\frac{1}{2}u_2, && [u_1, u_2] = u_2, && [u_1, u_3] = -4e_1, \\ &[u_1, u_4] = -u_4, && [u_2, u_3] = -u_4, && [u_3, u_4] = u_2, \end{aligned}$$

где $\mathfrak{h} = \operatorname{span}(e_1)$, $\mathfrak{m} = \operatorname{span}(u_1, u_2, u_3, u_4)$.

Вычислим представление изотропии (2):

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть метрический тензор имеет вид:

$$g = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{14} & \alpha_{24} & \alpha_{34} & \alpha_{44} \end{pmatrix},$$

тогда условие инвариантности метрического тензора (1) будет иметь вид:

$$\alpha_{24} = 0, \quad 2\alpha_{13} = 0, \quad -\alpha_{11} + \alpha_{33} = 0, \quad -\alpha_{12} + \frac{1}{2}\alpha_{34} = 0, \quad -\frac{1}{2}\alpha_{12} + \alpha_{34} = 0,$$
$$\frac{1}{2}\alpha_{14} + \alpha_{23} = 0, \quad -\frac{1}{2}\alpha_{22} + \frac{1}{2}\alpha_{44} = 0, \quad -\frac{1}{2}\alpha_{23} - \alpha_{14} = 0.$$

Таким образом, инвариантный метрический тензор имеет вид 4.

Нетривиальными компонентами тензора Схоутена–Вейля являются:

$$SW_{221} = -SW_{234} = SW_{243} = -SW_{441} = \frac{3\alpha_{44}}{\alpha_{33}}.$$

Квадрат длины тензора Схоутена–Вейля имеет следующий вид:

$$\|SW\|^2 = \frac{72}{\alpha_{33}^3}.$$

Он, очевидно, не равен нулю ни для какой инвариантной метрики g. □

Предложение 3. *Если $(M = G/H, g)$ — локально однородное (псевдо)риманово многообразие размерности 4 с нетривиальной подгруппой изотропии (кроме тех, что приведены в предложении 1). Тогда, если G/H содержится в нижеприведенном списке, то из равенства нулю квадрата длины тензора Схоутена–Вейля $\|SW\|^2$ для некоторой инвариантной метрики g следует равенство нулю самого тензора Схоутена–Вейля SW:*

$$1.1^1.2 \quad 1.1^1.4 \quad 1.1^2.2 \quad 1.1^2.5$$

Доказательство. Последовательно рассмотрим все случаи, приведенные выше.

Случай $1.1^1.2$**.** В данном случае скобки Ли имеют следующий вид:

$$[e_1, u_1] = u_1, \qquad [e_1, u_3] = -u_3, \qquad [u_2, u_4] = pu_2, \qquad [u_3, u_4] = u_3,$$

где $\mathfrak{h} = \operatorname{span}(e_1)$, $\mathfrak{m} = \operatorname{span}(u_1, u_2, u_3, u_4)$, $p \in \mathbb{R}$.

Вычислим представление изотропии (2):

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть метрический тензор имеет вид:

$$g = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{14} & \alpha_{24} & \alpha_{34} & \alpha_{44} \end{pmatrix},$$

тогда условие инвариантности метрического тензора (1) будет иметь вид:

$$\alpha_{12} = 0, \quad \alpha_{14} = 0, \quad \alpha_{11} = 0, \quad \alpha_{23} = 0, \quad \alpha_{33} = 0, \quad \alpha_{34} = 0.$$

Таким образом, инвариантный метрический тензор имеет вид 1.

Ненулевыми компонентами тензора Схоутена–Вейля являются:

$$SW_{224} = -SW_{242} = \frac{\alpha_{22}^2 p(2p-1)}{4(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)}$$

$$SW_{143} = -SW_{134} = SW_{341} = \frac{\alpha_{13}\alpha_{22} p(2p-1)}{8(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)}$$

$$SW_{442} = -\frac{\alpha_{24}\alpha_{22} p(2p-1)}{4(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)}$$

Квадрат длины тензора Схоутена–Вейля имеет следующий вид:

$$\|SW\|^2 = \frac{3\alpha_{22}^3 p^2(2p-1)^2}{16(\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2)^3}.$$

Он равен нулю тогда, когда либо $\alpha_{22}=0$, либо $p=0$, либо $p=\frac{1}{2}$. Но во всех этих случаях сам тензор Схоутена–Вейля также равен нулю.

Поскольку во всех случаях алгоритм доказательства однообразен, то далее для каждого случая мы приведем лишь номер вида метрического тензора g (из таблицы 2), нетривиальные компоненты тензора Схоутена–Вейля SW и квадрат длины тензора Схоутена–Вейля $\|SW\|^2$.

Случай $1.1^1.4$**.**

g	SW	$\|SW\|^2$
1	$SW_{123}=-SW_{132}=\frac{\alpha_{22}^2}{4\alpha_{13}^2}$, $SW_{143}=-SW_{341}=-SW_{134}=\frac{\alpha_{24}\alpha_{22}}{4\alpha_{13}^2}$, $SW_{231}=-\frac{\alpha_{22}^2}{2\alpha_{13}^2}$	$-\frac{3\alpha_{22}^3}{4\alpha_{13}^6}$

Случай $1.1^2.2$**.**

g	SW	$\|SW\|^2$
3	$SW_{141}=SW_{343}=-SW_{114}=-SW_{334}=\frac{\alpha_{33}\alpha_{22}p(p-1)}{2(\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2)}$, $SW_{224}=-SW_{242}=\frac{\alpha_{22}^2 p(p-1)}{\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2}$, $SW_{442}=-\frac{\alpha_{24}\alpha_{22}p(p-1)}{\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2}$	$\frac{3\alpha_{22}^3 p^2(p-1)^2}{(\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2)^3}$

Случай $1.1^2.5$**.**

g	SW	$\|SW\|^2$
3	$SW_{132}=-SW_{123}=\frac{\alpha_{22}^2}{4\alpha_{33}^2}$, $SW_{134}=SW_{341}=-SW_{143}=\frac{\alpha_{24}\alpha_{22}}{4\alpha_{33}^2}$, $SW_{231}=\frac{\alpha_{22}^2}{2\alpha_{33}^2}$	$\frac{3\alpha_{22}^3}{4\alpha_{33}^6}$

□

Предложение 4. *Если $(M=G/H,g)$ — локально однородное псевдориманово многообразие размерности 4 с нетривиальной подгруппой изотропии. Тогда, если G/H есть случай $1.4^1.6$ или $1.4^1.7$, то квадрат длины тензора Схоутена–Вейля $\|SW\|^2$ равен нулю для любой инвариантной метрики g, а сам тензор Схоутена–Вейля не тривиален.*

Доказательство. **Случай** $1.4^1.6$**.** В данном случае скобки Ли имеют следующий вид:

$$[e_1,u_2]=u_1, \quad [e_1,u_3]=u_2, \quad [u_1,u_4]=u_1,$$
$$[u_2,u_4]=u_2, \quad [u_3,u_4]=u_1+u_3,$$

где $\mathfrak{h}=\operatorname{span}(e_1)$, $\mathfrak{m}=\operatorname{span}(u_1,u_2,u_3,u_4)$.

Вычислим представление изотропии (2):

$$\psi_1=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Пусть метрический тензор имеет вид:

$$g=\begin{pmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}&\alpha_{13}&\alpha_{14}\\\alpha_{12}&\alpha_{22}&\alpha_{23}&\alpha_{24}\\\alpha_{13}&\alpha_{23}&\alpha_{33}&\alpha_{34}\\\alpha_{14}&\alpha_{24}&\alpha_{34}&\alpha_{44}\end{pmatrix},$$

тогда условие инвариантности метрического тензора (1) будет иметь вид:

$$\alpha_{11}=0,\quad \alpha_{12}=0,\quad \alpha_{14}=0,\quad \alpha_{24}=0,\quad 2\alpha_{23}=0,\quad \alpha_{22}+\alpha_{13}=0.$$

Таким образом, инвариантный метрический тензор имеет вид 6.

Ненулевыми компонентами тензора Схоутена–Вейля являются:

$$SW_{343}=-SW_{334}=\frac{3\alpha_{22}}{2\alpha_{44}}.$$

Они не могут занулиться, поскольку при $\alpha_{23}=0$ метрический тензор был бы вырожденным.

Непосредственными вычислениями убеждаемся, что квадрат длины тензора Схоутена–Вейля равен нулю.

Случай $1.4^1.7$**.** В данном случае скобки Ли имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} &[e_1,u_2]=u_1, && [e_1,u_3]=u_2, && [u_1,u_4]=u_1,\\ &[u_2,u_4]=u_2, && [u_3,u_4]=-u_1+u_3, && \end{aligned}$$

где $\mathfrak{h}=\operatorname{span}(e_1)$, $\mathfrak{m}=\operatorname{span}(u_1,u_2,u_3,u_4)$.

Вычислим представление изотропии (2):

$$\psi_1=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Пусть метрический тензор имеет вид:

$$g=\begin{pmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}&\alpha_{13}&\alpha_{14}\\\alpha_{12}&\alpha_{22}&\alpha_{23}&\alpha_{24}\\\alpha_{13}&\alpha_{23}&\alpha_{33}&\alpha_{34}\\\alpha_{14}&\alpha_{24}&\alpha_{34}&\alpha_{44}\end{pmatrix},$$

тогда условие инвариантности метрического тензора (1) будет иметь вид:

$$\alpha_{11}=0,\quad \alpha_{12}=0,\quad \alpha_{14}=0,\quad \alpha_{24}=0,\quad 2\alpha_{23}=0,\quad \alpha_{22}+\alpha_{13}=0.$$

Таким образом, инвариантный метрический тензор имеет вид 6.

Ненулевыми компонентами тензора Схоутена–Вейля являются:

$$SW_{334}=-SW_{343}=\frac{3\alpha_{22}}{2\alpha_{44}}.$$

Они не могут занулиться, поскольку при $\alpha_{23}=0$ метрический тензор был бы вырожденным.

Непосредственными вычислениями убеждаемся, что квадрат длины тензора Схоутена–Вейля равен нулю. □

Предложение 5. *Если $(M=G/H,g)$ — локально однородное псевдориманово многообразие размерности 4 с нетривиальной подгруппой изотропии. Тогда, если G/H содержится в нижеприведенном списке, то квадрат длины тензора Схоутена–Вейля $\|SW\|^2$ равен нулю для любой инвариантной метрики g, но сам тензор Схоутена–Вейля может быть равен нулю для некоторых инвариантных метрик:*

$$1.3^1.1\quad 1.4^1.1\quad 1.4^1.2\quad 1.4^1.3\quad 1.4^1.4\quad 1.4^1.5\quad 2.5^1.1\quad 2.5^2.1$$

Доказательство. Последовательно рассмотрим все случаи, приведенные выше.

Случай 1.3[1].1**.** В данном случае скобки Ли имеют следующий вид:

$$[e_1,u_1]=e_1,\qquad [e_1,u_3]=u_1,\qquad [e_1,u_4]=u_2,\qquad [u_1,u_2]=-\frac{1}{2}u_2,$$
$$[u_1,u_3]=u_3,\qquad [u_1,u_4]=\frac{1}{2}u_4,\qquad [u_2,u_3]=\frac{1}{2}u_4,$$

где $\mathfrak{h}=\operatorname{span}(e_1)$, $\mathfrak{m}=\operatorname{span}(u_1,u_2,u_3,u_4)$.

Вычислим представление изотропии (2):

$$\psi_1=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Пусть метрический тензор имеет вид:

$$g=\begin{pmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}&\alpha_{13}&\alpha_{14}\\\alpha_{12}&\alpha_{22}&\alpha_{23}&\alpha_{24}\\\alpha_{13}&\alpha_{23}&\alpha_{33}&\alpha_{34}\\\alpha_{14}&\alpha_{24}&\alpha_{34}&\alpha_{44}\end{pmatrix},$$

тогда условие инвариантности метрического тензора (1) будет иметь вид:

$$\alpha_{11}=0,\quad \alpha_{12}=0,\quad \alpha_{22}=0,\quad \alpha_{13}=0,\quad \alpha_{24}=0,\quad \alpha_{23}+\alpha_{14}=0.$$

Таким образом, инвариантный метрический тензор имеет вид 5.

Ненулевыми компонентами тензора Схоутена–Вейля являются:

$$SW_{331}=\frac{45(\alpha_{33}\alpha_{44}-\alpha_{34}^2)}{32\alpha_{23}^2},\quad SW_{334}=-SW_{343}=\frac{15\alpha_{44}(\alpha_{33}\alpha_{44}-\alpha_{34}^2)}{64\alpha_{23}^3}.$$

Они могут занулиться тогда, когда либо $\alpha_{33}\alpha_{44}-\alpha_{34}^2=0$.

Непосредственными вычислениями убеждаемся, что квадрат длины тензора Схоутена–Вейля равен нулю.

