

Модели колебаний тонкого битого льда в канале

Завьялова К.Н., Шишмарев К.А.

Алтайский государственный университет, г. Барнаул

kristina-zavyalova-1996@mail.ru, shishmarev.k@mail.ru

Аннотация

В статье рассматриваются математические модели колебаний битого льда в канале. Битый лед моделируется тонкой пластиной с нулевой жесткостью. Жидкость в канале невязкая и несжимаемая. Течение в канале считается потенциальным. Рассмотрены модели вынужденных и свободных колебаний, а также случай вязкого битого льда. Доказана теорема об устойчивости классического решения по начальным данным задачи о колебаниях невязкого битого льда.

Ключевые слова: битый лед, канал, линейная теория гидроупругости, идеальная жидкость, устойчивость, вязкость, колебания, периодические волны.

1. Введение

Рассматриваются нестационарные колебания битого льда в канале, вызванные приложенной внешней нагрузкой и давлением жидкости, заполняющей канал. Битый лед моделируется тонкой упругой пластиной с нулевой жесткостью. В случае ненулевой жесткости рассматриваемая в статье модель описывает колебания ледового покрова. Модели упругого/вязкоупругого ледового покрова широко исследовались в разных постановках (см, например [1–3]).

Хорошо изученной является задача о движении внешней нагрузки по замороженному ледовому покрову в канале. Существует несколько основных подходов к изучению этой задачи. В первом подходе задача исследуется в рамках модели Кельвина-Фойгта вязкоупругого материала. Рассматривается решение в системе координат, движущейся совместно с нагрузкой. Данный подход не требует начальных условий. Задача решается численно. В рамках вязкоупругой модели прогибы и деформации в ледовом покрове быстро затухают с увеличением расстояния от приложенной нагрузки.

Другой подход к изучению поведения ледового покрова при движении внешней нагрузки представлен в [4] для задачи с неограниченным ледовым покровом. В используемой модели стационарный прогиб льда получен как предел нестационарного решения при больших временах. Данный подход требует формулировки начальных условий при $t = 0$. Прогибы и деформации льда затухают в отдалении от нагрузки при конечных временах. В отличие от задачи с неограниченным ледовым покровом, исследование прогибов льда в канале требует поиска профиля колебаний поперек канала с учетом краевых условий. Для этого используется метод нормальных мод [5, 6].

Периодические волны в замороженном канале исследованы в [7–10]. Колебания неограниченной тонкой ледовой пластины исследованы в [1, 11, 12], колебания полубесконечного ледового покрова в [13]. Рассмотренные задачи решались в рамках линейной теории гидроупругости. Показано, что стенки канала имеют важную роль в формировании прогибов ледового покрова. Исследование колебаний полубесконечного и ограниченного ледового покрова проведено в [14, 15]. Оценка влияния периодической нагрузки на ледовый покров получена в [16, 17]. Вопросы корректности начально-краевых задач динамики пороупругого льда рассмотрены в [18, 19].

В данной работе приведены модели нестационарных колебаний битого льда в канале. Рассмотрены случаи вынужденных и свободных колебаний, а также случай колебаний вязкого битого льда. Доказана устойчивость классического решения по начальным данным в случае невязкого битого льда.

2. Постановка задачи о вынужденных колебаниях битого льда в канале

Рассматриваются колебания битого льда в канале, вызванные движением внешней нагрузки вдоль канала. Канал имеет прямоугольное сечение высотой H , ($-H < z < 0$), шириной $2L$, ($-L < y < L$) и является неограниченным в направлении x , (x, y, z) – декартова система координат. Жидкость в канале невязкая и несжимаемая с плотностью ρ_ℓ . Жидкость покрыта битым льдом с постоянной толщиной h_i . Введем неограниченные области $\Pi \subset R^2$ и $\Omega \subset R^3$, которые занимает битый лед и жидкость в канале

$$\Pi = \{-\infty < x < \infty, -L < y < L\}, \quad \Omega = \{-\infty < x < \infty, -L < y < L, -H < z < 0\}.$$

