УДК 517.958

Изменение пористости горной породы под действием вязкого газа, заполняющего внутреннюю область породы под большим давлением

Калинина А.А.

Алтайский государственный университет

anya.kalinina2012@yandex.ru

Аннотация

В статье представлена математическая модель одномерного нестационарного движения жидкости в деформируемой пористой среде. Рассматривается система дифференциальных уравнений, состоящая из уравнений сохранения массы каждой из фаз, закона Дарси, реологического соотношения и закона сохранения баланса сил. Установлено свойство конечной скорости распространения возмущений.

Ключевые слова: пористость, фильтрация, вязкость, пороупругость, закон Дарси.

1. Вспомогательные сведения

Следующие сведения изложены в [1].

Скорость Дарси. Скорость Дарси (удельный расход на единицу площади поверхности) определяется следующей формулой

$$\vec{q}_D = \phi(\vec{v}_f - \vec{v}_s),$$

где ϕ – пористость (доля объема среды, приходящаяся на пустоты), $\vec{v}_f, \vec{v}_s$ – скорости жидкости и породы соответственно.

Закон сохранения массы. Закон сохранения масс для жидкости и твердой фазы в отсутствие фазовых переходов выглядит следующим образом

$$\frac{\partial(\rho_f\phi)}{\partial t} + \bigtriangledown\cdot(\rho_f\phi\vec{v}_f) = 0,$$

$$\frac{\partial(1-\phi)\rho_s}{\partial t} + \bigtriangledown\cdot((1-\phi)\rho_s\vec{v}_s) = 0, \tag{1}$$

где t – время, ρ_f – плотность жидкости, ρ_s – плотность породы, $\bigtriangledown = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3})$, (x_1, x_2, x_3) – переменные Эйлера.

Закон сохранения массы можно записать в терминах материальной производной ($\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \vec{v}_s\cdot\bigtriangledown A$). Откуда для несжимаемой жидкости получим

$$\frac{d\phi}{dt} = -\bigtriangledown\cdot\vec{q}_D - \phi\bigtriangledown\cdot\vec{v}_s. \tag{2}$$

Для несжимаемой породы ($\rho_s = const$) уравнение (1) можно представить в виде

$$\frac{\partial(1-\phi)}{\partial t} = -(1-\phi)(\bigtriangledown\cdot\vec{v}_s) - \vec{v}_s\cdot\bigtriangledown((1-\phi)),$$

и, следовательно,

$$\bigtriangledown\cdot\vec{v}_s = \frac{1}{1-\phi}\frac{d\phi}{dt}. \tag{3}$$

Используя (2) и (3), выводим

$$-\bigtriangledown \cdot \vec{q}_D = \frac{1}{1-\phi}\frac{d\phi}{dt}.$$

Напряжение и эффективное напряжение. При движении жидкости в горной породе постулируется:

1) общий тензор напряжения σ определяется через тензор напряжения твердой фазы σ_s и жидкой σ_f по правилу:

$$\sigma = (1-\phi)\sigma_s + \phi\sigma_f = (1-\phi)(S_s - p_s I) - \phi p_f I,$$

а полное (общее) давление есть $p_{tot} = (1-\phi)p_s + \phi p_f$, где σ_s, S_s, p_s – тензор напряжения, девиатор тензора напряжения, давление твердой фазы, соответственно, и σ_f, p_f – тензор напряжение и давление жидкой фазы;

2) девиатор тензора напряжения в жидкой фазе отсутствует ($S_f = 0$), потому что вязкость жидкости много меньше, чем каркасная сдвиговая вязкость.

В соответствии с принципом Терцаги [2] деформация двухфазной среды определяется через эффективное напряжение $\sigma_e = \sigma + p_f I$. Тогда в случае полного насыщения среды динамическое эффективное давление $p_e = p_{tot} - p_f$ [3].

Реологическое соотношение для вязкоупругой среды. Для каждой составляющей двухфазной среды (скелета s породы и содержащейся в ней жидкости f) вводятся понятия объемов твердого скелета V_s и пор V_p. Тогда удельный объем пор (пористость) $\phi = \frac{V_p}{V_t}$, где V_p, V_t – объем пор и общий объем. Общий объем – это объем пор и породы $V_t = V_p + V_s$. Заметим, что

$$d\phi = \frac{dV_p}{V_t} - V_p\frac{dV_t}{V_t^2} = \frac{dV_p}{V_t} - \phi\frac{dV_t}{V_t}. \tag{4}$$

Если плотность ρ_s твердой фазы постоянна, то $dV_s = 0$ и $dV_t = dV_p$. Из уравнения (4) получим

$$d\phi = (1-\phi)\frac{dV_t}{V_t}. \tag{5}$$

Объемная сжимаемость двухфазной среды β_t определяется, как относительное суммарное изменение объема, реагирующее на изменение приложенного эффективного динамического давления p_e: $\beta_t = -\frac{1}{V_t}(\frac{\partial V_t}{\partial p_e})$. Уравнение (5) примет вид

$$d\phi = -(1-\phi)\beta_t dp_e.$$

Объемная сжимаемость также является функцией пористости: $\beta_t = \phi\beta_\phi$, где β_ϕ – коэффициент сжимаемости, определенный как:

$$\beta_\phi = -1/V_p(\partial V_p/\partial p_e) = -1/\phi(\partial\phi/\partial p_e).$$

Тогда изменение пористости для механического сжатия может быть записано следующим образом:

$$\bigtriangledown \cdot \vec{v}_s = -\phi\beta_\phi\frac{dp_e}{dt}.$$

При этом закон деформации может быть записан в виде

$$\bigtriangledown \cdot \vec{v}_s = -\frac{p_e}{\xi},$$

где ξ – объемная вязкость.