Поскольку во всех случаях алгоритм доказательства однообразен, то далее для каждого случая мы приведем лишь номер вида метрического тензора g (из таблицы 2) и нетривиальные компоненты тензора Схоутена–Вейля SW. Во всех случаях квадрат длины тензора Схоутена–Вейля тривиален.

Случай 1.4[1].1**.**

g	SW
6	$SW_{332}=-\frac{3\alpha_{33}(\alpha_{44}+2\alpha_{22})}{4\alpha_{22}\alpha_{44}}$, $SW_{343}=-SW_{334}=\frac{\alpha_{33}(5\alpha_{44}+8\alpha_{22})}{4\alpha_{22}\alpha_{44}}$

Случай 1.4[1].2**.**

g	SW
6	$SW_{343}=-SW_{334}=\frac{\alpha_{33}(p-3)(3*p-5)}{2\alpha_{44}}$

Случай 1.4[1].3**.**

g	SW
6	$SW_{334}=-SW_{343}=\frac{\alpha_{33}-\alpha_{44}}{2\alpha_{44}}$

Случай 1.4^1.4.

g	SW
6	$SW_{334} = -SW_{343} = \frac{\alpha_{33}+\alpha_{44}}{2\alpha_{44}}$

Случай 1.4^1.5.

g	SW
6	$SW_{332} = -\frac{3\alpha_{33}}{4\alpha_{22}}$

Случай 2.5^1.1.

g	SW
12	$SW_{332} = SW_{334} = -SW_{343} = \frac{15\alpha_{33}}{\alpha_{24}}$

Случай 2.5^2.1.

g	SW
6	$SW_{332} = \frac{15\alpha_{33}}{2\alpha_{44}}$

□

В предложениях 1, 2, 3 перечислены четырехмерные локально однородные (псевдо)римановы многообразия, которые не могут иметь изотропный тензор Схоутена–Вейля. В предложении 4 перечислены локально однородные псевдоримановы многообразия размерности 4, тензор Схоутена–Вейля которых изотропен для любой инвариантной метрики. В предложении 5 содержатся четырехмерные однородные псевдоримановы многообразия, тензор Схоутена–Вейля которых изотропен при некоторых условиях типа “неравенство”, эти многообразия вместе с соответствующими условиями содержатся в таблице 1. Пять оставшихся случаев из классификации [20] рассмотрим далее.

Случай 1.1^1.1. В данном случае скобки Ли имеют следующий вид:

$$[e_1, u_1] = u_1, \quad [e_1, u_3] = -u_3, \quad [u_1, u_3] = u_2, \quad [u_2, u_4] = u_2, \quad [u_3, u_4] = u_3,$$

где $\mathfrak{h} = \operatorname{span}(e_1)$, $\mathfrak{m} = \operatorname{span}(u_1, u_2, u_3, u_4)$.

Вычислим представление изотропии (2):

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть метрический тензор имеет вид:

$$g = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{14} & \alpha_{24} & \alpha_{34} & \alpha_{44} \end{pmatrix},$$

тогда условие инвариантности метрического тензора (1) будет иметь вид:

$$\alpha_{12} = 0, \quad \alpha_{14} = 0, \quad 2\alpha_{11} = 0, \quad -\alpha_{23} = 0, \quad -2\alpha_{33} = 0, \quad -\alpha_{34} = 0.$$

Таким образом, инвариантный метрический тензор имеет вид 1.

Ненулевыми компонентами тензора Схоутена–Вейля являются:

$$SW_{123} = SW_{224} = -SW_{132} = -SW_{231} = -SW_{242} = \frac{(\alpha_{13}^2 + \alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)\alpha_{22}^2}{4\alpha_{13}^2(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)},$$
$$SW_{143} = -SW_{134} = \frac{(\alpha_{13} + 2\alpha_{24})(\alpha_{13}^2 + \alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)\alpha_{22}}{8\alpha_{13}^2(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)},$$
$$SW_{341} = \frac{(\alpha_{13} - 2\alpha_{24})(\alpha_{13}^2 + \alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)\alpha_{22}}{8\alpha_{13}^2(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)},$$
$$SW_{442} = -\frac{(\alpha_{13}^2 + \alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)\alpha_{22}\alpha_{24}}{4\alpha_{13}^2(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)}.$$

Квадрат длины тензора Схоутена–Вейля имеет вид:

$$\|SW\|^2 = \frac{3(\alpha_{13}^2 - 4\alpha_{22}\alpha_{44} + 4\alpha_{24}^2)(\alpha_{13}^2 + \alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)^2\alpha_{22}^3}{16\alpha_{13}^6(\alpha_{44}\alpha_{22} - \alpha_{24}^2)^3}.$$

Он равен нулю в трех случаях:

1. при $\alpha_{22} = 0$, но в этом случае зануляются компоненты тензора Схоутена–Вейля, следовательно в данном случае тензор Схоутена–Вейля не является изотропным;
2. при $\alpha_{22} = -\frac{\alpha_{13}^2 - \alpha_{24}^2}{\alpha_{44}}$, но в этом случае зануляются компоненты тензора Схоутена–Вейля, следовательно в данном случае тензор Схоутена–Вейля не является изотропным;
3. при $\alpha_{22} = \frac{\alpha_{13}^2 + 4\alpha_{24}^2}{4\alpha_{44}}$, в этом случае тензор Схоутена–Вейля является изотропным.

Случай $1.1^1.3$**.** В данном случае скобки Ли имеют следующий вид:

$$[e_1, u_1] = u_1, \quad [e_1, u_3] = -u_3, \quad [u_1, u_3] = e_1 + u_2,$$

где $\mathfrak{h} = \operatorname{span}(e_1)$, $\mathfrak{m} = \operatorname{span}(u_1, u_2, u_3, u_4)$.

Вычислим представление изотропии (2):

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть метрический тензор имеет вид:

$$g = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{14} & \alpha_{24} & \alpha_{34} & \alpha_{44} \end{pmatrix},$$

тогда условие инвариантности метрического тензора (1) будет иметь вид:

$$\alpha_{12} = 0, \quad \alpha_{14} = 0, \quad 2\alpha_{11} = 0, \quad -\alpha_{23} = 0, \quad -2\alpha_{33} = 0, \quad -\alpha_{34} = 0.$$

Таким образом, инвариантный метрический тензор имеет вид 1.

Ненулевыми компонентами тензора Схоутена–Вейля являются:

$$SW_{132} = -SW_{123} = 2SW_{231} = \frac{\alpha_{22}(\alpha_{13} - \alpha_{22})}{4\alpha_{13}^2},$$
$$SW_{134} = SW_{341} = -SW_{143} = \frac{\alpha_{24}(\alpha_{13} - \alpha_{22})}{4\alpha_{13}^2}.$$

Квадрат длины тензора Схоутена–Вейля имеет вид:

$$\|SW\|^2 = -\frac{3\alpha_{22}(\alpha_{13}-\alpha_{22})^2}{4\alpha_{13}^6}.$$

Он равен нулю в двух случаях:

1. при $\alpha_{13} = \alpha_{22}$, но в этом случае зануляются компоненты тензора Схоутена–Вейля, следовательно в данном случае тензор Схоутена–Вейля не является изотропным;

2. при $\alpha_{22} = 0$, в этом случае тензор Схоутена–Вейля является изотропным.

Случай $1.1^2.1$**.** В данном случае скобки Ли имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
&[e_1,u_1]=u_3, && [e_1,u_3]=-u_1, && [u_1,u_3]=-u_2,\\
&[u_1,u_4]=u_1, && [u_2,u_4]=2u_2, && [u_3,u_4]=u_3,
\end{aligned}$$

где $\mathfrak{h} = \operatorname{span}(e_1)$, $\mathfrak{m} = \operatorname{span}(u_1,u_2,u_3,u_4)$.

Вычислим представление изотропии (2):

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть метрический тензор имеет вид:

$$g = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14}\\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24}\\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} & \alpha_{34}\\ \alpha_{14} & \alpha_{24} & \alpha_{34} & \alpha_{44} \end{pmatrix},$$

тогда условие инвариантности метрического тензора (1) будет иметь вид:

$$\alpha_{23}=0, \quad \alpha_{34}=0, \quad -\alpha_{12}=0, \quad 2\alpha_{13}=0, \quad -\alpha_{14}=0, \quad \alpha_{33}-\alpha_{11}=0.$$

Таким образом, инвариантный метрический тензор имеет вид 3.

Ненулевыми компонентами тензора Схоутена–Вейля являются:

$$\begin{aligned}
SW_{114} = SW_{334} = -SW_{141} = -SW_{343} &= \frac{(\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2-4\alpha_{33}^2)\alpha_{22}}{4\alpha_{33}(\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2)},\\
SW_{242} = 2SW_{123} = -SW_{224} = -SW_{231} = -2SW_{132} &= \frac{(\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2-4\alpha_{33}^2)\alpha_{22}^2}{2\alpha_{33}^2(\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2)},\\
SW_{442} = 2SW_{143} = -2SW_{134} = -2SW_{341} &= \frac{(\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2-4\alpha_{33}^2)\alpha_{24}\alpha_{22}}{2\alpha_{33}^2(\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2)}.
\end{aligned}$$

Квадрат длины тензора Схоутена–Вейля имеет вид:

$$\|SW\|^2 = \frac{3(\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2+\alpha_{33}^2)\alpha_{22}^3(\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2-4\alpha_{33}^2)^2}{4\alpha_{33}^6(\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2)^3}.$$

Он равен нулю в трех случаях:

1. при $\alpha_{22} = 0$, но в этом случае зануляются компоненты тензора Схоутена–Вейля, следовательно в данном случае тензор Схоутена–Вейля не является изотропным;

2. при $\alpha_{22} = \frac{\alpha_{24}^2+4\alpha_{33}^2}{\alpha_{44}}$, но в этом случае зануляются компоненты тензора Схоутена–Вейля, следовательно в данном случае тензор Схоутена–Вейля не является изотропным;

3. при $\alpha_{22} = \frac{\alpha_{24}^2-\alpha_{33}^2}{\alpha_{44}}$, в этом случае тензор Схоутена–Вейля является изотропным, если $\alpha_{24}^2 - \alpha_{33}^2 \neq 0$.

Случай $1.1^2.3$**.** В данном случае скобки Ли имеют следующий вид:

$$[e_1, u_1] = u_3, \quad [e_1, u_3] = -u_1, \quad [u_1, u_3] = e_1 + u_2,$$

где $\mathfrak{h} = \mathrm{span}\,(e_1)$, $\mathfrak{m} = \mathrm{span}\,(u_1, u_2, u_3, u_4)$.

Вычислим представление изотропии (2):

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть метрический тензор имеет вид:

$$g = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{14} & \alpha_{24} & \alpha_{34} & \alpha_{44} \end{pmatrix},$$

тогда условие инвариантности метрического тензора (1) будет иметь вид:

$$\alpha_{23} = 0, \quad \alpha_{34} = 0, \quad -\alpha_{12} = 0, \quad 2\alpha_{13} = 0, \quad -\alpha_{14} = 0, \quad \alpha_{33} - \alpha_{11} = 0.$$

Таким образом, инвариантный метрический тензор имеет вид 3.

Ненулевыми компонентами тензора Схоутена–Вейля являются:

$$SW_{231} = 2SW_{132} = -2SW_{123} = \frac{\alpha_{22}(\alpha_{22} - \alpha_{33})}{4\alpha_{33}^2},$$
$$SW_{134} = SW_{341} = -SW_{143} = \frac{\alpha_{24}(\alpha_{22} - \alpha_{33})}{4\alpha_{33}^2}.$$

Квадрат длины тензора Схоутена–Вейля имеет вид:

$$\|SW\|^2 = \frac{3\alpha_{22}(\alpha_{22} - \alpha_{33})^2}{4\alpha_{33}^6}.$$

Он равен нулю в двух случаях:

1. при $\alpha_{22} = \alpha_{33}$, но в этом случае зануляются компоненты тензора Схоутена–Вейля, следовательно в данном случае тензор Схоутена–Вейля не является изотропным;

2. при $\alpha_{22} = 0$, в этом случае тензор Схоутена–Вейля является изотропным.

Случай $1.1^2.4$**.** В данном случае скобки Ли имеют следующий вид:

$$[e_1, u_1] = u_3, \quad [e_1, u_3] = -u_1, \quad [u_1, u_3] = -e_1 + u_2,$$

где $\mathfrak{h} = \mathrm{span}\,(e_1)$, $\mathfrak{m} = \mathrm{span}\,(u_1, u_2, u_3, u_4)$.

Вычислим представление изотропии (2):

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть метрический тензор имеет вид:

$$g = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{14} & \alpha_{24} & \alpha_{34} & \alpha_{44} \end{pmatrix},$$

тогда условие инвариантности метрического тензора (1) будет иметь вид:

$$\alpha_{23} = 0, \quad \alpha_{34} = 0, \quad -\alpha_{12} = 0, \quad 2\alpha_{13} = 0, \quad -\alpha_{14} = 0, \quad \alpha_{33} - \alpha_{11} = 0.$$

Таким образом, инвариантный метрический тензор имеет вид 3.