Пусть $\Gamma = \partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ и $G = \partial\Pi = G_1 \cup G_2$, где

$$\Gamma_1 = \Gamma_1^1 \cup \Gamma_1^2 = \{-\infty < x < \infty, y = \pm L, -H < z < 0\} \cup \{-\infty < x < \infty, -L < y < L, z = -H\},$$

$$\Gamma_2 = \{\infty < x < \infty, -L < y < L, z = 0\}, \quad \Gamma_3 = \{x = \pm\infty, -L < y < L, -H < z < 0\},$$

$$G_1 = \{-\infty < x < \infty, y = \pm L\}, \quad G_2 = \{x = \pm\infty, -L < y < L\}.$$

Обозначим $\Omega_T = \Omega \times [0, T]$, $\Pi_T = \Pi \times [0, T]$, где $t \in [0, T]$ – время. Задача определения прогиба битого льда $w(x, y, t)$ и потенциал скорости течения жидкости $\varphi(x, y, z, t)$ формулируется в рамках линейной теории гидроупругости [1, 10, 20, 21]. Рассмотрим безвихревое течение идеальной жидкости в области Ω_T с потенциалом скорости $\varphi(x, y, z, t)$. Потенциал φ удовлетворяет уравнению Лапласа в области течения

$$\Delta\varphi(x, y, z, t) = 0 \quad (x, y, z, t) \in \Omega_T, \quad (1)$$

краевым условиям на Γ_1

$$\varphi_y = 0 \quad (y = \pm L), \quad \varphi_z = 0 \quad (z = -H), \quad (2)$$

линеаризованным кинематическому условию и интегралу Коши-Лагранжа на Γ_2

$$\varphi_z(x, y, 0, t) = w_t(x, y, t), \quad p(x, y, 0, t) = -\rho_\ell g w(x, y, t) - \rho_\ell \varphi_t(x, y, 0, t), \quad (3)$$

где $p(x, y, 0, t)$ – давление жидкости на границе битый лед - жидкость, g – ускорение силы тяжести. Также рассматривается условие затухания колебаний жидкости в отдалении от нагрузки. Соответствующее краевое условие на Γ_3 имеет вид

$$\varphi(x, y, z, t), \quad \varphi_x(x, y, z, t) \rightarrow 0, \quad (x \rightarrow \infty). \quad (4)$$

Прогиб $w(x, y, t)$ описывается уравнением колебания битого льда

$$Mw_{tt} = -P(x, y, t) + p(x, y, 0, t) \quad (x, y, t) \in \Pi_T, \quad (5)$$

начальным условиям

$$w(x, y, 0) = w^1(x, y), \quad w_t(x, y, 0) = w^2(x, y) \quad (x, y) \in \Pi$$

и краевым условиям затухания колебаний битого льда в отдалении от нагрузки на G_2

$$w = 0, \quad w_x = 0 \quad (x \rightarrow \infty). \quad (6)$$

Начально - краевая задача (1) – (6) описывает колебания битого льда, под действием заданной внешней нагрузки $P(x, y, t)$. Здесь $M = \rho_i h_i$ – масса льда на единицу площади, ρ_i – плотность льда; $\varphi(x, y, 0, t)$ – потенциал скорости течения на поверхности жидкости. Под классическим решением системы уравнений (1) – (6) понимается пара функций $w(x, y, t)$ и $\varphi(x, y, z, t)$, определенных на Ω_T и Π_T .

3. Свободные периодические волны в канале покрытом битым льдом

В случае свободных колебаний $P = 0$ и начальные условия отсутствуют. Тогда система уравнений (1) – (6) примет вид

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= 0 \quad (x, y, z, t) \in \Omega_T, \\ \varphi_y &= 0 \quad (y \pm L), \quad \varphi_z = 0 \quad (z = -H), \quad \varphi_z(x, y, 0, t) = w_t(x, y, t), \\ Mw_{tt} &= -\rho_\ell g w - \rho_\ell \varphi_t(x, y, 0, t), \\ \varphi, \varphi_x &\rightarrow 0 \quad w, w_x \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Рассмотрим периодические волны, распространяющиеся в битом льду вдоль канала. При этом отбросим краевые условия при $x \rightarrow \infty$. Тогда $w = AF(y) \cos(kx - \omega t)$, где A – амплитуда, $F(y)$ – форма волны поперек канала, k – волновое число, ω – частота. Подставляя w в последнюю систему уравнений, в результате получим уравнения для определения зависимостей $\omega = \omega(k)$, называемых дисперсионным соотношением. В канале будет счетное число таких зависимостей. На Рисунке 1 приведены примеры таких соотношений для од-

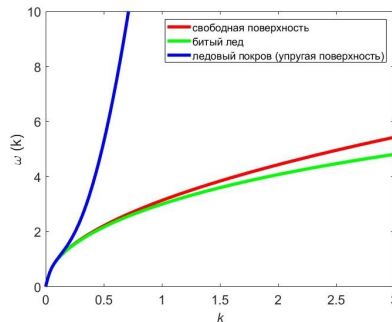


Рисунок 1. Дисперсионные соотношения для трех разных моделей.