Объемная вязкость зависит от ϕ: $\xi = \frac{\eta}{\phi}$, где η – сдвиговая вязкость горной породы (твердой матрицы).

Таким образом постулируется реологический закон, объединяющий механическую и вязкую сжимаемость

$$\bigtriangledown \cdot \vec{v}_s = -\beta_t(\phi)\frac{dp_e}{dt} - \frac{p_e}{\xi(\phi)},$$

где $\beta_f(\phi), \xi(\phi)$ – объемная сжимаемость и объемная вязкость.

Закон Дарси. Уравнение сохранения импульса для жидкости берется в форме закона Дарси

$$\vec{q}_D = -K \bigtriangledown (\frac{P_{ex}}{\rho_f g}),$$

где K – гидравлическая проводимость (тензор фильтрации), $K = (k'\rho_f g)/\mu, k', \mu$ – проницаемость и динамическая вязкость жидкости, P_{ex} – избыточное давление жидкости, определяемое как разность между давлением жидкости и гидростатическим давлением:$P_{ex} = p_f - p_h$. Отсюда следует, что

$$\vec{q}_D = -\frac{k'}{\mu}(\bigtriangledown p_f + \rho_f \vec{g}).$$

В некоторых случаях коэффициенты k', β_t, ξ могут быть опытным путем определены несколько иначе. В рассматриваемой нами модели они имеют вид: $\beta_t = \phi^b \beta_\phi, \xi = \eta/\phi^m, k' = k\phi^n$, где $b = 1/2, m \in [0,2], n = 3$.

Таким образом уравнения модели при отсутствии фазовых переходов имеют вид:

$$\tfrac{\partial(1-\phi)\rho_s}{\partial t} + div((1-\phi)\rho_s\vec{v_s}) = 0, \quad \tfrac{\partial(\rho_f\phi)}{\partial t} + div(\rho_f\phi\vec{v_f}) = 0, \tag{6}$$

$$\phi(\vec{v}_f - \vec{v}_s) = -\frac{k\phi^n}{\mu}(\nabla p_f + \rho_f\vec{g}), \tag{7}$$

$$\nabla \cdot \vec{v}_s = -\frac{\phi^m}{\eta}p_e - \phi^b\beta_\phi\frac{dp_e}{dt}, \tag{8}$$

$$p_{tot} = \phi p_f + (1-\phi)p_s; \quad p_e = (1-\phi)(p_s - p_f); \tag{9}$$

Данная квазилинейная система составного типа описывает пространственное нестационарное изотермическое движение сжимаемой жидкости в вязкоупругой горной породе.

В одномерном случае система (6)-(9) является замкнутой, если $p_f = p(\rho_f)$ или $\rho_f = const$. В общем случае к системе (6)-(9) кроме уравнения состояния добавляется уравнение сохранения импульса системы "твердая матрица - поровая жидкость", а именно: уравнение несжимаемой деформации твердого скелета с учетом влияния порового давления жидкости

$$\nabla \cdot \sigma + \rho\vec{g} = 0,$$

где $\rho = (1-\phi)\rho_s + \phi\rho_f$ - плотность среды.

Сведения об используемых в работе функциональных пространствах изложены в [4].

2. Постановка задачи

Уравнения модели фильтрации жидкости в пороупругой среде в отсутствие фазовых переходов имеют вид:

$$\frac{\partial\phi\rho_f}{\partial t} + div(\phi\vec{v}_f\rho_f) = 0,$$

$$\frac{\partial(1-\phi)\rho_s}{\partial t} + div((1-\phi)\vec{v}_s\rho_s) = 0,$$

$$\phi(\vec{v}_f - \vec{v}_s) = -K(\phi)(\nabla p_f + \rho_f \vec{g}),$$

$$div v_s = -a_1(\phi)p_e - a_2(\phi)(\frac{\partial p_e}{\partial t} + \vec{v}_s \cdot \nabla p_e),$$

$$\rho_{tot}\vec{g} + div((1-\phi)\eta(\frac{\partial \vec{v}_s}{\partial x} + \frac{\partial \vec{v}_s^{\,*}}{\partial x})) - \nabla p_{tot} = 0.$$

Для описания процесса используются законы сохранения масс для каждой из фаз, уравнение сохранения импульса для жидкости в форме закона Дарси, реологическое соотношение для пористости и закон сохранения баланса сил.

Здесь ϕ – пористость, ρ_f, ρ_s, v_f, v_s – соответственно истинные плотности и скорости, p_f, p_s – соответственно давления жидкой и твердой фаз, $p_e = p_{tot} - p_f$ – эффективное давление, $p_{tot} = \phi p_f + (1-\phi)p_s$ – общее давление, $\rho_{tot} = \phi\rho_f + (1-\phi)\rho_s$ – плотность двухфазной среды, g – плотность массовых сил, $a_1(\phi)$ – коэффициент объемной вязкости, $a_2(\phi)$ – коэффициент объемной сжимаемости, η – динамическая вязкость твердой среды, $K(\phi)$ – проницаемость, μ – динамическая вязкость жидкости. Далее используется обозначение $k_0(\phi) = K(\phi)/\mu$ – коэффициент фильтрации.