Ненулевыми компонентами тензора Схоутена–Вейля являются:

$$SW_{132} = -SW_{123} = 2SW_{231} = \frac{\alpha_{22}(\alpha_{22} + \alpha_{33})}{4\alpha_{33}^2},$$
$$SW_{134} = SW_{341} = -SW_{143} = \frac{\alpha_{24}(\alpha_{22} + \alpha_{33})}{4\alpha_{33}^2}.$$

Квадрат длины тензора Схоутена–Вейля имеет вид:

$$\|SW\|^2 = \frac{3\alpha_{22}(\alpha_{22} + \alpha_{33})^2}{4\alpha_{33}^6}.$$

Он равен нулю в двух случаях:

1. при $\alpha_{22} = -\alpha_{33}$, но в этом случае зануляются компоненты тензора Схоутена–Вейля, следовательно в данном случае тензор Схоутена–Вейля не является изотропным;

2. при $\alpha_{22} = 0$, в этом случае тензор Схоутена–Вейля является изотропным.

В заключении заметим, что для 186 многообразий из этой классификации [20] справедливо следующее:

- 15 многообразий могут иметь изотропный тензор Схоутена–Вейля SW, причем:
  – для 2 из них тензор Схоутена–Вейля SW изотропен для любой инвариантной метрики;
  – в остальных 13 случаях тензор Схоутена–Вейля SW является изотропным лишь при определенных условиях на инвариантную метрику, причем:
  • в 5 случаях условия на инвариантную метрику являются условиями типа “равенство”;
  • в 8 случаях условия на инвариантную метрику являются условиями типа “неравенство”;

- 171 многообразие не может иметь изотропный тензор Схоутена–Вейля SW, причем:
  – в 2 случаях квадрат длины тензора Схоутена–Вейля $\|SW\|^2$ не равен нулю ни для какой инвариантной метрики;
  – в 165 случаях все компоненты тензора Схоутена–Вейля SW равны нулю для любой инвариантной метрики;
  – в 4 случаях тривиальность квадрата длины тензора Схоутена–Вейля $\|SW\|^2$ для некоторой инвариантной метрики влечет за собой тривиальность тензора Схоутена–Вейля SW.

Таблица 3

Классификация четырехмерных локально однородных (псевдо)римановых многообразий

№	Скобки Ли
$1.1^1.1$	$[e_1,u_1]=u_1,\ [e_1,u_3]=-u_3,\ [u_1,u_3]=u_2,\ [u_2,u_4]=u_2,\ [u_3,u_4]=u_3$
$1.1^1.2$	$[e_1,u_1]=u_1,\ [e_1,u_3]=-u_3,\ [u_2,u_4]=pu_2,\ [u_3,u_4]=u_3$
$1.1^1.3$	$[e_1,u_1]=u_1,\ [e_1,u_3]=-u_3,\ [u_1,u_3]=e_1+u_2$
$1.1^1.4$	$[e_1,u_1]=u_1,\ [e_1,u_3]=-u_3,\ [u_1,u_3]=u_2$
$1.1^1.5$	$[e_1,u_1]=u_1,\ [e_1,u_3]=-u_3,\ [u_1,u_3]=e_1,\ [u_2,u_4]=u_2$
$1.1^1.6$	$[e_1,u_1]=u_1,\ [e_1,u_3]=-u_3,\ [u_2,u_4]=u_2$
$1.1^1.7$	$[e_1,u_1]=u_1,\ [e_1,u_3]=-u_3,\ [u_1,u_3]=e_1$
$1.1^1.8$	$[e_1,u_1]=u_1,\ [e_1,u_2]=\frac{1}{2}u_2,\ [e_1,u_3]=-u_3,\ [e_1,u_4]=-\frac{1}{2}u_4,\ [u_1,u_3]=-2e_1,$ $[u_1,u_4]=u_2,\ [u_2,u_3]=u_4$
$1.1^1.9$	$[e_1,u_1]=u_1,\ [e_1,u_2]=\frac{1}{2}u_2,\ [e_1,u_3]=-u_3,\ [e_1,u_4]=-\frac{1}{2}u_4,\ [u_1,u_4]=u_2$
$1.1^1.10$	$[e_1,u_1]=u_1,\ [e_1,u_2]=\lambda u_2,\ [e_1,u_3]=-u_3,\ [e_1,u_4]=-\lambda u_4,\ \lambda\in[0,1]$
$1.1^2.1$	$[e_1,u_1]=u_3,\ [e_1,u_3]=-u_1,\ [u_1,u_3]=-u_2,\ [u_1,u_4]=u_1,\ [u_2,u_4]=2u_2,\ [u_3,u_4]=u_3$
$1.1^2.2$	$[e_1,u_1]=u_3,\ [e_1,u_3]=-u_1,\ [u_1,u_4]=u_1,\ [u_2,u_4]=pu_2,\ [u_3,u_4]=u_3$
$1.1^2.3$	$[e_1,u_1]=u_3,\ [e_1,u_3]=-u_1,\ [u_1,u_3]=e_1+u_2$
$1.1^2.4$	$[e_1,u_1]=u_3,\ [e_1,u_3]=-u_1,\ [u_1,u_3]=-e_1+u_2$
$1.1^2.5$	$[e_1,u_1]=u_3,\ [e_1,u_3]=-u_1,\ [u_1,u_3]=u_2$
$1.1^2.6$	$[e_1,u_1]=u_3,\ [e_1,u_3]=-u_1,\ [u_1,u_3]=e_1,\ [u_2,u_4]=u_2$
$1.1^2.7$	$[e_1,u_1]=u_3,\ [e_1,u_3]=-u_1,\ [u_1,u_3]=-e_1,\ [u_2,u_4]=u_2$
$1.1^2.8$	$[e_1,u_1]=u_3,\ [e_1,u_3]=-u_1,\ [u_2,u_4]=u_2$
$1.1^2.9$	$[e_1,u_1]=u_3,\ [e_1,u_3]=-u_1,\ [u_1,u_3]=e_1$
$1.1^2.10$	$[e_1,u_1]=u_3,\ [e_1,u_3]=-u_1,\ [u_1,u_3]=-e_1$
$1.1^2.11$	$[e_1,u_1]=u_3,\ [e_1,u_2]=\frac{1}{2}u_4,\ [e_1,u_3]=-u_1,\ [e_1,u_4]=-\frac{1}{2}u_2,\ [u_1,u_2]=u_2,$ $[u_1,u_3]=-4e_1,\ [u_1,u_4]=-u_4,\ [u_2,u_3]=-u_4,\ [u_3,u_4]=u_2$
$1.1^2.12$	$[e_1,u_1]=u_3,\ [e_1,u_2]=\lambda u_4,\ [e_1,u_3]=-u_1,\ [e_1,u_4]=-\lambda u_2,\ \lambda\in[0,1]$
$1.1^3.1$	$[e_1,u_1]=u_1,\ [e_1,u_2]=\lambda u_4,\ [e_1,u_3]=-u_3,\ [e_1,u_4]=-\lambda u_2,\ \lambda\in(0,1]$
$1.1^4.1$	$[e_1,u_1]=u_3,\ [e_1,u_2]=-\lambda u_2,\ [e_1,u_3]=-u_1,\ [e_1,u_4]=\lambda u_4,\ \lambda\in(0,1)$
$1.1^5.1$	$[e_1,u_1]=\cos(\varphi/2)u_1-\sin(\varphi/2)u_2,\ [e_1,u_2]=\cos(\varphi/2)u_2+\sin(\varphi/2)u_1,$ $[e_1,u_3]=-\cos(\varphi/2)u_3+\sin(\varphi/2)u_4,\ [e_1,u_4]=-\cos(\varphi/2)u_4-\sin(\varphi/2)u_3,\ \varphi\in(0,\pi/2]$
$1.1^6.1$	$[e_1,u_1]=-\cos(\varphi/2)u_2-\sin(\varphi/2)u_1,\ [e_1,u_2]=\cos(\varphi/2)u_1-\sin(\varphi/2)u_2,$ $[e_1,u_3]=-\cos(\varphi/2)u_4+\sin(\varphi/2)u_3,\ [e_1,u_4]=\cos(\varphi/2)u_3+\sin(\varphi/2)u_4,\ \varphi\in(0,\pi/2)$
$1.2^1.1$	$[e_1,u_1]=u_1,\ [e_1,u_2]=u_1+u_2,\ [e_1,u_3]=-u_3-u_4,\ [e_1,u_4]=-u_4$
$1.2^2.1$	$[e_1,u_1]=u_2,\ [e_1,u_2]=-u_1,\ [e_1,u_3]=u_2+u_4,\ [e_1,u_4]=-u_1-u_3$
$1.3^1.1$	$[e_1,u_1]=e_1,\ [e_1,u_3]=u_1,\ [e_1,u_4]=u_2,\ [u_1,u_2]=-\frac{1}{2}u_2,\ [u_1,u_3]=u_3,\ [u_1,u_4]=\frac{1}{2}u_4,$ $[u_2,u_3]=\frac{1}{2}u_4$
$1.3^1.2$	$[e_1,u_3]=u_1,\ [e_1,u_4]=u_2,\ [u_1,u_3]=-\lambda e_1+(\lambda+1)u_1+\lambda u_2,\ [u_2,u_4]=u_2,\ \lambda\in[-1,1]$
$1.3^1.3$	$[e_1,u_3]=u_1,\ [e_1,u_4]=u_2,\ [u_1,u_3]=u_1,\ [u_2,u_4]=u_2,\ [u_3,u_4]=e_1$
$1.3^1.4$	$[e_1,u_3]=u_1,\ [e_1,u_4]=u_2,\ [u_1,u_3]=-(1+\lambda^2)e_1+2\lambda u_1+(1+\lambda^2)u_2,\ [u_2,u_4]=u_2,\ \lambda\geqslant 0$
$1.3^1.5$	$[e_1,u_3]=u_1,\ [e_1,u_4]=u_2,\ [u_1,u_3]=-\frac{\lambda^2+\mu}{\mu-1}e_1+\frac{1+\lambda^2}{\mu-1}u_2,\ [u_1,u_4]=-\lambda e_1+u_1+\lambda u_2,$ $[u_2,u_3]=-\lambda e_1+u_1+\lambda u_2,\ [u_2,u_4]=-\mu e_1+(\mu+1)u_2,\ \lambda\geqslant 0,\ \mu\neq 1$
$1.3^1.6$	$[e_1,u_3]=u_1,\ [e_1,u_4]=u_2,\ [u_1,u_3]=-u_2,\ [u_1,u_4]=u_1,\ [u_2,u_3]=u_1,\ [u_2,u_4]=u_2,$ $[u_3,u_4]=e_1$
$1.3^1.7$	$[e_1,u_3]=u_1,\ [e_1,u_4]=u_2,\ [u_1,u_3]=\frac{1}{1+\lambda}e_1+\frac{\lambda}{1+\lambda}u_1-\frac{1}{1+\lambda}u_2,$ $[u_1,u_4]=-\frac{1}{1+\lambda}e_1+\frac{1}{1+\lambda}u_1+\frac{1}{1+\lambda}u_2,\ [u_2,u_3]=-\frac{1}{1+\lambda}e_1+\frac{1}{1+\lambda}u_1+\frac{1}{1+\lambda}u_2,$ $[u_2,u_4]=-\frac{\lambda}{1+\lambda}e_1+\frac{\lambda}{1+\lambda}u_1+\frac{1+2\lambda}{1+\lambda}u_2,\ \lambda\neq -1$
$1.3^1.8$	$[e_1,u_3]=u_1,\ [e_1,u_4]=u_2,\ [u_2,u_3]=u_1,\ [u_2,u_4]=u_2,\ [u_3,u_4]=-u_3$
$1.3^1.9$	$[e_1,u_3]=u_1,\ [e_1,u_4]=u_2,\ [u_2,u_3]=\lambda u_1,\ [u_2,u_4]=-\lambda e_1+(\lambda+1)u_2,\ [u_3,u_4]=-\lambda u_3$