ного характерного набора значений параметров системы лед-вода-канал. Битый лед показан красной линией, свободная поверхность – красной, сплошной ледовый покров – синей. По поведению дисперсионных соотношений битый лед близок к свободной поверхности и значительно отличается от упругого ледового покрова. Совпадение результатов всех трех моделей наблюдается только при очень малых значениях волнового числа. Отсюда следует вывод, что волновая картина при колебаниях в битом льду будет близка по форме к колебаниям свободной поверхности.

4. Модель колебаний вязкого битого льда

Рассмотрим модельную задачу о колебаниях вязкого битого льда. Вязкость моделируется добавлением слагаемого $\tau \frac{\partial w}{\partial t}$ в уравнение колебаний битого льда. Здесь τ – время запаздывания, соответствующее аналогичному параметру в модели Кельвина-Фойгта

вязкоупругого материала. Заметим, что в рассматриваемой в статье модели, сам реологический закон Кельвина-Фойгта не используется. Тогда уравнение колебаний битого льда примет вид

$$Mw_{tt} + \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}\right) \rho_l g w + \rho_l \varphi_t = P(x, y, t).$$

Остальные уравнения и начально-краевые условия остаются неизменными. В этом случае модель будет являться более физической – наличие параметра τ обеспечивает быстрое затухание колебаний и условия на w и φ при $x \rightarrow \infty$ являются естественными.

5. Устойчивость решения по начальным данным

Пусть существует два отличных от нуля решения w_1, φ_1 и w_2, φ_2 системы (1) – (6), удовлетворяющие разным начальным условиям

$$w_1(x, y, 0) = w_1^1(x, y) \quad w_{1,t}(x, y, 0) = w_1^2(x, y),$$

$$w_2(x, y, 0) = w_2^1(x, y) \quad w_{2,t}(x, y, 0) = w_2^2(x, y).$$

Функции $w_1^0 = w_1^1(x, y) - w_2^1(x, y)$ и $w_2^0 = w_1^2(x, y) - w_2^2(x, y)$ удовлетворяют следующему неравенству

$$\frac{\rho_l g}{2} \|w_1^0\|_{2,\Pi}^2 + M \|w_2^0\|_{2,\Pi}^2 + \frac{\rho_l^2}{2M} \|\varphi^0(x, y, 0)\|_{2,\Pi}^2 \leq \delta, \quad (7)$$

где $\varphi^0(x, y, z) = \varphi_1(x, y, z, 0) - \varphi_2(x, y, z, 0)$, и $\|\cdot\|_{2,\Pi}$ и $\|\cdot\|_{1,\Pi}$ соответствующие нормы функций в пространствах $L_2(\Pi)$ и $L_1(\Pi)$.

Функции $w = w_1 - w_2$ и $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ удовлетворяют следующей задаче

$$Mw_{tt}(x, y, t) = -\rho_l \varphi_t(x, y, 0, t) - \rho_l g w(x, y, t), \quad (x, y, t) \in \Pi_T \quad (8)$$

$$\Delta \varphi(x, y, z, t) = 0 \quad (x, y, z, t) \in \Omega_T, \quad (9)$$

$$\varphi_y = 0 \quad (y = \pm L), \quad \varphi_z = 0 \quad (z = -H),$$

$$\varphi_z = w_t \quad (z = 0), \quad (10)$$

$$\varphi(x, y, z, t), w(x, y, t), w_x(x, y, t) \rightarrow 0 \quad (|x| \rightarrow \infty). \quad (11)$$

$$w(x, y, 0) = w_1^0, \quad w_t(x, y, 0) = w_2^0. \quad (12)$$

Теорема Для решения задачи (8) – (12) справедливы следующие оценки

$$\|w\|_{2,\Pi}^2 + \|w_t\|_{2,\Pi}^2 + \|\nabla \varphi\|_{2,\Omega}^2 \leq C\delta,$$

где C – константа, зависящая от параметров задачи.