В работе рассматривается следующая квазилинейная система уравнений:

$$\frac{\partial \phi\rho_f}{\partial t} + \frac{\partial \phi\rho_f v_f}{\partial x} = 0, \tag{10}$$

$$\frac{\partial (1-\phi)\rho_s}{\partial t} + \frac{\partial (1-\phi)\rho_s v_s}{\partial x} = 0, \tag{11}$$

$$\phi(v_f - v_s) = -k_0(\phi)(\frac{\partial p_f}{\partial x} + \rho_f g), \tag{12}$$

$$\frac{\partial v_s}{\partial x} = -a_1(\phi)p_e - a_2(\phi)(\frac{\partial p_e}{\partial t} + v_s\frac{\partial p_e}{\partial x}), \tag{13}$$

$$\rho_{tot}\, g + \frac{\partial}{\partial x}(2\eta(1-\phi)\frac{\partial v_s}{\partial x} - p_{tot}) = 0, \tag{14}$$

решаемая в области $Q_T = \Omega \times (0,T)$, $\Omega = (0,1)$ и описывающая одномерное нестационарное движение жидкости в деформируемой пористой среде [4] при краевых и начальных условиях

$$v_s\mid_{x=0,x=1} = v_f\mid_{x=0,x=1} = 0, \quad \phi\mid_{t=0} = \phi^0(x).$$

Задача записана в эйлеровых координатах $(x,t) \in Q_T$.

Вопросы разрешимости начально-краевых задач для системы (10)-(14) исследовались в работах [4–8]. Подобные системы рассматривались в [9, 10].

В работе систему (10)-(14) удается свести к одному вырождающемуся параболическому уравнению для пористости. Предполагается, что истинные плотности жидкости и твердой среды $(\rho_f, \rho_s) = const$, плотность массовых сил $g = 0$, коэффициент объемной вязкости $a_1(\phi) = 0$, динамическая вязкость твердой среды $\eta = 0$, а коэффициент объемной сжимаемости $a_2(\phi) = \beta\phi, \beta = const > 0$. Искомыми же являются величины ϕ, $\vec{v}_s$, $\vec{v}_f$, p_f, p_s.

Тогда квазилинейная система уравнений примет вид:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi v_f}{\partial x} = 0, \tag{15}$$

$$\frac{\partial (1-\phi)}{\partial t} + \frac{\partial (1-\phi)v_s}{\partial x} = 0, \tag{16}$$

$$\phi(v_f - v_s) = -k_0(\phi)\frac{\partial p_f}{\partial x}, \tag{17}$$

$$\frac{\partial v_s}{\partial x} = -\beta\phi(\frac{\partial p_e}{\partial t} + v_s\frac{\partial p_e}{\partial x}), \tag{18}$$

$$\frac{\partial p_{tot}}{\partial x} = 0. \tag{19}$$

Выполним в системе (15)-(19) переход к переменным Лагранжа.

Пусть $\bar{x} = \bar{x}(\tau, x, t)$ - решение задачи Коши

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial \tau} = v_s(\bar{x}, \tau), \quad \bar{x}\mid_{\tau=t} = x.$$

Положим $\xi = \bar{x}(\tau, x, t)\mid_{\tau=0}$ и возьмем за новые переменные ξ и t. Якобиан перехода $J = \frac{\partial\xi}{\partial x}$ находится по формуле

$$J = exp\left(-\int_0^t \frac{\partial v_s}{\partial \bar{x}}(\bar{x}(\tau, x, t), \tau)d\tau\right).$$

С другой стороны, уравнение сохранения массы для твердой фазы

$$\frac{\partial(1-\phi)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}((1-\phi)v_s) = 0$$

можно вдоль траектории $\bar{x}(\tau)$ записать в виде

$$\frac{d}{d\tau}\ln(1-\phi) = -\frac{\partial v_s}{\partial \bar{x}}(\bar{x}(\tau, x, t), \tau),$$

далее, проинтегрировав обе части равенства от 0 до t получим

$$\ln\left(\frac{1-\phi(\xi, t)}{1-\phi^0(\xi)}\right) = -\int_0^t \frac{\partial v_s}{\partial \bar{x}}(\bar{x}(\tau, x, t), \tau)d\tau.$$

Следовательно,

$$\frac{1-\phi(\xi, t)}{1-\phi^0(\xi)} = exp\left(-\int_0^t \frac{\partial v_s}{\partial \bar{x}}(\bar{x}(\tau, x, t), \tau)d\tau\right) = J(\xi, t).$$

Поэтому система (15)-(19) в новых переменных принимает форму

$$\frac{\partial\hat{\phi}}{\partial t} + \frac{(1-\hat{\phi})}{1-\phi^0}\frac{\partial}{\partial\xi}(\hat{\phi}\hat{v}_f) = v_s\frac{(1-\hat{\phi})}{1-\phi^0}\frac{\partial}{\partial\xi}\hat{\phi},$$

$$\frac{\partial(1-\hat{\phi})}{\partial t} + \frac{(1-\hat{\phi})^2}{1-\phi^0}\frac{\partial\hat{v}_s}{\partial\xi} = 0,$$

$$\hat{\phi}(\hat{v}_s - \hat{v}_f) = k(\phi)\frac{1-\hat{\phi}}{1-\phi^0}\frac{\partial\hat{p}_f}{\partial\xi},$$

$$\frac{(1-\hat{\phi})}{1-\phi^0}\frac{\partial\hat{v}_s}{\partial\xi} = -\beta(\hat{\phi})\frac{\partial\hat{p}_e}{\partial t},$$

$$\frac{\partial\hat{p}_{tot}}{\partial\xi} = 0.$$

Поскольку

$$\hat{v}_s \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi}(\hat{\phi}\hat{v}_s) - \hat{\phi}\frac{\partial \hat{v}_s}{\partial \xi},$$

то уравнение неразрывности для жидкой фазы можно привести к виду

$$\frac{1}{1-\hat{\phi}}\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} + \frac{1}{1-\phi^0}\frac{\partial}{\partial \xi}(\hat{\phi}(\hat{v}_f - \hat{v}_s)) + \frac{1}{1-\phi^0}\hat{\phi}\frac{\partial \hat{v}_s}{\partial \xi} = 0.$$