Продолжение таблицы 3

$1.3^1.10$	$[e_1,u_3]=u_1,\ [e_1,u_4]=u_2,\ [u_2,u_4]=u_2,\ [u_3,u_4]=e_1$
$1.3^1.11$	$[e_1,u_3]=u_1,\ [e_1,u_4]=u_2,\ [u_2,u_3]=-u_1,\ [u_2,u_4]=e_1,\ [u_3,u_4]=e_1+u_3$
$1.3^1.12$	$[e_1,u_3]=u_1,\ [e_1,u_4]=u_2,\ [u_1,u_4]=u_1,\ [u_2,u_3]=\mu u_1,\ [u_2,u_4]=-\lambda\mu e_1+(\lambda+\mu)u_2,$ $[u_3,u_4]=(1-\mu)u_3$
$1.3^1.13$	$[e_1,u_3]=u_1,\ [e_1,u_4]=u_2,\ [u_1,u_4]=u_1,\ [u_2,u_3]=\frac{1}{2}u_1,\ [u_2,u_4]=-\frac{\lambda}{2}e_1+\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)u_2,$ $[u_3,u_4]=e_1+\frac{1}{2}u_3$
$1.3^1.14$	$[e_1,u_3]=u_1,\ [e_1,u_4]=u_2,\ [u_1,u_4]=u_1,\ [u_2,u_3]=(1-\lambda)u_1,\ [u_2,u_4]=\lambda(\lambda-1)e_1+u_2,$ $[u_3,u_4]=e_1+\lambda u_3,\ \lambda\neq\frac{1}{2}$
$1.3^1.15$	$[e_1,u_3]=u_1,\ [e_1,u_4]=u_2,\ [u_1,u_3]=-e_1+2u_1,\ [u_1,u_4]=u_2,\ [u_2,u_3]=u_2,$ $[u_2,u_4]=-e_1+u_1$
$1.3^1.16$	$[e_1,u_3]=u_1,\ [e_1,u_4]=u_2,\ [u_1,u_3]=-e_1+2u_1,\ [u_1,u_4]=u_2,\ [u_2,u_3]=u_2,$ $[u_2,u_4]=e_1-u_1$
$1.3^1.17$	$[e_1,u_3]=u_1,\ [e_1,u_4]=u_2,\ [u_2,u_4]=u_1,\ [u_3,u_4]=e_1$
$1.3^1.18$	$[e_1,u_3]=u_1,\ [e_1,u_4]=u_2,\ [u_2,u_4]=u_1$
$1.3^1.19$	$[e_1,u_3]=u_1,\ [e_1,u_4]=u_2,\ [u_1,u_4]=u_1,\ [u_2,u_3]=u_1,\ [u_2,u_4]=-e_1+u_1+2u_2$
$1.3^1.20$	$[e_1,u_3]=u_1,\ [e_1,u_4]=u_2,\ [u_2,u_3]=u_1,\ [u_2,u_4]=u_2-u_1,\ [u_3,u_4]=-u_3$
$1.3^1.21$	$[e_1,u_3]=u_1,\ [e_1,u_4]=u_2,\ [u_1,u_4]=u_1,\ [u_2,u_3]=\lambda u_1,$ $[u_2,u_4]=-\lambda e_1+(1-\lambda)u_1+(1+\lambda)u_2,\ [u_3,u_4]=(1-\lambda)u_3,\ \lambda\neq 1$
$1.3^1.22$	$[e_1,u_3]=u_1,\ [e_1,u_4]=u_2,\ [u_1,u_4]=u_1,\ [u_2,u_3]=\frac{1}{2}u_1,\ [u_2,u_4]=-\frac{1}{2}e_1+\frac{1}{2}u_1+\frac{3}{2}u_2,$ $[u_3,u_4]=e_1+\frac{1}{2}u_3$
$1.3^1.23$	$[e_1,u_3]=u_1,\ [e_1,u_4]=u_2,\ [u_1,u_4]=u_1,\ [u_2,u_4]=u_1+u_2,\ [u_3,u_4]=e_1+u_3$
$1.3^1.24$	$[e_1,u_3]=u_1,\ [e_1,u_4]=u_2,\ [u_1,u_3]=(1-2\lambda)e_1+2\lambda u_1,\ [u_1,u_4]=(2\lambda-1)u_2,$ $[u_2,u_3]=\lambda u_2,\ [u_2,u_4]=\frac{2\lambda-1}{2\lambda-2}e_1-\frac{1}{2\lambda-2}u_1,\ [u_3,u_4]=(\lambda-1)u_4,\ \lambda\neq 1$
$1.3^1.25$	$[e_1,u_3]=u_1,\ [e_1,u_4]=u_2,\ [u_1,u_3]=(1-2\lambda)e_1+2\lambda u_1,\ [u_1,u_4]=(2\lambda-1)u_2,$ $[u_2,u_3]=\lambda u_2,\ [u_2,u_4]=\frac{1-2\lambda}{2\lambda-2}e_1+\frac{1}{2\lambda-2}u_1,\ [u_3,u_4]=(\lambda-1)u_4,\ \lambda\neq 1$
$1.3^1.26$	$[e_1,u_3]=u_1,\ [e_1,u_4]=u_2,\ [u_1,u_3]=-\frac{1}{3}e_1+\frac{4}{3}u_1,\ [u_1,u_4]=\frac{1}{3}u_2,\ [u_2,u_3]=\frac{2}{3}u_2,$ $[u_2,u_4]=-\frac{1}{2}e_1+\frac{3}{2}u_1,\ [u_3,u_4]=e_1-\frac{1}{3}u_4$
$1.3^1.27$	$[e_1,u_3]=u_1,\ [e_1,u_4]=u_2,\ [u_1,u_3]=-\frac{1}{3}e_1+\frac{4}{3}u_1,\ [u_1,u_4]=\frac{1}{3}u_2,\ [u_2,u_3]=\frac{2}{3}u_2,$ $[u_2,u_4]=\frac{1}{2}e_1-\frac{3}{2}2u_1,\ [u_3,u_4]=e_1-\frac{1}{3}u_4$
$1.3^1.28$	$[e_1,u_3]=u_1,\ [e_1,u_4]=u_2,\ [u_1,u_3]=2u_1,\ [u_1,u_4]=2u_2,\ [u_2,u_3]=u_2,\ [u_2,u_4]=e_1-\frac{1}{2}u_1,$ $[u_3,u_4]=u_4$
$1.3^1.29$	$[e_1,u_3]=u_1,\ [e_1,u_4]=u_2,\ [u_1,u_3]=2u_1,\ [u_1,u_4]=2u_2,\ [u_2,u_3]=u_2,$ $[u_2,u_4]=-e_1+\frac{1}{2}u_1,\ [u_3,u_4]=u_4$
$1.3^1.30$	$[e_1,u_3]=u_1,\ [e_1,u_4]=u_2,\ [u_1,u_3]=\frac{\lambda\mu(\lambda-1)}{\lambda+\mu-\lambda\mu}e_1+\frac{\lambda^2+\mu-\lambda^2\mu}{\lambda+\mu-\lambda\mu}u_1+\frac{\lambda(1-\lambda)}{\lambda+\mu-\lambda\mu}u_2,$ $[u_1,u_4]=-\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu-\lambda\mu}e_1+\frac{\mu}{\lambda+\mu-\lambda\mu}u_1+\frac{\lambda}{\lambda+\mu-\lambda\mu}u_2,$ $[u_2,u_3]=-\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu-\lambda\mu}e_1+\frac{\mu}{\lambda+\mu-\lambda\mu}u_1+\frac{\lambda}{\lambda+\mu-\lambda\mu}u_2,$ $[u_2,u_4]=\frac{\lambda\mu(\mu-1)}{\lambda+\mu-\lambda\mu}e_1+\frac{\mu(1-\mu)}{\lambda+\mu-\lambda\mu}u_1+\frac{\lambda+\mu^2-\mu^2\lambda}{\lambda+\mu-\lambda\mu}u_2,\ \lambda+\mu-\lambda\mu\neq 0,\ 1\leqslant\mu\leqslant\lambda,\ \lambda\mu>0$
$1.3^1.31$	$[e_1,u_3]=u_1,\ [e_1,u_4]=u_2,\ [u_3,u_4]=e_1$
$1.3^1.32$	$[e_1,u_3]=u_1,\ [e_1,u_4]=u_2$
$1.4^1.1$	$[e_1,u_2]=u_1,\ [e_1,u_3]=u_2,\ [e_1,u_4]=e_1,\ [u_1,u_2]=u_1,\ [u_1,u_3]=u_2,\ [u_1,u_4]=u_1,$ $[u_2,u_3]=u_3,\ [u_3,u_4]=-u_3$
$1.4^1.2$	$[e_1,u_2]=u_1,\ [e_1,u_3]=u_2,\ [e_1,u_4]=e_1,\ [u_1,u_4]=pu_1,\ [u_2,u_4]=(p-1)u_2,$ $[u_3,u_4]=(p-2)u_3$
$1.4^1.3$	$[e_1,u_2]=u_1,\ [e_1,u_3]=u_2,\ [e_1,u_4]=e_1,\ [u_1,u_4]=2u_1,\ [u_2,u_3]=e_1,\ [u_2,u_4]=u_2$
$1.4^1.4$	$[e_1,u_2]=u_1,\ [e_1,u_3]=u_2,\ [e_1,u_4]=e_1,\ [u_1,u_4]=2u_1,\ [u_2,u_3]=-e_1,\ [u_2,u_4]=u_2$
$1.4^1.5$	$[e_1,u_2]=u_1,\ [e_1,u_3]=u_2,\ [u_1,u_2]=u_1,\ [u_1,u_3]=u_2,\ [u_2,u_3]=u_3$
$1.4^1.6$	$[e_1,u_2]=u_1,\ [e_1,u_3]=u_2,\ [u_1,u_4]=u_1,\ [u_2,u_4]=u_2,\ [u_3,u_4]=u_1+u_3$
$1.4^1.7$	$[e_1,u_2]=u_1,\ [e_1,u_3]=u_2,\ [u_1,u_4]=u_1,\ [u_2,u_4]=u_2,\ [u_3,u_4]=-u_1+u_3$
$1.4^1.8$	$[e_1,u_2]=u_1,\ [e_1,u_3]=u_2,\ [u_1,u_4]=u_1,\ [u_2,u_4]=u_2,\ [u_3,u_4]=u_3$