Заметим, что решение (φ, w) задачи (8) – (12) обладает следующими свойствами

$$\begin{aligned} \int_{\Pi} w(x, y, t) d\Pi &= \int_{\Pi} w_1^0(x, y) d\Pi \quad t \in [0, T], \\ \int_{\Omega} |\nabla \varphi(x, y, z, t)|^2 d\Omega &= \int_{\Pi} \varphi(x, y, 0, t) w_t d\Pi, \\ \int_{\Omega} \nabla \varphi_t(x, y, z, t) \cdot \nabla \varphi d\Omega &= \int_{\Pi} \varphi_t(x, y, 0, t) w_t d\Pi, \end{aligned} \quad (13)$$

Умножая уравнение (8) на w_t , получим

$$Mw_{tt}w_t = -\rho_l\varphi_t(x, y, 0, t)w_t - \rho_l g w w_t.$$

Последнее уравнение приводится к виду

$$\frac{M}{2} \frac{dw_t^2}{dt} + \frac{\rho_l g}{2} \frac{dw^2}{dt} = -\rho_l\varphi_t(x, y, 0, t)w_t. \quad (14)$$

Интегрирование уравнения (14) по Π , с учетом свойства (13), дает

$$\frac{M}{2} \int_{\Pi} \frac{dw_t^2}{dt} d\Pi + \frac{\rho_l g}{2} \int_{\Pi} \frac{dw^2}{dt} d\Pi + \rho_l \int_{\Omega} \frac{d}{dt} |\nabla\varphi(x, y, z, t)|^2 d\Omega = 0. \quad (15)$$

Интегральное тождество (15) представим в виде

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{M}{2} \int_{\Pi} w_t^2 d\Pi + \frac{\rho_l g}{2} \int_{\Pi} w^2 d\Pi + \rho_l \int_{\Omega} |\nabla\varphi(x, y, z, t)|^2 d\Omega \right) = 0. \quad (16)$$

Интегрируя (16) по t с учетом начальных условий, получим

$$\begin{aligned} & \frac{M}{2} \int_{\Pi} w_t^2 d\Pi + \frac{\rho_l g}{2} \int_{\Pi} w^2 d\Pi + \rho_l \int_{\Omega} |\nabla\varphi(x, y, z, t)|^2 d\Omega = \\ & = \frac{M}{2} \int_{\Pi} (w_2^0)^2 d\Pi + \frac{\rho_l g}{2} \int_{\Pi} (w_1^0)^2 d\Pi + \rho_l \int_{\Omega} |\nabla\varphi(x, y, z, 0)|^2 d\Omega. \end{aligned} \quad (17)$$

Используя свойство (13) для последнего интеграла в правой части тождества (17) и неравенство Коши в виде

$$\int_{\Pi} \varphi(x, y, 0, 0)w_t(x, y, 0) d\Pi \leq \frac{M}{2\rho_l} \int_{\Pi} (w_2^0)^2 d\Pi + \frac{\rho_l}{2M} \int_{\Pi} (\varphi^0(x, y, 0))^2 d\Pi$$

тождество (17) запишем в виде неравенства

$$\begin{aligned} & \frac{M}{2} \int_{\Pi} w_t^2 d\Pi + \frac{\rho_l g}{2} \int_{\Pi} w^2 d\Pi + \rho_l \int_{\Omega} |\nabla\varphi(x, y, z, t)|^2 d\Omega \leq \\ & \leq M \int_{\Pi} (w_2^0)^2 d\Pi + \frac{\rho_l g}{2} \int_{\Pi} (w_1^0)^2 d\Pi + \frac{\rho_l^2}{2M} \int_{\Pi} (\varphi^0(x, y, 0))^2 d\Pi, \end{aligned}$$

из которого получаются необходимые оценки

$$\int_{\Pi} w_t^2 d\Pi \leq \frac{2}{M} \delta, \quad \int_{\Pi} w^2 d\Pi \leq \frac{2}{\rho_l g}, \quad \int_{\Omega} |\nabla\varphi|^2 d\Omega \leq \frac{1}{\rho_l} \delta.$$

Теорема доказана.