Используя уравнение неразрывности для твердой фазы, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\hat{\phi}}{1-\hat{\phi}}\right) + \frac{1}{1-\phi^0}\frac{\partial}{\partial \xi}(\hat{\phi}(\hat{v}_f - \hat{v}_s)) = 0.$$

Переходя от (ξ, t) к массовым лагранжевым переменным (y, t) по правилу $(1 - \phi^0(\xi))d\xi = dy$, $y(\xi) = \int\limits_0^{\hat{x}}(1-\phi^0(\eta))d\eta \in [0,1]$ и формально заменяя y на ξ, приходим к следующей системе:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\phi}{1-\phi}) + \frac{\partial}{\partial \xi}(\phi(v_f - v_s)) = 0, \tag{20}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(1-\phi) + (1-\phi)^2\frac{\partial v_s}{\partial \xi} = 0, \tag{21}$$

$$\phi(v_f - v_s) = -k_0(\phi)(1-\phi)\frac{\partial p_f}{\partial \xi}, \tag{22}$$

$$(1-\phi)\frac{\partial v_s}{\partial \xi} = -\beta\phi\frac{\partial p_e}{\partial t}, \tag{23}$$

$$\frac{\partial p_{tot}}{\partial \xi} = 0. \tag{24}$$

Из уравнений (21) и (23) имеем:

$$p_e = c(\xi) - \frac{1}{\beta}\ln(\frac{\phi}{1-\phi}). \tag{25}$$

Тогда

$$p_f = p_{tot} - c(\xi) + \frac{1}{\beta}\ln(\frac{\phi}{1-\phi}). \tag{26}$$

Введем функцию $s(\phi)$, определенную равенством

$$s = \frac{\phi}{1-\phi}.$$

Тогда из уравнений (20), (22) и (26) имеем:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi}(-k_0(s)\frac{1}{(1+s)s}\frac{1}{\beta}\frac{\partial s}{\partial \xi} + k_0(s)\frac{1}{1+s}\frac{\partial c(\xi)}{\partial \xi}) = 0, \tag{27}$$

и, следовательно,

$$p_{tot}(0) = p^0_{tot},\ p_f(\xi, 0) = p^0_f,\ \phi(\xi, 0) = \phi^0(\xi),$$

$$c(\xi) = p^0_{tot} - p^0_f + \frac{1}{\beta}\ln(\frac{\phi^0(\xi)}{1-\phi^0(\xi)}). \tag{28}$$

3. Разрешимость начально-краевой задачи в гёльдеровских классах

Для дальнейшего исследования задачи рассмотрим возможные варианты вида функции $c(\xi)$.

Предположим, что $c(\xi) = const$. Тогда (27) примет вид:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi}(-k_0(s)\frac{1}{(1+s)s}\frac{1}{\beta}\frac{\partial s}{\partial \xi}) = 0.$$

Далее, пусть

$$k_0(s) = \beta_1\beta(1+s)s, \beta_1 = const.$$

Возникает уравнение для s:

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \beta_1\frac{\partial^2 s}{\partial \xi^2} \tag{29}$$

с граничными и начальными условиями:

$$s\mid_{\xi=0}= p^0 = const > 0, \quad \frac{\partial s}{\partial \xi}\mid_{\xi=L}= 0, \quad s\mid_{t=0}= a\xi + b,\ \xi \in [0, L]. \tag{30}$$

Исследование задачи (29)-(30) является частным случаем известного результата [11, с. 364]. Сформулируем этот результат.

Рассмотрим краевую задачу для параболического уравнения второго порядка в цилиндрической области $Q_T = \Omega \times (0, T)$. Пусть $L\big(\xi, t, \frac{\partial}{\partial \xi}, \frac{\partial}{\partial t}\big)u(\xi, t)$ линейный параболический дифференциальный оператор с вещественными коэффициентами

$$L\big(\xi, t, \frac{\partial}{\partial \xi}, \frac{\partial}{\partial t}\big)u = \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(\xi, t)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_i \partial \xi_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(\xi, t)\frac{\partial u}{\partial \xi_i} + a(\xi, t)u. \tag{31}$$

Предположим, что этот оператор равномерно параболический, т.е в областях, где решается указанная выше задача, при любых вещественных $\zeta_1, ..., \zeta_n$ выполнено неравенство

$$\nu\zeta^2 \le a_{i,j}(\xi, t)\zeta_i\zeta_j \le \mu\zeta^2,\ (\xi, t) \in \overline{Q}_T,$$

где ν и μ - фиксированные положительные числа.

Предположим, что коэффициенты оператора (31) определены в слое $D^{(T)}_{n+1} = E_n \times (0, T)$. Пусть далее Ω - область в пространстве E_n. Область Ω и её граница S могут быть как конечными, так и бесконечными; граница S должна быть достаточно гладкой. В каждой точке граница должна иметь касательную плоскость. Пусть $n(\zeta)$ - единичный вектор внешней нормали к S в точке ζ. Рассмотрим в цилиндрической области $Q_T = \Omega \times (0, T)$ с боковой поверхностью $S_T = S \times (0, T)$ задачу с косой производной:

$$\left.\begin{array}{l} L\big(\xi, t, \frac{\partial}{\partial \xi}, \frac{\partial}{\partial t}\big)u(\xi, t) = f(\xi, t), \\ u\mid_{t=0}= \varphi(\xi), \\ B\big(\xi, t, \frac{\partial}{\partial \xi}\big)u\mid_{S_T} \equiv \sum\limits_{i=1}^{n} b_i(\xi, t)\frac{\partial u}{\partial \xi_i} + b(\xi, t)u\mid_{S_T}= \Phi(\xi, t). \end{array}\right\} \tag{32}$$

Предположим, что функции $b_i(\xi, t)$ всюду в S_T удовлетворяют условию

$$\left|\sum_{i=1}^{n} b_i(\xi, t)n_i(\xi)\right| \ge \delta > 0. \tag{33}$$

Это условие можно записать в виде $(b \cdot n) \geq \delta > 0$, где $b = (b_1, ..., b_n)$, и оно означает, что вектор b ни в одной точке не лежит в касательной плоскости к S. Краевое условие (32) можно записать в виде

$$|b(\xi, t)| \frac{\partial u}{\partial I} + bu \,|_{S_T} = \Phi,$$

где $I = \frac{b}{|b|}$.