Продолжение таблицы 3

$1.4^1.9$	$[e_1,u_2]=u_1,\ [e_1,u_3]=u_2,\ [u_1,u_3]=u_1,\ [u_2,u_3]=re_1+u_2+u_4,\ [u_3,u_4]=pu_4$
$1.4^1.10$	$[e_1,u_2]=u_1,\ [e_1,u_3]=u_2,\ [u_1,u_3]=u_1,\ [u_2,u_3]=re_1+u_2,\ [u_3,u_4]=pu_4$
$1.4^1.11$	$[e_1,u_2]=u_1,\ [e_1,u_3]=u_2,\ [u_1,u_3]=u_1,\ [u_2,u_3]=re_1+u_2+u_4,\ [u_3,u_4]=u_1-u_4$
$1.4^1.12$	$[e_1,u_2]=u_1,\ [e_1,u_3]=u_2,\ [u_1,u_3]=u_1,\ [u_2,u_3]=re_1+u_2,\ [u_3,u_4]=u_1-u_4$
$1.4^1.13$	$[e_1,u_2]=u_1,\ [e_1,u_3]=u_2,\ [u_2,u_3]=re_1+u_4,\ [u_3,u_4]=u_4$
$1.4^1.14$	$[e_1,u_2]=u_1,\ [e_1,u_3]=u_2,\ [u_2,u_3]=re_1,\ [u_3,u_4]=u_4$
$1.4^1.15$	$[e_1,u_2]=u_1,\ [e_1,u_3]=u_2,\ [u_2,u_3]=e_1+u_4,\ [u_3,u_4]=u_1$
$1.4^1.16$	$[e_1,u_2]=u_1,\ [e_1,u_3]=u_2,\ [u_2,u_3]=-e_1+u_4,\ [u_3,u_4]=u_1$
$1.4^1.17$	$[e_1,u_2]=u_1,\ [e_1,u_3]=u_2,\ [u_2,u_3]=u_4,\ [u_3,u_4]=u_1$
$1.4^1.18$	$[e_1,u_2]=u_1,\ [e_1,u_3]=u_2,\ [u_2,u_3]=e_1+u_4$
$1.4^1.19$	$[e_1,u_2]=u_1,\ [e_1,u_3]=u_2,\ [u_2,u_3]=-e_1+u_4$
$1.4^1.20$	$[e_1,u_2]=u_1,\ [e_1,u_3]=u_2,\ [u_2,u_3]=u_4$
$1.4^1.21$	$[e_1,u_2]=u_1,\ [e_1,u_3]=u_2,\ [u_2,u_3]=e_1,\ [u_3,u_4]=u_1$
$1.4^1.22$	$[e_1,u_2]=u_1,\ [e_1,u_3]=u_2,\ [u_2,u_3]=-e_1,\ [u_3,u_4]=u_1$
$1.4^1.23$	$[e_1,u_2]=u_1,\ [e_1,u_3]=u_2,\ [u_3,u_4]=u_1$
$1.4^1.24$	$[e_1,u_2]=u_1,\ [e_1,u_3]=u_2,\ [u_2,u_3]=e_1$
$1.4^1.25$	$[e_1,u_2]=u_1,\ [e_1,u_3]=u_2,\ [u_2,u_3]=-e_1$
$1.4^1.26$	$[e_1,u_2]=u_1,\ [e_1,u_3]=u_2$
$2.1^1.1$	$[e_1,u_1]=u_1,\ [e_1,u_3]=-u_3,\ [e_2,u_2]=u_2,\ [e_2,u_4]=-u_4,\ [u_1,u_3]=e_1,\ [u_2,u_4]=e_2$
$2.1^1.2$	$[e_1,u_1]=u_1,\ [e_1,u_3]=-u_3,\ [e_2,u_2]=u_2,\ [e_2,u_4]=-u_4,\ [u_1,u_3]=e_1$
$2.1^1.3$	$[e_1,u_1]=u_1,\ [e_1,u_3]=-u_3,\ [e_2,u_2]=u_2,\ [e_2,u_4]=-u_4$
$2.1^2.1$	$[e_1,u_1]=u_1,\ [e_1,u_3]=-u_3,\ [e_2,u_2]=u_4,\ [e_2,u_4]=-u_2,\ [u_1,u_3]=e_1,\ [u_2,u_4]=e_2$
$2.1^2.2$	$[e_1,u_1]=u_1,\ [e_1,u_3]=-u_3,\ [e_2,u_2]=u_4,\ [e_2,u_4]=-u_2,\ [u_1,u_3]=e_1,\ [u_2,u_4]=-e_2$
$2.1^2.3$	$[e_1,u_1]=u_1,\ [e_1,u_3]=-u_3,\ [e_2,u_2]=u_4,\ [e_2,u_4]=-u_2,\ [u_1,u_3]=e_1$
$2.1^2.4$	$[e_1,u_1]=u_1,\ [e_1,u_3]=-u_3,\ [e_2,u_2]=u_4,\ [e_2,u_4]=-u_2,\ [u_2,u_4]=e_2$
$2.1^2.5$	$[e_1,u_1]=u_1,\ [e_1,u_3]=-u_3,\ [e_2,u_2]=u_4,\ [e_2,u_4]=-u_2,\ [u_2,u_4]=-e_2$
$2.1^2.6$	$[e_1,u_1]=u_1,\ [e_1,u_3]=-u_3,\ [e_2,u_2]=u_4,\ [e_2,u_4]=-u_2$
$2.1^3.1$	$[e_1,u_1]=u_3,\ [e_1,u_3]=-u_1,\ [e_2,u_2]=u_4,\ [e_2,u_4]=-u_2,\ [u_1,u_3]=e_1,\ [u_2,u_4]=e_2$
$2.1^3.2$	$[e_1,u_1]=u_3,\ [e_1,u_3]=-u_1,\ [e_2,u_2]=u_4,\ [e_2,u_4]=-u_2,\ [u_1,u_3]=e_1,\ [u_2,u_4]=-e_2$
$2.1^3.3$	$[e_1,u_1]=u_3,\ [e_1,u_3]=-u_1,\ [e_2,u_2]=u_4,\ [e_2,u_4]=-u_2,\ [u_1,u_3]=-e_1,\ [u_2,u_4]=-e_2$
$2.1^3.4$	$[e_1,u_1]=u_3,\ [e_1,u_3]=-u_1,\ [e_2,u_2]=u_4,\ [e_2,u_4]=-u_2,\ [u_1,u_3]=e_1$
$2.1^3.5$	$[e_1,u_1]=u_3,\ [e_1,u_3]=-u_1,\ [e_2,u_2]=u_4,\ [e_2,u_4]=-u_2,\ [u_1,u_3]=-e_1$
$2.1^3.6$	$[e_1,u_1]=u_3,\ [e_1,u_3]=-u_1,\ [e_2,u_2]=u_4,\ [e_2,u_4]=-u_2$
$2.1^4.1$	$[e_1,u_1]=u_1,\ [e_1,u_2]=u_2,\ [e_1,u_3]=-u_3,\ [e_1,u_4]=-u_4,\ [e_2,u_1]=u_2,\ [e_2,u_2]=-u_1,$ $[e_2,u_3]=-u_4,\ [e_2,u_4]=u_3,\ [u_1,u_3]=e_1,\ [u_1,u_4]=e_2,\ [u_2,u_3]=e_2,\ [u_2,u_4]=-e_1$
$2.1^4.2$	$[e_1,u_1]=u_1,\ [e_1,u_2]=u_2,\ [e_1,u_3]=-u_3,\ [e_1,u_4]=-u_4,\ [e_2,u_1]=u_2,\ [e_2,u_2]=-u_1,$ $[e_2,u_3]=-u_4,\ [e_2,u_4]=u_3$
$2.2^1.1$	$[e_1,e_2]=e_2,\ [e_1,u_1]=u_1,\ [e_1,u_3]=-u_3,\ [e_2,u_2]=u_1,\ [e_2,u_3]=-u_4,\ [e_2,u_4]=-2e_2,$ $[u_1,u_3]=u_2,\ [u_1,u_4]=-u_1,\ [u_2,u_4]=u_2,\ [u_3,u_4]=2u_3$
$2.2^1.2$	$[e_1,e_2]=e_2,\ [e_1,u_1]=u_1,\ [e_1,u_3]=-u_3,\ [e_2,u_2]=u_1,\ [e_2,u_3]=-u_4,\ [u_1,u_2]=e_2,$ $[u_1,u_3]=u_4,\ [u_2,u_3]=(p-1)u_3,\ [u_2,u_4]=pu_4$
$2.2^1.3$	$[e_1,e_2]=e_2,\ [e_1,u_1]=u_1,\ [e_1,u_3]=-u_3,\ [e_2,u_2]=u_1,\ [e_2,u_3]=-u_4,\ [u_2,u_3]=u_3,$ $[u_2,u_4]=u_4$
$2.2^1.4$	$[e_1,u_1]=u_1,\ [e_1,u_2]=u_2,\ [e_1,u_3]=-u_3,\ [e_1,u_4]=-u_4,\ [e_2,u_2]=u_1,\ [e_2,u_3]=-u_4,$ $[u_1,u_3]=e_2,\ [u_2,u_3]=e_1,\ [u_2,u_4]=e_2$
$2.2^1.5$	$[e_1,u_1]=u_1,\ [e_1,u_2]=u_2,\ [e_1,u_3]=-u_3,\ [e_1,u_4]=-u_4,\ [e_2,u_2]=u_1,\ [e_2,u_3]=-u_4,$ $[u_2,u_3]=e_2$
$2.2^1.6$	$[e_1,e_2]=\frac{3}{2}e_2,\ [e_1,u_1]=u_1,\ [e_1,u_2]=-\frac{1}{2}u_2,\ [e_1,u_3]=-u_3,\ [e_1,u_4]=\frac{1}{2}u_4,\ [e_2,u_2]=u_1,$ $[e_2,u_3]=-u_4,\ [u_1,u_2]=u_4$

Продолжение таблицы 3

$2.2^1.7$	$[e_1,e_2]=(1-\lambda)e_2,\ [e_1,u_1]=u_1,\ [e_1,u_2]=\lambda u_2,\ [e_1,u_3]=-u_3,\ [e_1,u_4]=-\lambda u_4,$ $[e_2,u_2]=u_1,\ [e_2,u_3]=-u_4,\ \lambda\in[-1,1]$
$2.2^2.1$	$[e_1,u_1]=u_2,\ [e_1,u_2]=-u_1,\ [e_1,u_3]=u_4,\ [e_1,u_4]=-u_3,\ [e_2,u_3]=u_1,\ [e_2,u_4]=u_2,$ $[u_1,u_3]=e_2,\ [u_2,u_4]=e_2,\ [u_3,u_4]=-e_1$
$2.2^2.2$	$[e_1,u_1]=u_2,\ [e_1,u_2]=-u_1,\ [e_1,u_3]=u_4,\ [e_1,u_4]=-u_3,\ [e_2,u_3]=u_1,\ [e_2,u_4]=u_2,$ $[u_1,u_3]=-e_2,\ [u_2,u_4]=-e_2,\ [u_3,u_4]=e_1$
$2.2^2.3$	$[e_1,u_1]=u_2,\ [e_1,u_2]=-u_1,\ [e_1,u_3]=u_4,\ [e_1,u_4]=-u_3,\ [e_2,u_3]=u_1,\ [e_2,u_4]=u_2,$ $[u_3,u_4]=e_2$
$2.2^2.4$	$[e_1,u_1]=u_2,\ [e_1,u_2]=-u_1,\ [e_1,u_3]=u_4,\ [e_1,u_4]=-u_3,\ [e_2,u_3]=u_1,\ [e_2,u_4]=u_2$
$2.2^3.1$	$[e_1,e_2]=-2\sin(\varphi/2)e_2,\ [e_1,u_1]=-\sin(\varphi/2)u_1-\cos(\varphi/2)u_2,$ $[e_1,u_2]=-\sin(\varphi/2)u_2+\cos(\varphi/2)u_1,\ [e_1,u_3]=\sin(\varphi/2)u_3-\cos(\varphi/2)u_4,$ $[e_1,u_4]=\sin(\varphi/2)u_4+\cos(\varphi/2)u_3,\ [e_2,u_3]=u_1,\ [e_2,u_4]=u_2,\ \varphi\in(0,\pi)$
$2.3^1.1$	$[e_1,e_2]=2e_2,\ [e_1,u_1]=u_1,\ [e_1,u_2]=-u_2,\ [e_1,u_3]=-u_2-u_3,\ [e_1,u_4]=u_1+u_4,$ $[e_2,u_2]=u_1,\ [e_2,u_3]=-u_4$
$2.4^1.1$	$[e_1,e_2]=e_2,\ [e_1,u_1]=u_1,\ [e_1,u_3]=-u_3,\ [e_2,u_2]=u_1,\ [e_2,u_3]=u_2,\ [u_1,u_2]=u_1,$ $[u_1,u_3]=u_2,\ [u_2,u_3]=u_3$
$2.4^1.2$	$[e_1,e_2]=e_2,\ [e_1,u_1]=u_1,\ [e_1,u_3]=-u_3,\ [e_2,u_2]=u_1,\ [e_2,u_3]=u_2,\ [u_1,u_4]=u_1,$ $[u_2,u_4]=u_2,\ [u_3,u_4]=u_3$
$2.4^1.3$	$[e_1,e_2]=e_2,\ [e_1,u_1]=u_1,\ [e_1,u_3]=-u_3,\ [e_2,u_2]=u_1,\ [e_2,u_3]=u_2$
$2.5^1.1$	$[e_1,u_2]=u_1,\ [e_1,u_3]=-u_4,\ [e_1,u_4]=-2e_1,\ [e_2,u_2]=-2e_2,\ [e_2,u_3]=-u_2,\ [e_2,u_4]=u_1,$ $[u_1,u_2]=2e_2-u_1,\ [u_1,u_3]=u_2+u_4,\ [u_1,u_4]=2e_1-u_1,\ [u_2,u_3]=-2u_3,$ $[u_2,u_4]=u_2-u_4,\ [u_3,u_4]=2u_3$
$2.5^1.2$	$[e_1,u_2]=u_1,\ [e_1,u_3]=-u_4,\ [e_2,u_2]=-2e_2,\ [e_2,u_3]=-u_2,\ [e_2,u_4]=u_1,\ [u_1,u_2]=-u_1,$ $[u_1,u_3]=u_4,\ [u_2,u_3]=-2u_3,\ [u_2,u_4]=-u_4$
$2.5^1.3$	$[e_1,u_2]=u_1,\ [e_1,u_3]=-u_4,\ [e_2,u_3]=-u_2,\ [e_2,u_4]=u_1,\ [u_1,u_3]=u_1,$ $[u_2,u_3]=e_1+pe_2+(1-q)u_2,\ [u_2,u_4]=qu_1,\ [u_3,u_4]=-(p+q)e_1+\lambda e_2-(1+q)u_4,$ $q\geqslant 0\ (if\ \lambda\neq 0),\ q\in\mathbb{R}\ (if\ \lambda=0)$
$2.5^1.4$	$[e_1,u_2]=u_1,\ [e_1,u_3]=-u_4,\ [e_2,u_3]=-u_2,\ [e_2,u_4]=u_1,\ [u_1,u_3]=u_1,$ $[u_2,u_3]=qe_2+(1-p)u_2,\ [u_2,u_4]=pu_1,\ [u_3,u_4]=-(p+q)e_1-(1+p)u_4,\ p\geqslant 0$
$2.5^1.5$	$[e_1,u_2]=u_1,\ [e_1,u_3]=-u_4,\ [e_2,u_3]=-u_2,\ [e_2,u_4]=u_1,\ [u_2,u_3]=e_1+qe_2-u_2,$ $[u_2,u_4]=u_1,\ [u_3,u_4]=-qe_1-\lambda e_2-u_4$
$2.5^1.6$	$[e_1,u_2]=u_1,\ [e_1,u_3]=-u_4,\ [e_2,u_3]=-u_2,\ [e_2,u_4]=u_1,\ [u_2,u_3]=qe_2-u_2,$ $[u_2,u_4]=u_1,\ [u_3,u_4]=-qe_1-u_4$
$2.5^1.7$	$[e_1,u_2]=u_1,\ [e_1,u_3]=-u_4,\ [e_2,u_3]=-u_2,\ [e_2,u_4]=u_1,\ [u_2,u_3]=e_1+e_2,$ $[u_3,u_4]=-e_1+\lambda e_2$
$2.5^1.8$	$[e_1,u_2]=u_1,\ [e_1,u_3]=-u_4,\ [e_2,u_3]=-u_2,\ [e_2,u_4]=u_1,\ [u_2,u_3]=e_1-e_2,$ $[u_3,u_4]=e_1+\lambda e_2$
$2.5^1.9$	$[e_1,u_2]=u_1,\ [e_1,u_3]=-u_4,\ [e_2,u_3]=-u_2,\ [e_2,u_4]=u_1,\ [u_2,u_3]=e_2,\ [u_3,u_4]=-e_1$
$2.5^1.10$	$[e_1,u_2]=u_1,\ [e_1,u_3]=-u_4,\ [e_2,u_3]=-u_2,\ [e_2,u_4]=u_1,\ [u_2,u_3]=-e_2,\ [u_3,u_4]=e_1$
$2.5^1.11$	$[e_1,u_2]=u_1,\ [e_1,u_3]=-u_4,\ [e_2,u_3]=-u_2,\ [e_2,u_4]=u_1,\ [u_2,u_3]=e_1,\ [u_3,u_4]=e_2$
$2.5^1.12$	$[e_1,u_2]=u_1,\ [e_1,u_3]=-u_4,\ [e_2,u_3]=-u_2,\ [e_2,u_4]=u_1,\ [u_2,u_3]=e_1,\ [u_3,u_4]=-e_2$
$2.5^1.13$	$[e_1,u_2]=u_1,\ [e_1,u_3]=-u_4,\ [e_2,u_3]=-u_2,\ [e_2,u_4]=u_1,\ [u_2,u_3]=e_1$
$2.5^1.14$	$[e_1,u_2]=u_1,\ [e_1,u_3]=-u_4,\ [e_2,u_3]=-u_2,\ [e_2,u_4]=u_1$
$2.5^2.1$	$[e_1,u_2]=-e_1+u_1,\ [e_1,u_3]=-u_2,\ [e_1,u_4]=e_2,\ [e_2,u_2]=-e_2,\ [e_2,u_3]=u_4,$ $[e_2,u_4]=-e_1-u_1,\ [u_1,u_2]=e_1-u_1,\ [u_1,u_3]=u_2,\ [u_1,u_4]=-e_2,\ [u_2,u_3]=-2u_3,$ $[u_2,u_4]=-u_4$
$2.5^2.2$	$[e_1,u_2]=u_1,\ [e_1,u_3]=-u_2,\ [e_2,u_3]=u_4,\ [e_2,u_4]=-u_1,\ [u_1,u_3]=u_1,$ $[u_2,u_3]=(p+s)e_1+re_2+u_2-2ru_4,\ [u_2,u_4]=2ru_1,$ $[u_3,u_4]=-re_1+(p-s)e_2-2ru_2-u_4,\ r\geqslant 0,\ s\geqslant 0$
$2.5^2.3$	$[e_1,u_2]=u_1,\ [e_1,u_3]=-u_2,\ [e_2,u_3]=u_4,\ [e_2,u_4]=-u_1,\ [u_2,u_3]=-(r+s)e_1-u_4,$ $[u_2,u_4]=u_1,\ [u_3,u_4]=(s-r)e_2-u_2,\ s\geqslant 0$