6. Заключение

Рассмотрены математические модели колебаний битого льда в канале. Сформулированы постановки задач о вынужденных и свободных колебаниях, а также построена модель колебаний вязкого битого льда. Последняя является более физической моделью и гарантирует затухание колебаний в отдалении от источника. Решение задачи о свободных колебаниях дает дисперсионные соотношения для периодических волн в битом льду в канале, которые можно использовать при интерпретации результатов решения задачи о вынужденных колебаниях. Доказана теорема об устойчивости классического решения по начальным данным задачи о колебаниях невязкого битого льда. Аналогичным образом может быть доказана теорема об единственности классического решения.

Список литературы

1. Squire V., Hosking R., Kerr A., Langhorne P. Moving loads on ice. — Kluwer Academic Publishers, 1996.
2. Shishmarev K., Khabakhpasheva T., Korobkin A. The response of ice cover to a load moving along a frozen channel // Applied Ocean Research. — 2016. — Vol. 59. — P. 313–326.
3. Kozin V.M. Resonance Method of Breaking of Ice Cover. Inventions and Experiments. — Moscow : Akad. Estestvoznaniya, 2007.
4. Schulkes R., Sneyd A. Time-dependent response of floating ice to a steadily moving load // Journal of Fluid Mechanics. — 1988. — Vol. 186. — P. 25–46.
5. Korobkin A., Khabakhpasheva T. Plane problem of asymmetrical wave impact on an elastic plate // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. — 1998. — Vol. 39(5). — P. 782–791.
6. Khabakhpasheva T. Impact of a surface wave on an elastic hull // Fluid Dynamics. — 2006. — Vol. 41(3). — P. 424–433.
7. Коробкин А.А., Папин А.А., Шишмарев К.А. Аналитическое и численное исследование квазиизотермической задачи взаимодействия ледового покрова канала и поверхностных волн // Известия АлтГУ. — 2012. — № 1/2(73). — С. 23–27.
8. Коробкин А.А., Папин А.А., Шишмарев К.А. Поведение ледового покрова канала под действием поверхностных волн // Известия АлтГУ. — 2012. — № 1/1(73). — С. 55–59.
9. Korobkin A., Khabakhpasheva T., Papin A. Waves propagating along a channel with ice cover // European Journal of Mechanics B/Fluids. — 2014. — Vol. 47. — P. 166–175.
10. Batyaev E.A., Khabakhpasheva T.I. Hydroelastic waves in channel with free ice cover // Fluid Dynamics. — 2015. — Vol. 6. — P. 84–101.
11. Zhestkaya V.D. Numerical solution of the problem of an ice sheet under a moving load // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. — 1999. — Vol. 40(4). — P. 770–775.
12. Жесткая В.Д., Козин В.М. Численное решение задачи о воздействии ударного импульса на ледяной покров // ПМТФ. — 2008. — Т. 49, № 2.
13. Brocklehurst P. Hydroelastic waves and their interaction with fixed structures : PhD thesis / Brocklehurst P. ; University of East Anglia, UK. — 2012.
14. Sturova I.V., Tkacheva L.A. Wave motion in a fluid under and inhomogeneous ice cover // Journal of Physics: Conference Series. — 2017. — Vol. 894, no. 1. — P. 012092.
15. Стурова И.В., Ткачева Л.А. Колебания ограниченного ледяного покрова при локальном динамическом воздействии // Полярная механика. — 2016. — № 3. — С. 997–1007.
16. Ткачева Л.А. Колебания ледяного покрова с трещиной при воздействии периодической по времени нагрузки // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. — 2017. — № 2. — С. 54–64.
17. Tkacheva L.A. Vibrations of an ice sheet with crack under a time-periodic load // Fluid Dynamics. — 2017. — Vol. 52, no. 2. — P. 219–229.

18. Токарева М.А. Конечное время стабилизации решения уравнений фильтрации жидкости в пороупругой среде // Известия АлтГУ. — 2015. — Т. 2, № 1. — С. 153–157.
19. Tokareva M.A. Solvability of initial boundary value problem for the equations of filtration in poroelastic media // Journal of Physics: Conference Series. — 2016. — Vol. 722, no. 1. — P. 012037.
20. DYe Kheysin. Dynamics of floating ice covers. — 1967. — (in Russian) Gidrometeorologicheskoe Izdatel'stvo, Leningrad, Technical Translation FSTC-HT-23-485-69. US Army Foreign Science and Technology Center.
21. Korobkin A.A., Khabakhpasheva T.I., Papin A.A. Waves propagating along a channel with ice cover // Eur J Mech B/Fluids. — 2014. — no. 47. — P. 166–175.