В задаче (32) при неограниченной Ω нужно ещё ограничить рост решения при $|\xi| \to \infty$. Мы будем рассматривать эту задачу только в классе функций $H^{l, \frac{l}{2}}$, элементы которого ограничены. Будем предполагать, что функции f, ϕ, Φ в (32) удовлетворяют условиями согласования при $\xi \in S$, $t = 0$. Эти условия состоят в том что производные $\frac{\partial^k u}{\partial t^k} \,|_{t=0}$, которые могут быть определены при $t = 0$ с помощью уравнения и начального условия, должны удовлетворять при $\xi \in S$ краевым условиям (32). Введем обозначения

$$u^{(k)}(\xi) = \frac{\partial^k u(\xi, t)}{\partial t^k} \,|_{t=0},$$

$$A\left(\xi, t, \frac{\partial}{\partial \xi}\right) u = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(\xi, t) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_i \partial \xi_j} - \sum_{i=1}^{n} a_i(\xi, t) \frac{\partial u}{\partial \xi_i} - au. \tag{34}$$

Очевидно, что функции $u^{(k)}(\xi)(k = 0, 1)$ определяются следующим образом:

$$u^0(\xi) = \phi(\xi), \; u^1(\xi) = A\left(\xi, 0, \frac{\partial}{\partial \xi}\right) \phi(\xi) + f(\xi, 0), \tag{35}$$

а остальные функции находятся из рекуррентных соотношений

$$u^{(k+1)}(\xi) = \frac{\partial^k}{\partial t^k} A\left(\xi, t, \frac{\partial}{\partial \xi}\right) u(\xi, t) + \frac{\partial^k f(\xi, t)}{\partial t^k} \,|_{t=0} =$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} A^{(j)}\left(\xi, 0, \frac{\partial}{\partial \xi}\right) u^{(k-j)}(\xi) + f^{(k)}(\xi), \tag{36}$$

где $A^{(j)}\left(\xi, t, \frac{\partial}{\partial \xi}\right)$ - оператор, получающийся из оператора A (34) дифференцированием коэффициентов по t j раз.

Будем говорить, что для задачи (32) выполняются условия согласования порядка $m \geq 0$, если

$$u^{(k)}(\xi) \,|_{\xi \in S} = \frac{\partial^k \Phi}{\partial t^k} \,|_{t=0} = \Phi^{(k)}(\xi) \quad (k = 0, ..., m)$$

или соответственно

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k} \left[\sum_{i=1}^{n} b_i(\xi, t) \frac{\partial u}{\partial \xi_i} + b(\xi, t) u\right] \Bigg|_{\substack{t=0 \\ \xi \in S}} = \Phi^{(k)}(\xi) \quad (k = 0, ..., m),$$

т.е.

$$\sum_{j=o}^{k} \binom{k}{j} \left[\sum_{i=1}^{n} b_i^{(k-j)}(\xi) \frac{\partial u^{(j)}(\xi)}{\partial \xi_i} + b^{(k-j)}(\xi) u^{(j)}(\xi)\right] \Bigg|_{\xi \in S} = \Phi^{(k)}(\xi) \quad (k = 0, ..., m).$$

Сформулируем основной результат о разрешимости задачи (32) в виде теоремы.

Теорема 1. *([11, с. 364]). Пусть $l>0$ - нецелое число, $S\in H^{l+2}$, коэффициенты оператора L принадлежат классу $H^{l,l/2}(\overline{Q}_T)$, и, наконец, $b_i, b\in H^{l+1,\frac{l}{2}+\frac{1}{2}}$. Тогда при любых $f\in H^{l,l/2}(\overline{Q}_T), \varphi\in H^{l+2}(\overline{\Omega}), \Phi\in H^{l+1,\frac{l+1}{2}}(\overline{S}_T)$, удовлетворяющих условию согласования порядка $\left[\frac{l+1}{2}\right]$, задача (32) имеет единственное решение из класса $H^{l+2,\frac{l}{2}+1}(\overline{Q}_T)$, причем*

$$|u|_Q^{(l+2)}\le C\left(|f|_Q^{(l)}+|\varphi|_\Omega^{(l+2)}+|\Phi|_{S_T}^{(l+1)}\right)$$

с постоянной, не зависящей от f,φ,Φ.