Продолжение таблицы 3

$2.5^2.4$	$[e_1,u_2]=u_1,\ [e_1,u_3]=-u_2,\ [e_2,u_3]=u_4,\ [e_2,u_4]=-u_1,\ [u_2,u_3]=(1+s)e_1,$ $[u_3,u_4]=(1-s)e_2,\ s\geqslant 0$
$2.5^2.5$	$[e_1,u_2]=u_1,\ [e_1,u_3]=-u_2,\ [e_2,u_3]=u_4,\ [e_2,u_4]=-u_1,\ [u_2,u_3]=-(1+s)e_1,$ $[u_3,u_4]=(s-1)e_2,\ s\geqslant 0$
$2.5^2.6$	$[e_1,u_2]=u_1,\ [e_1,u_3]=-u_2,\ [e_2,u_3]=u_4,\ [e_2,u_4]=-u_1,\ [u_2,u_3]=e_2,\ [u_3,u_4]=e_1$
$2.5^2.7$	$[e_1,u_2]=u_1,\ [e_1,u_3]=-u_2,\ [e_2,u_3]=u_4,\ [e_2,u_4]=-u_1$
$3.1^1.1$	$[e_1,e_3]=e_3,\ [e_2,e_3]=-e_3,\ [e_1,u_1]=u_1,\ [e_1,u_3]=-u_3,\ [e_2,u_2]=u_2,\ [e_2,u_4]=-u_4,$ $[e_3,u_2]=u_1,\ [e_3,u_3]=-u_4$
$3.1^2.1$	$[e_1,e_3]=2e_3,\ [e_1,u_1]=u_1,\ [e_1,u_2]=u_2,\ [e_1,u_3]=-u_3,\ [e_1,u_4]=-u_4,\ [e_2,u_1]=u_2,$ $[e_2,u_2]=-u_1,\ [e_2,u_3]=u_4,\ [e_2,u_4]=-u_3,\ [e_3,u_3]=u_1,\ [e_3,u_4]=u_2$
$3.2^1.1$	$[e_1,e_2]=e_2,\ [e_1,e_3]=e_3,\ [e_1,u_1]=u_1,\ [e_1,u_3]=-u_3,\ [e_2,u_2]=u_1,\ [e_2,u_3]=-u_4,$ $[e_2,u_4]=-2e_2,\ [e_3,u_2]=-2e_3,\ [e_3,u_3]=-u_2,\ [e_3,u_4]=u_1,\ [u_1,u_2]=2e_3-u_1,$ $[u_1,u_3]=u_2+u_4,\ [u_1,u_4]=2e_2-u_1,\ [u_2,u_3]=-2u_3,\ [u_2,u_4]=u_2-u_4,\ [u_3,u_4]=2u_3$
$3.2^1.2$	$[e_1,e_2]=e_2,\ [e_1,e_3]=e_3,\ [e_1,u_1]=u_1,\ [e_1,u_3]=-u_3,\ [e_2,u_2]=u_1,\ [e_2,u_3]=-u_4,$ $[e_2,u_4]=-2e_2,\ [e_3,u_3]=-u_2,\ [e_3,u_4]=u_1,\ [u_1,u_3]=u_2,\ [u_1,u_4]=-u_1,\ [u_2,u_4]=u_2,$ $[u_3,u_4]=2u_3$
$3.2^1.3$	$[e_1,e_3]=2e_3,\ [e_1,u_1]=u_1,\ [e_1,u_2]=u_2,\ [e_1,u_3]=-u_3,\ [e_1,u_4]=-u_4,\ [e_2,u_2]=u_1,$ $[e_2,u_3]=-u_4,\ [e_3,u_3]=-u_2,\ [e_3,u_4]=u_1,\ [u_2,u_3]=e_2$
$3.2^1.4$	$[e_1,e_2]=(1-\lambda)e_2,\ [e_1,e_3]=(1+\lambda)e_3,\ [e_1,u_1]=u_1,\ [e_1,u_2]=\lambda u_2,\ [e_1,u_3]=-u_3,$ $[e_1,u_4]=-\lambda u_4,\ [e_2,u_2]=u_1,\ [e_2,u_3]=-u_4,\ [e_3,u_3]=-u_2,\ [e_3,u_4]=u_1,\ \lambda\geqslant 0$
$3.2^2.1$	$[e_1,e_2]=e_2,\ [e_1,e_3]=e_3,\ [e_1,u_1]=u_1,\ [e_1,u_3]=-u_3,\ [e_2,u_2]=-e_2+u_1,\ [e_2,u_3]=-u_2,$ $[e_2,u_4]=e_3,\ [e_3,u_2]=-e_3,\ [e_3,u_3]=u_4,\ [e_3,u_4]=-e_2-u_1,\ [u_1,u_2]=e_2-u_1,$ $[u_1,u_3]=u_2,\ [u_1,u_4]=-e_3,\ [u_2,u_3]=-2u_3,\ [u_2,u_4]=-u_4$
$3.2^2.2$	$[e_1,e_2]=e_2-\lambda e_3,\ [e_1,e_3]=e_3+\lambda e_2,\ [e_1,u_1]=u_1,\ [e_1,u_2]=\lambda u_4,\ [e_1,u_3]=-u_3,$ $[e_1,u_4]=-\lambda u_2,\ [e_2,u_2]=u_1,\ [e_2,u_3]=-u_2,\ [e_3,u_3]=u_4,\ [e_3,u_4]=-u_1,\ \lambda\geqslant 0$
$3.3^1.1$	$[e_1,e_2]=-e_2,\ [e_1,e_3]=e_3,\ [e_1,u_2]=u_2,\ [e_1,u_4]=-u_4,\ [e_2,u_2]=u_1,\ [e_2,u_3]=-u_4,$ $[e_3,u_3]=-u_2,\ [e_3,u_4]=u_1,\ [u_1,u_3]=u_1,\ [u_2,u_3]=pe_3+u_2,\ [u_3,u_4]=-pe_2-u_4$
$3.3^1.2$	$[e_1,e_2]=-e_2,\ [e_1,e_3]=e_3,\ [e_1,u_2]=u_2,\ [e_1,u_4]=-u_4,\ [e_2,u_2]=u_1,\ [e_2,u_3]=-u_4,$ $[e_3,u_3]=-u_2,\ [e_3,u_4]=u_1,\ [u_2,u_3]=e_3,\ [u_3,u_4]=-e_2$
$3.3^1.3$	$[e_1,e_2]=-e_2,\ [e_1,e_3]=e_3,\ [e_1,u_2]=u_2,\ [e_1,u_4]=-u_4,\ [e_2,u_2]=u_1,\ [e_2,u_3]=-u_4,$ $[e_3,u_3]=-u_2,\ [e_3,u_4]=u_1,\ [u_2,u_3]=-e_3,\ [u_3,u_4]=e_2$
$3.3^1.4$	$[e_1,e_2]=-e_2,\ [e_1,e_3]=e_3,\ [e_1,u_2]=u_2,\ [e_1,u_4]=-u_4,\ [e_2,u_2]=u_1,\ [e_2,u_3]=-u_4,$ $[e_3,u_3]=-u_2,\ [e_3,u_4]=u_1$
$3.3^2.1$	$[e_1,e_2]=-e_3,\ [e_1,e_3]=e_2,\ [e_1,u_2]=u_4,\ [e_1,u_4]=-u_2,\ [e_2,u_2]=u_1,\ [e_2,u_3]=-u_2,$ $[e_3,u_3]=u_4,\ [e_3,u_4]=-u_1,\ [u_1,u_3]=u_1,\ [u_2,u_3]=pe_2+u_2,\ [u_3,u_4]=pe_3-u_4$
$3.3^2.2$	$[e_1,e_2]=-e_3,\ [e_1,e_3]=e_2,\ [e_1,u_2]=u_4,\ [e_1,u_4]=-u_2,\ [e_2,u_2]=u_1,\ [e_2,u_3]=-u_2,$ $[e_3,u_3]=u_4,\ [e_3,u_4]=-u_1,\ [u_2,u_3]=e_2,\ [u_3,u_4]=e_3$
$3.3^2.3$	$[e_1,e_2]=-e_3,\ [e_1,e_3]=e_2,\ [e_1,u_2]=u_4,\ [e_1,u_4]=-u_2,\ [e_2,u_2]=u_1,\ [e_2,u_3]=-u_2,$ $[e_3,u_3]=u_4,\ [e_3,u_4]=-u_1,\ [u_2,u_3]=-e_2,\ [u_3,u_4]=-e_3$
$3.3^2.4$	$[e_1,e_2]=-e_3,\ [e_1,e_3]=e_2,\ [e_1,u_2]=u_4,\ [e_1,u_4]=-u_2,\ [e_2,u_2]=u_1,\ [e_2,u_3]=-u_2,$ $[e_3,u_3]=u_4,\ [e_3,u_4]=-u_1$
$3.4^1.1$	$[e_1,e_2]=2e_2,\ [e_1,e_3]=-2e_3,\ [e_1,u_1]=u_1,\ [e_1,u_2]=-u_2,\ [e_1,u_3]=-u_3,\ [e_1,u_4]=u_4,$ $[e_2,e_3]=e_1,\ [e_2,u_2]=u_1,\ [e_2,u_3]=-u_4,\ [e_3,u_1]=u_2,\ [e_3,u_4]=-u_3$
$3.4^2.1$	$[e_1,e_2]=2e_3,\ [e_1,e_3]=-2e_2,\ [e_1,u_1]=u_3,\ [e_1,u_2]=-u_4,\ [e_1,u_3]=-u_1,\ [e_1,u_4]=u_2,$ $[e_2,e_3]=2e_1,\ [e_2,u_1]=-u_2,\ [e_2,u_2]=u_1,\ [e_2,u_3]=-u_4,\ [e_2,u_4]=u_3,\ [e_3,u_1]=u_4,$ $[e_3,u_2]=u_3,\ [e_3,u_3]=-u_2,\ [e_3,u_4]=-u_1$
$3.5^1.1$	$[e_1,e_2]=2e_2,\ [e_1,e_3]=-2e_3,\ [e_1,u_1]=2u_1,\ [e_1,u_3]=-2u_3,\ [e_2,e_3]=e_1,\ [e_2,u_2]=u_1,$ $[e_2,u_3]=-2u_2,\ [e_3,u_1]=2u_2,\ [e_3,u_2]=-u_3,\ [u_1,u_4]=u_1,\ [u_2,u_4]=u_2,\ [u_3,u_4]=u_3$
$3.5^1.2$	$[e_1,e_2]=2e_2,\ [e_1,e_3]=-2e_3,\ [e_1,u_1]=2u_1,\ [e_1,u_3]=-2u_3,\ [e_2,e_3]=e_1,\ [e_2,u_2]=u_1,$ $[e_2,u_3]=-2u_2,\ [e_3,u_1]=2u_2,\ [e_3,u_2]=-u_3,\ [u_1,u_2]=e_2,\ [u_1,u_3]=e_1,\ [u_2,u_3]=e_3$

Продолжение таблицы 3

$3.5^1.3$	$[e_1,e_2]=2e_2,\ [e_1,e_3]=-2e_3,\ [e_1,u_1]=2u_1,\ [e_1,u_3]=-2u_3,\ [e_2,e_3]=e_1,\ [e_2,u_2]=u_1,$ $[e_2,u_3]=-2u_2,\ [e_3,u_1]=2u_2,\ [e_3,u_2]=-u_3,\ [u_1,u_2]=-e_2,\ [u_1,u_3]=-e_1,$ $[u_2,u_3]=-e_3$
$3.5^1.4$	$[e_1,e_2]=2e_2,\ [e_1,e_3]=-2e_3,\ [e_1,u_1]=2u_1,\ [e_1,u_3]=-2u_3,\ [e_2,e_3]=e_1,\ [e_2,u_2]=u_1,$ $[e_2,u_3]=-2u_2,\ [e_3,u_1]=2u_2,\ [e_3,u_2]=-u_3$
$3.5^2.1$	$[e_1,e_2]=-e_3,\ [e_1,e_3]=e_2,\ [e_1,u_1]=-u_2,\ [e_1,u_2]=u_1,\ [e_2,e_3]=-e_1,\ [e_2,u_1]=-u_3,$ $[e_2,u_3]=u_1,\ [e_3,u_2]=-u_3,\ [e_3,u_3]=u_2,\ [u_1,u_4]=u_1,\ [u_2,u_4]=u_2,\ [u_3,u_4]=u_3$
$3.5^2.2$	$[e_1,e_2]=-e_3,\ [e_1,e_3]=e_2,\ [e_1,u_1]=-u_2,\ [e_1,u_2]=u_1,\ [e_2,e_3]=-e_1,\ [e_2,u_1]=-u_3,$ $[e_2,u_3]=u_1,\ [e_3,u_2]=-u_3,\ [e_3,u_3]=u_2,\ [u_1,u_2]=e_1,\ [u_1,u_3]=e_2,\ [u_2,u_3]=e_3$
$3.5^2.3$	$[e_1,e_2]=-e_3,\ [e_1,e_3]=e_2,\ [e_1,u_1]=-u_2,\ [e_1,u_2]=u_1,\ [e_2,e_3]=-e_1,\ [e_2,u_1]=-u_3,$ $[e_2,u_3]=u_1,\ [e_3,u_2]=-u_3,\ [e_3,u_3]=u_2,\ [u_1,u_2]=-e_1,\ [u_1,u_3]=-e_2,\ [u_2,u_3]=-e_3$
$3.5^2.4$	$[e_1,e_2]=-e_3,\ [e_1,e_3]=e_2,\ [e_1,u_1]=-u_2,\ [e_1,u_2]=u_1,\ [e_2,e_3]=-e_1,\ [e_2,u_1]=-u_3,$ $[e_2,u_3]=u_1,\ [e_3,u_2]=-u_3,\ [e_3,u_3]=u_2$
$4.1^1.1$	$[e_1,e_3]=e_3,\ [e_1,e_4]=e_4,\ [e_1,u_1]=u_1,\ [e_1,u_3]=-u_3,\ [e_2,e_3]=-e_3,\ [e_2,e_4]=e_4,$ $[e_2,u_2]=u_2,\ [e_2,u_4]=-u_4,\ [e_3,u_2]=u_1,\ [e_3,u_3]=-u_4,\ [e_4,u_3]=-u_2,\ [e_4,u_4]=u_1$
$4.1^2.1$	$[e_1,e_3]=e_3,\ [e_1,e_4]=e_4,\ [e_1,u_1]=u_1,\ [e_1,u_3]=-u_3,\ [e_2,e_3]=-e_4,\ [e_2,e_4]=e_3,$ $[e_2,u_2]=u_4,\ [e_2,u_4]=-u_2,\ [e_3,u_2]=u_1,\ [e_3,u_3]=-u_2,\ [e_4,u_3]=u_4,\ [e_4,u_4]=-u_1$
$4.2^1.1$	$[e_1,e_3]=2e_3,\ [e_1,e_4]=-2e_4,\ [e_1,u_1]=u_1,\ [e_1,u_2]=-u_2,\ [e_1,u_3]=-u_3,\ [e_1,u_4]=u_4,$ $[e_2,u_1]=u_1,\ [e_2,u_2]=u_2,\ [e_2,u_3]=-u_3,\ [e_2,u_4]=-u_4,\ [e_3,e_4]=e_1,\ [e_3,u_2]=u_1,$ $[e_3,u_3]=-u_4,\ [e_4,u_1]=u_2,\ [e_4,u_4]=-u_3,\ [u_1,u_3]=e_1+3e_2,\ [u_1,u_4]=2e_3,$ $[u_2,u_3]=2e_4,\ [u_2,u_4]=-e_1+3e_2$
$4.2^1.2$	$[e_1,e_3]=2e_3,\ [e_1,e_4]=-2e_4,\ [e_1,u_1]=u_1,\ [e_1,u_2]=-u_2,\ [e_1,u_3]=-u_3,\ [e_1,u_4]=u_4,$ $[e_2,u_1]=u_1,\ [e_2,u_2]=u_2,\ [e_2,u_3]=-u_3,\ [e_2,u_4]=-u_4,\ [e_3,e_4]=e_1,\ [e_3,u_2]=u_1,$ $[e_3,u_3]=-u_4,\ [e_4,u_1]=u_2,\ [e_4,u_4]=-u_3$
$4.2^2.1$	$[e_1,e_3]=2e_4,\ [e_1,e_4]=-2e_3,\ [e_1,u_1]=u_3,\ [e_1,u_2]=-u_4,\ [e_1,u_3]=-u_1,\ [e_1,u_4]=u_2,$ $[e_2,u_1]=u_3,\ [e_2,u_2]=u_4,\ [e_2,u_3]=-u_1,\ [e_2,u_4]=-u_2,\ [e_3,e_4]=2e_1,\ [e_3,u_1]=-u_2,$ $[e_3,u_2]=u_1,\ [e_3,u_3]=-u_4,\ [e_3,u_4]=u_3,\ [e_4,u_1]=u_4,\ [e_4,u_2]=u_3,\ [e_4,u_3]=-u_2,$ $[e_4,u_4]=-u_1,\ [u_1,u_2]=-e_3,\ [u_1,u_3]=e_1+3e_2,\ [u_1,u_4]=e_4,\ [u_2,u_3]=e_4,$ $[u_2,u_4]=-e_1+3e_2,\ [u_3,u_4]=-e_3$
$4.2^2.2$	$[e_1,e_3]=2e_4,\ [e_1,e_4]=-2e_3,\ [e_1,u_1]=u_3,\ [e_1,u_2]=-u_4,\ [e_1,u_3]=-u_1,\ [e_1,u_4]=u_2,$ $[e_2,u_1]=u_3,\ [e_2,u_2]=u_4,\ [e_2,u_3]=-u_1,\ [e_2,u_4]=-u_2,\ [e_3,e_4]=2e_1,\ [e_3,u_1]=-u_2,$ $[e_3,u_2]=u_1,\ [e_3,u_3]=-u_4,\ [e_3,u_4]=u_3,\ [e_4,u_1]=u_4,\ [e_4,u_2]=u_3,\ [e_4,u_3]=-u_2,$ $[e_4,u_4]=-u_1,\ [u_1,u_2]=e_3,\ [u_1,u_3]=-e_1-3e_2,\ [u_1,u_4]=-e_4,\ [u_2,u_3]=-e_4,$ $[u_2,u_4]=e_1-3e_2,\ [u_3,u_4]=e_3$
$4.2^2.3$	$[e_1,e_3]=2e_4,\ [e_1,e_4]=-2e_3,\ [e_1,u_1]=u_3,\ [e_1,u_2]=-u_4,\ [e_1,u_3]=-u_1,\ [e_1,u_4]=u_2,$ $[e_2,u_1]=u_3,\ [e_2,u_2]=u_4,\ [e_2,u_3]=-u_1,\ [e_2,u_4]=-u_2,\ [e_3,e_4]=2e_1,\ [e_3,u_1]=-u_2,$ $[e_3,u_2]=u_1,\ [e_3,u_3]=-u_4,\ [e_3,u_4]=u_3,\ [e_4,u_1]=u_4,\ [e_4,u_2]=u_3,\ [e_4,u_3]=-u_2,$ $[e_4,u_4]=-u_1$
$4.2^3.1$	$[e_1,e_3]=2e_3,\ [e_1,e_4]=-2e_4,\ [e_1,u_1]=u_1,\ [e_1,u_2]=-u_2,\ [e_1,u_3]=-u_3,\ [e_1,u_4]=u_4,$ $[e_2,u_1]=-u_4,\ [e_2,u_2]=u_3,\ [e_2,u_3]=-u_2,\ [e_2,u_4]=u_1,\ [e_3,e_4]=e_1,\ [e_3,u_2]=u_1,$ $[e_3,u_3]=-u_4,\ [e_4,u_1]=u_2,\ [e_4,u_4]=-u_3,\ [u_1,u_2]=3e_2,\ [u_1,u_3]=e_1,\ [u_1,u_4]=2e_3,$ $[u_2,u_3]=2e_4,\ [u_2,u_4]=-e_1,\ [u_3,u_4]=3e_2$
$4.2^3.2$	$[e_1,e_3]=2e_3,\ [e_1,e_4]=-2e_4,\ [e_1,u_1]=u_1,\ [e_1,u_2]=-u_2,\ [e_1,u_3]=-u_3,\ [e_1,u_4]=u_4,$ $[e_2,u_1]=-u_4,\ [e_2,u_2]=u_3,\ [e_2,u_3]=-u_2,\ [e_2,u_4]=u_1,\ [e_3,e_4]=e_1,\ [e_3,u_2]=u_1,$ $[e_3,u_3]=-u_4,\ [e_4,u_1]=u_2,\ [e_4,u_4]=-u_3$
$4.3^1.1$	$[e_1,e_2]=2e_2,\ [e_1,e_3]=-2e_3,\ [e_1,u_1]=u_1,\ [e_1,u_2]=-u_2,\ [e_1,u_3]=-u_3,\ [e_1,u_4]=u_4,$ $[e_2,e_3]=e_1,\ [e_2,u_2]=u_1,\ [e_2,u_3]=-u_4,\ [e_3,u_1]=u_2,\ [e_3,u_4]=-u_3,\ [e_4,u_3]=-u_2,$ $[e_4,u_4]=u_1,\ [u_3,u_4]=e_4$
$4.3^1.2$	$[e_1,e_2]=2e_2,\ [e_1,e_3]=-2e_3,\ [e_1,u_1]=u_1,\ [e_1,u_2]=-u_2,\ [e_1,u_3]=-u_3,\ [e_1,u_4]=u_4,$ $[e_2,e_3]=e_1,\ [e_2,u_2]=u_1,\ [e_2,u_3]=-u_4,\ [e_3,u_1]=u_2,\ [e_3,u_4]=-u_3,\ [e_4,u_3]=-u_2,$ $[e_4,u_4]=u_1$