4. Локализация решений уравнения фильтрации

Вернемся к уравнению теплопроводности (27), полагая, что $c(\xi)$ – заданная в (28) функция координаты ξ:

$$\frac{\partial s}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial \xi}(-k_0(s)\frac{1}{(1+s)s}\frac{1}{\beta}\frac{\partial s}{\partial \xi}+k_0(s)\frac{1}{1+s}\frac{\partial c(\xi)}{\partial \xi})=0.$$

Полагая

$$k_0=\tilde{k}\frac{s^3}{1+s},$$

получим

$$\frac{\partial s}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial \xi}(d(s)\frac{\partial s}{\partial \xi})+\frac{\partial f(s)}{\partial \xi}, \tag{37}$$

где

$$d(s)=\frac{\tilde{k}}{\beta}\frac{s^2}{(1+s)^2},\ \ f(s)=-\tilde{k}c'(\xi)\frac{s^3}{(1+s)^2},$$

причем предполагается, что существует положительная постоянная M такая, что справедливы следующие оценки:

$$0\le s\le M<\infty,\quad \nu_1 s^2\le d(s)\le \nu_2 s^2,\quad \nu_1=\frac{\tilde{k}}{\beta}\frac{1}{(1+M)^2},\quad \nu_2=\frac{\tilde{k}}{\beta},$$

$$|f(s)|\le \nu_3 s^3,\quad \nu_3=|\tilde{k}\max_{\xi}|c'||,\quad g=const\ge 0.$$

Основной результат настоящего раздела можно сформулировать следующим образом: пусть $s(\xi,t)$ – слабое решение (37) в $K_{\rho_0}(\xi_0)\times(0,\infty)$, $K_{\rho_0}(\xi_0)=\{(\xi,\xi_0):|\xi-\xi_0|<\rho_0\}$, такое, что $s_0(\xi)\equiv s(\xi,0)=0$ в $K_{\rho_0}(\xi_0)$. Тогда существуют $T>0$ и $\rho(t)\in(0,\rho_0)$ такие, что $s(\xi,t)=0$ для всех $t\le T$ и $\xi\in K_\rho(\xi_0)$. При дополнительных предположениях на характер обращения в нуль $s_0(\xi)$ доказывается, что $s(\xi,t)=0$ в $K_{\rho_0}(\xi_0)$. Здесь не затрагиваются вопросы существования соответствующего решения [12]. Доказательство использует локальный энергетический метод, развитый в работах [13, 14].

Определение 1. *Неотрицательная ограниченная измеримая функция $s(\xi,t)$ ($0\le s(\xi,t)\le M$), определенная в $\Omega\times(0,\infty)$, есть слабое решение уравнения (37) с начальным условием $s_0(\xi)$, если для $\forall T>0$ и любого открытого подмножества $\Omega_1\subset R^1$ выполняются следующие предположения*

$$s\in L_\infty(0,T,W_2^1(\Omega)),\quad \frac{\partial s^3}{\partial \xi}\in L_2[(0,T)\times\Omega_1], \tag{38}$$

$$\lim_{t\to 0}\int\limits_{\Omega_1} s d\xi=\int\limits_{\Omega_1} s_0 d\xi \tag{39}$$

и для $\forall \varphi(\xi,t) \in \overset{o}{C}{}^{\infty}((0,T)\times\Omega_1)$

$$\int\limits_0^\infty \int\limits_\Omega \left[d(s)\frac{\partial s}{\partial \xi}\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} - \frac{\partial f(s)}{\partial \xi}\varphi \right] d\xi\, dt = \int\limits_0^\infty \int\limits_\Omega s\frac{\partial \varphi}{\partial t}\, d\xi\, dt + \int\limits_\Omega s(\xi,0)\,\varphi(\xi,0)\, d\xi. \tag{40}$$

Введем обозначения

$$A(\rho,t) \equiv \int\limits_{K_\rho(\xi_0)} s^2(\xi,t)d\xi, \quad B(\rho,t) \equiv \int\limits_{K_\rho(\xi_0)} s^2\left(\frac{\partial s}{\partial \xi}\right)^2 d\xi$$

и без ограничения общности будем считать $\xi_0 = 0$.

Лемма 1. *([1, с. 59]). Пусть выполнены предположения (38), (39). Тогда для $s(\rho,t)$ справедливы оценки*

$$s^2(\rho,t) \le \tilde{C}A^{\frac{1}{3}}(\rho,t)[B^{\frac{1}{2}}(\rho,t) + \rho^{-\frac{3}{2}}A(\rho,t)]^{\frac{2}{3}}, \tag{41}$$

где $\tilde{C} = 2C, C$– положительная постоянная, не зависящая от радиуса ρ.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия (38)-(40) и дополнительно $t\in[0,T]$, $\quad T \le T^*$, где*

$$T^* \le min\left(\frac{1}{M^2}\left(\frac{min(1,\nu_1)}{3\nu_3}\right)^2, \left(\frac{\rho_0^4-\rho^4}{48(\nu_2 K)^2} w^{-\frac{1}{3}}(\rho_0,t)\right)^3\right).$$

Если $s(\xi,t)$ - слабое решение (37) и $s_0 = 0$ в $K_{\rho_0}(\xi_0)$, $0<\rho_0<dist(\xi_0,\partial G)$, то $s(\xi,t) = 0$ почти всюду в $K_{\rho_1(t)}(\xi_0)$ при $0\le t\le T\le T^*$. Причем

$$\rho_1(t) = \left(\rho_0{}^4 - L\, t^{\frac{1}{3}}(w(\rho_0,t))^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{4}},$$

где

$$L = 4C_2^2\cdot Q(r), \quad r=1,$$

$$w(\rho_0,t) = \sup_{0\le\tau\le t}\int\limits_0^\tau B(\rho_0,s)ds, \quad Q(r) = 12\left(\frac{1}{2}\rho_0^{\frac{3}{2}} + T^{\frac{1}{2}}M\rho_0^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{4}{3}}(\nu_2)^2,$$

$$K = \tilde{C}\,[\frac{1}{2}\rho_0{}^{\frac{3}{2}} + T^{\frac{1}{2}}\,\rho_0{}^{\frac{1}{2}}\,M]^{\frac{2}{3}},$$

а постоянная $\tilde{C}$ определена в (41).