Продолжение таблицы 3

$5.1^1.1$	$[e_1,e_3]=2e_3,\ [e_1,e_4]=-2e_4,\ [e_1,u_1]=u_1,\ [e_1,u_2]=-u_2,\ [e_1,u_3]=-u_3,\ [e_1,u_4]=u_4,$ $[e_2,e_5]=2e_5,\ [e_2,u_1]=u_1,\ [e_2,u_2]=u_2,\ [e_2,u_3]=-u_3,\ [e_2,u_4]=-u_4,\ [e_3,e_4]=e_1,$ $[e_3,u_2]=u_1,\ [e_3,u_3]=-u_4,\ [e_4,u_1]=u_2,\ [e_4,u_4]=-u_3,\ [e_5,u_3]=-u_2,\ [e_5,u_4]=u_1$
$6.1^1.1$	$[e_1,e_3]=2e_3,\ [e_1,e_4]=-2e_4,\ [e_1,u_1]=u_1,\ [e_1,u_2]=-u_2,\ [e_1,u_3]=-u_3,\ [e_1,u_4]=u_4,$ $[e_2,e_5]=2e_5,\ [e_2,e_6]=-2e_6,\ [e_2,u_1]=u_1,\ [e_2,u_2]=u_2,\ [e_2,u_3]=-u_3,\ [e_2,u_4]=-u_4,$ $[e_3,e_4]=e_1,\ [e_3,u_2]=u_1,\ [e_3,u_3]=-u_4,\ [e_4,u_1]=u_2,\ [e_4,u_4]=-u_3,\ [e_5,e_6]=-e_2,$ $[e_5,u_3]=-u_2,\ [e_5,u_4]=u_1,\ [e_6,u_1]=-u_4,\ [e_6,u_2]=u_3,\ [u_1,u_2]=2e_5,$ $[u_1,u_3]=e_1+e_2,\ [u_1,u_4]=2e_3,\ [u_2,u_3]=2e_4,\ [u_2,u_4]=-e_1+e_2,\ [u_3,u_4]=2e_6$
$6.1^1.2$	$[e_1,e_3]=2e_3,\ [e_1,e_4]=-2e_4,\ [e_1,u_1]=u_1,\ [e_1,u_2]=-u_2,\ [e_1,u_3]=-u_3,\ [e_1,u_4]=u_4,$ $[e_2,e_5]=2e_5,\ [e_2,e_6]=-2e_6,\ [e_2,u_1]=u_1,\ [e_2,u_2]=u_2,\ [e_2,u_3]=-u_3,\ [e_2,u_4]=-u_4,$ $[e_3,e_4]=e_1,\ [e_3,u_2]=u_1,\ [e_3,u_3]=-u_4,\ [e_4,u_1]=u_2,\ [e_4,u_4]=-u_3,\ [e_5,e_6]=-e_2,$ $[e_5,u_3]=-u_2,\ [e_5,u_4]=u_1,\ [e_6,u_1]=-u_4,\ [e_6,u_2]=u_3$
$6.1^2.1$	$[e_1,e_2]=-e_4,\ [e_1,e_3]=-e_5,\ [e_1,e_4]=e_2,\ [e_1,e_5]=e_3,\ [e_1,u_1]=-u_2,\ [e_1,u_2]=u_1,$ $[e_2,e_3]=-e_6,\ [e_2,e_4]=-e_1,\ [e_2,e_6]=e_3,\ [e_2,u_1]=-u_3,\ [e_2,u_3]=u_1,\ [e_3,e_5]=-e_1,$ $[e_3,e_6]=-e_2,\ [e_3,u_1]=-u_4,\ [e_3,u_4]=u_1,\ [e_4,e_5]=-e_6,\ [e_4,e_6]=e_5,\ [e_4,u_2]=-u_3,$ $[e_4,u_3]=u_2,\ [e_5,e_6]=-e_4,\ [e_5,u_2]=-u_4,\ [e_5,u_4]=u_2,\ [e_6,u_3]=-u_4,\ [e_6,u_4]=u_3,$ $[u_1,u_2]=e_1,\ [u_1,u_3]=e_2,\ [u_1,u_4]=e_3,\ [u_2,u_3]=e_4,\ [u_2,u_4]=e_5,\ [u_3,u_4]=e_6$
$6.1^2.2$	$[e_1,e_2]=-e_4,\ [e_1,e_3]=-e_5,\ [e_1,e_4]=e_2,\ [e_1,e_5]=e_3,\ [e_1,u_1]=-u_2,\ [e_1,u_2]=u_1,$ $[e_2,e_3]=-e_6,\ [e_2,e_4]=-e_1,\ [e_2,e_6]=e_3,\ [e_2,u_1]=-u_3,\ [e_2,u_3]=u_1,\ [e_3,e_5]=-e_1,$ $[e_3,e_6]=-e_2,\ [e_3,u_1]=-u_4,\ [e_3,u_4]=u_1,\ [e_4,e_5]=-e_6,\ [e_4,e_6]=e_5,\ [e_4,u_2]=-u_3,$ $[e_4,u_3]=u_2,\ [e_5,e_6]=-e_4,\ [e_5,u_2]=-u_4,\ [e_5,u_4]=u_2,\ [e_6,u_3]=-u_4,\ [e_6,u_4]=u_3,$ $[u_1,u_2]=-e_1,\ [u_1,u_3]=-e_2,\ [u_1,u_4]=-e_3,\ [u_2,u_3]=-e_4,\ [u_2,u_4]=-e_5,$ $[u_3,u_4]=-e_6$
$6.1^2.3$	$[e_1,e_2]=-e_4,\ [e_1,e_3]=-e_5,\ [e_1,e_4]=e_2,\ [e_1,e_5]=e_3,\ [e_1,u_1]=-u_2,\ [e_1,u_2]=u_1,$ $[e_2,e_3]=-e_6,\ [e_2,e_4]=-e_1,\ [e_2,e_6]=e_3,\ [e_2,u_1]=-u_3,\ [e_2,u_3]=u_1,\ [e_3,e_5]=-e_1,$ $[e_3,e_6]=-e_2,\ [e_3,u_1]=-u_4,\ [e_3,u_4]=u_1,\ [e_4,e_5]=-e_6,\ [e_4,e_6]=e_5,\ [e_4,u_2]=-u_3,$ $[e_4,u_3]=u_2,\ [e_5,e_6]=-e_4,\ [e_5,u_2]=-u_4,\ [e_5,u_4]=u_2,\ [e_6,u_3]=-u_4,\ [e_6,u_4]=u_3$
$6.1^3.1$	$[e_1,e_2]=-e_4,\ [e_1,e_3]=-e_5,\ [e_1,e_4]=e_2,\ [e_1,e_5]=e_3,\ [e_1,u_1]=-u_2,\ [e_1,u_2]=u_1,$ $[e_2,e_3]=-e_6,\ [e_2,e_4]=-e_1,\ [e_2,e_6]=e_3,\ [e_2,u_1]=-u_3,\ [e_2,u_3]=u_1,\ [e_3,e_5]=e_1,$ $[e_3,e_6]=e_2,\ [e_3,u_1]=u_4,\ [e_3,u_4]=u_1,\ [e_4,e_5]=-e_6,\ [e_4,e_6]=e_5,\ [e_4,u_2]=-u_3,$ $[e_4,u_3]=u_2,\ [e_5,e_6]=e_4,\ [e_5,u_2]=u_4,\ [e_5,u_4]=u_2,\ [e_6,u_3]=u_4,\ [e_6,u_4]=u_3,$ $[u_1,u_2]=e_1,\ [u_1,u_3]=e_2,\ [u_1,u_4]=-e_3,\ [u_2,u_3]=e_4,\ [u_2,u_4]=-e_5,\ [u_3,u_4]=-e_6$
$6.1^3.2$	$[e_1,e_2]=-e_4,\ [e_1,e_3]=-e_5,\ [e_1,e_4]=e_2,\ [e_1,e_5]=e_3,\ [e_1,u_1]=-u_2,\ [e_1,u_2]=u_1,$ $[e_2,e_3]=-e_6,\ [e_2,e_4]=-e_1,\ [e_2,e_6]=e_3,\ [e_2,u_1]=-u_3,\ [e_2,u_3]=u_1,\ [e_3,e_5]=e_1,$ $[e_3,e_6]=e_2,\ [e_3,u_1]=u_4,\ [e_3,u_4]=u_1,\ [e_4,e_5]=-e_6,\ [e_4,e_6]=e_5,\ [e_4,u_2]=-u_3,$ $[e_4,u_3]=u_2,\ [e_5,e_6]=e_4,\ [e_5,u_2]=u_4,\ [e_5,u_4]=u_2,\ [e_6,u_3]=u_4,\ [e_6,u_4]=u_3,$ $[u_1,u_2]=-e_1,\ [u_1,u_3]=-e_2,\ [u_1,u_4]=e_3,\ [u_2,u_3]=-e_4,\ [u_2,u_4]=e_5,\ [u_3,u_4]=e_6$
$6.1^3.3$	$[e_1,e_2]=-e_4,\ [e_1,e_3]=-e_5,\ [e_1,e_4]=e_2,\ [e_1,e_5]=e_3,\ [e_1,u_1]=-u_2,\ [e_1,u_2]=u_1,$ $[e_2,e_3]=-e_6,\ [e_2,e_4]=-e_1,\ [e_2,e_6]=e_3,\ [e_2,u_1]=-u_3,\ [e_2,u_3]=u_1,\ [e_3,e_5]=e_1,$ $[e_3,e_6]=e_2,\ [e_3,u_1]=u_4,\ [e_3,u_4]=u_1,\ [e_4,e_5]=-e_6,\ [e_4,e_6]=e_5,\ [e_4,u_2]=-u_3,$ $[e_4,u_3]=u_2,\ [e_5,e_6]=e_4,\ [e_5,u_2]=u_4,\ [e_5,u_4]=u_2,\ [e_6,u_3]=u_4,\ [e_6,u_4]=u_3$

Список литературы

1. Besse A. Einstein manifolds. — Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1987.

2. Gray A. Einstein-like manifolds which are not Einstein // Geom. Dedicata. — 1978. — Vol. 7. — P. 259–280.

3. Calvaruso G., Zaeim A. Conformally flat homogeneous pseudo-riemannian four-manifolds // Tohoku Math. J. — 2004. — Vol. 66. — P. 31–54.

4. Calvaruso G., Zaeim A. Four-dimensional Lorentzian Lie groups // Differential Geometry and its Applications. — 2013. — Vol. 31. — P. 496–509.

5. Calvaruso G., Zaeim A. Neutral Metrics on Four-Dimensional Lie Groupss // Journal of Lie Theory. — 2015. — Vol. 25. — P. 1023–1044.

6. Zaeim A., Haji-Badali A. Einstein-like Pseudo-Riemannian Homogeneous Manifolds of Dimension Four // Mediterranean Journal of Mathematics. — 2016. — Vol. 13, no. 5. — P. 3455–3468.

7. Клепиков П.Н. Четырехмерные метрические группы Ли с нулевым тензором Схоутена–Вейля // Сибирские электронные математические известия. — 2019. — Т. 16. — С. 271–330.

8. Gladunova O.P., Slavskii V.V. Left-invariant Riemannian metrics on four-dimensional unimodular Lie groups with zero-divergence Weyl tensor // Doklady Mathematics. — 2010. — Vol. 81, no. 2. — P. 298–300.

9. Voronov D.S., Rodionov E.D. Left-invariant Riemannian metrics on four-dimensional nonunimodular Lie groups with zero-divergence Weyl tensor // Doklady Mathematics. — 2010. — Vol. 81, no. 3. — P. 392–394.

10. Gladunova O.P., Slavskii V.V. Harmonicity of the Weyl tensor of left-invariant Riemannian metrics on four-dimensional unimodular Lie groups // Siberian Advances in math. — 2013. — Vol. 23, no. 1. — P. 32–46.

11. Rodionov E.D., Slavskii V.V. Conformal deformations of the Riemannian metrics and homogeneous Riemannian spaces // Comment. Math. Univ. Carolin. — 2002. — Vol. 43, no. 2. — P. 271–282.

12. Rodionov E.D., Slavskii V.V., Chibrikova L.N. Locally conformally homogeneous pseudo-Riemannian spaces // Siberian Advances in Mathematics. — 2007. — Vol. 17, no. 3. — P. 186–212.

13. Хромова О.П., Клепиков П.Н., Клепикова С.В., Родионов Е.Д. On the Schouten-Weyl tensor of 3-dimensional metric Lie groups // Труды семинара по геометрии и математическому моделированию. — 2017. — Т. 3. — С. 21–29.

14. Клепикова С.В., Хромова О.П. Локально однородные псевдоримановы многообразия размерности 4 с изотропным тензором Вейля // Известия АлтГУ. — 2018. — № 1(99). — С. 99–102.

15. Клепикова С.В. Изотропный тензор Вейля на четырехмерных локально однородных псевдоримановых многообразиях // Известия АлтГУ. — 2019. — № 1(105). — С. 80–83.

16. Клепиков П.Н., Родионов Е.Д. Применение пакетов символьных вычислений к исследованию алгебраических солитонов Риччи на однородных (псевдо)римановых многообразиях // Известия АлтГУ. — 2017. — № 4(96). — С. 108–111.

17. Хромова О.П. Применение пакетов символьных вычислений к исследованию оператора одномерной кривизны на нередуктивных однородных псевдоримановых многообразиях // Известия АлтГУ. — 2017. — № 1(93). — С. 140–143.

18. Гладунова О.П. Применение математических пакетов к вычислению инвариантных тензорных полей на трехмерных группах Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой // Вестник Алтайского гос. пед. ун-та. — 2016. — № 6-2. — С. 111–115.

19. Гладунова О.П., Оскорбин Д.Н. Применение пакетов символьных вычислений к исследованию спектра оператора кривизны на метрических группах Ли // Известия АлтГУ. — 2013. — № 1-1(77). — С. 19–23.

20. Komrakov B.B. Einstein-Maxwell equation on four-dimensional homogeneous spaces // Lobachevskii J. Math. — 2001. — Vol. 8. — P. 33–165.