Доказательство. Положим в (40) $\varphi(\xi,t) = \varphi_n(|\xi-\xi_0|)\xi_k(t)\frac{1}{h}\int\limits_t^{t+h} T_l(s(\xi,\tau))d\tau$, где $h\in(0,T-t)$,

$$T_l(s) \ = min(|s|,l) sign\, s,$$

$$sign\, s = \begin{cases} 1, s>0, \\ 0, s=0, \\ -1, s<0, \end{cases}$$

$$\varphi_n(r) = \begin{cases} 1, \quad r\in[0,\rho-1/n], \\ n(\rho-r), \quad r\in[\rho-1/n,\rho], \\ 0, \quad r\in[\rho,\rho_0], \end{cases}$$

$$\xi_k(r) = \begin{cases} 1, \quad r \in [0, t-1/k], \\ k(t-r), \quad r \in [t-1/k, t], \\ 0, \quad r \in [t, T^*]. \end{cases}$$

Имеем

$$\int\limits_0^\infty \int\limits_{K_{\rho_0}(\xi_0)} \left[d(s)\frac{\partial s}{\partial \xi}\, \xi_k(\tau) \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\varphi_n \frac{1}{h}\int\limits_t^{t+h} T_l(s(\xi,\psi))d\psi\right) - \frac{\partial f(s)}{\partial \xi}\,\varphi(\xi,\tau)\right] d\xi\, d\tau =$$

$$= \int\limits_0^\infty \int\limits_{K_{\rho_0}(\xi_0)} s\varphi_n \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\xi_k \frac{1}{h}\int\limits_t^{t+h} T_l(s(\xi,\psi))d\psi\right) d\xi d\tau + \int\limits_{K_{\rho_0}(\xi_0)} s(\xi,0)\varphi(\xi,0)d\xi. \tag{42}$$

С учетом теоремы Лебега при $k \to \infty$ получим

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_0^\infty \int\limits_{K_{\rho_0}(\xi_0)} s\,\varphi_n \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\xi_k \frac{1}{h}\int\limits_t^{t+h} T_l(s(\xi,\psi))d\psi\right) d\xi\, d\tau =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \int\limits_0^\infty \int\limits_{K_{\rho_0}(\xi_0)} s\,\varphi_n \frac{\partial \xi_k}{\partial \tau}\frac{1}{h}\int\limits_t^{t+h} T_l(s(\xi,\psi))d\psi\, d\xi\, d\tau +$$

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_0^\infty \int\limits_{K_{\rho_0}(\xi_0)} s\,\varphi_n \xi_k \frac{1}{h}\Big(T_l(s(\xi,\tau+h)) - T_l(s(\xi,\tau))\Big) d\xi\, d\tau =$$

$$= -\lim_{k\to\infty} k \int\limits_{t-1/k}^{t} \int\limits_{K_{\rho_0}(\xi_0)} s\,\varphi_n \frac{1}{h}\int\limits_t^{t+h} T_l(s(\xi,\psi))d\psi\, d\xi\, d\tau +$$

$$\int\limits_0^\infty \int\limits_{K_{\rho_0}(\xi_0)} s\,\varphi_n \frac{1}{h}\Big(T_l(s(\xi,\tau+h)) - T_l(s(\xi,\tau))\Big) d\xi\, d\tau =$$

$$= -\int\limits_{K_{\rho_0}(\xi_0)} s\,\varphi_n \frac{1}{h}\int\limits_t^{t+h} T_l(s(\xi,\psi))d\psi\, d\xi +$$

$$\int\limits_0^\infty \int\limits_{K_{\rho_0}(\xi_0)} s\,\varphi_n \frac{1}{h}\Big(T_l(s(\xi,\tau+h)) - T_l(s(\xi,\tau))\Big) d\xi\, d\tau$$

и, следовательно, при $h \to 0$ тождество (42) можно представить в виде

$$\int\limits_0^t \int\limits_{K_{\rho_0}(\xi_0)} \left[d(s)\frac{\partial s}{\partial \xi}\frac{\partial \varphi_n}{\partial \xi} T_l + \left(d(s)\frac{\partial s}{\partial \xi}\varphi_n \frac{\partial T_l}{\partial \xi} - \frac{\partial f(s)}{\partial \xi}\right)\varphi_n T_l \right] d\xi\, d\tau =$$

$$= -\int\limits_{K_{\rho_0}(\xi_0)} s\varphi_n T_l\, d\xi + \int\limits_{K_{\rho_0}(\xi_0)} s_0(\xi)\varphi_n T_l(s(\xi,0))\, d\xi.$$

Соответственно, после предельного перехода $l \to \infty$ получим

$$\int\limits_0^t \int\limits_{K_{\rho_0}(\xi_0)} \left[sd(s)\frac{\partial s}{\partial \xi}\frac{\partial \varphi_n}{\partial \xi} + \left(d(s)\left(\frac{\partial s}{\partial \xi}\right)^2 \varphi_n - \frac{\partial f(s)}{\partial \xi}\right)\varphi_n s\right] d\xi\, d\tau =$$

$$= -\int\limits_{K_{\rho_0}(\xi_0)} s^2\varphi_n\, d\xi + \int\limits_{K_{\rho_0}(\xi_0)} s_0^2(\xi)\varphi_n\, d\xi.$$

Наконец, устремляя $n \to \infty$, выводим

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^t \int\limits_{K_{\rho_0}(\xi_0)} sd(s)\frac{\partial s}{\partial \xi}\frac{\partial \varphi_n}{\partial \xi}\, d\xi\, d\tau =$$

$$= -\lim_{n\to\infty} n \int\limits_0^t \int\limits_{\rho-1/n<|\xi-\xi_0|<\rho} sd(s)\frac{\partial s}{\partial \xi}\, d\xi\, d\tau = -\int\limits_0^t sd(s)\frac{\partial s}{\partial \xi}\, d\tau.$$

Тем самым, приходим к равенству ($\xi_0 = 0$)

$$\int\limits_0^\rho s^2 d\xi + \int\limits_0^t \int\limits_0^\rho \left[d(s)\,(\frac{\partial s}{\partial \xi})^2 - s\frac{\partial f}{\partial \xi}\right] d\xi\, d\tau = \int\limits_0^t sd(s)\,\frac{\partial s}{\partial \xi}(\rho,\tau)\, ds\, d\tau. \tag{43}$$

Положим

$$a(\rho,t) = \sup_{0\le\tau\le t} A(\rho,\tau).$$

Из тождества (43) следует

$$a(\rho,t) + \nu_1 w(\rho,t) \le \nu_2 I_1 + I_2, \tag{44}$$

где

$$I_1 = \int\limits_0^t s(\rho,\tau)^3 \left|\frac{\partial s}{\partial \xi}(\rho,\tau)\right| d\tau,$$

$$I_2 = \int\limits_0^t \int\limits_0^\rho s(\rho,\tau)\left|\frac{\partial f(s)}{\partial \xi}\right| d\xi d\tau.$$

Используя неравенство Гёльдера и (41), получим

$$I_1 = \int\limits_0^t s^3(\rho,\tau)\left|\frac{\partial s}{\partial \xi}(\rho,s)ds\right| \le$$

$$\le \left(\int\limits_0^t s^2(\rho,\tau)\left(\frac{\partial s}{\partial \xi}(\rho,\tau)\right)^2 d\tau\right)^{\frac12} \left(\int\limits_0^t s^4(\rho,\tau)\, d\tau\right)^{\frac12} = \left(\frac{\partial w}{\partial \rho}\right)^{\frac12} a_1(\rho,t),$$

$$a_1(\rho,t)\equiv\Big(\int\limits_0^t s^4(\rho,\tau)d\tau\Big)^{\frac12}\le$$

$$\tilde C\Big(\int\limits_0^t (B^{\frac12}(\rho,\tau)+\rho^{-\frac32}A(\rho,\tau))^2\,d\tau\Big)^{\frac13}\Big(\int\limits_0^t A^2(\rho,\tau)d\tau\Big)^{\frac16}\le$$

$$\le\tilde C\Bigg(\Big(\int\limits_0^t B(\rho,\tau)d\tau\Big)^{\frac12}+\rho^{-\frac32}\Big(\int\limits_0^t A^2(\rho,\tau)d\tau\Big)^{\frac12}\Bigg)^{\frac23}t^{\frac16}\,a^{\frac13}(\rho,t)\le$$

$$\le\tilde C\rho^{-\frac32}t^{\frac16}\Big(w^{\frac12}(\rho,t)\,a^{\frac12}(\rho,t)\rho^{\frac32}+T^{\frac12}a^{\frac32}(\rho,t)\Big)^{\frac23}.$$

Но $\rho<\rho_0$ и, кроме того,

$$2w^{\frac12}\,a^{\frac12}\le a+w,$$
$$a^{\frac32}(\rho,t)\le a(\rho,t)\,a^{\frac12}(\rho_0,t)\le a(\rho,t)\,\rho_0{}^{\frac12}\,M.$$

Поэтому

$$a_1(\rho,t)\le\tilde C\rho^{-\frac32}t^{\frac16}\Bigg(\frac{\rho_0^{\frac32}}{2}(a+w)+T^{\frac12}a\rho_0^{\frac12}M_0\Bigg)^{\frac23}\le$$

$$\le\tilde C\rho^{-\frac32}t^{\frac16}(a+w)^{\frac23}\Big(\frac12\rho_0^{\frac32}+T^{\frac12}\rho_0^{\frac12}M\Big)^{\frac23}.$$

Таким образом,

$$I_1\le Kt^{\frac16}\,\rho^{-\frac32}\,[a(\rho,t)+w(\rho,t)]^{\frac23}\left(\frac{\partial w}{\partial\rho}\right)^{\frac12},$$

где

$$K=\tilde C\,[\frac12\rho_0{}^{\frac32}+T^{\frac12}\,\rho_0{}^{\frac12}\,M]^{\frac23}.$$

Далее оценим I_2.
Имеем

$$\left|\frac{\partial f}{\partial\xi}\right|\le 3\nu_3 s^2\left|\frac{\partial s}{\partial\xi}\right|.$$

Тогда

$$I_2\le 3\nu_3\Bigg(\int\limits_0^t\int\limits_0^\rho\left(\frac{\partial s}{\partial\xi}\right)^2 s^2d\xi d\tau\Bigg)^{\frac12}\Bigg(\int\limits_0^t\int\limits_0^\rho s^4d\xi d\tau\Bigg)^{\frac12}\le$$

$$\le 3\nu_3w^{\frac12}M\Bigg(\int\limits_0^t\int\limits_0^\rho s^2d\xi d\tau\Bigg)^{\frac12}\le 3\nu_3Mw^{\frac12}a^{\frac12}t^{\frac12}\le\frac12 3\nu_3Mt^{\frac12}(a+w).$$

Следовательно, (44) принимает вид

$$min(1,\nu_1)(a(\rho,t)+w(\rho,t))\le\nu_2I_1+I_2\le$$

$$\le t^{\frac16}\,\nu_2K\rho^{-\frac32}\,(a(\rho,t)+w(\rho,t))^{\frac23}\left(\frac{\partial w}{\partial\rho}\right)^{\frac12}+\frac12 3\nu_3Mt^{\frac12}(a+w).$$

Далее выберем t таким образом, что

$$3\nu_3Mt^{\frac12}\le min(1,\nu_1).$$

Тогда
$$\frac{1}{2}(a+w) \le \nu_2 K t^{\frac{1}{6}} \rho^{-\frac{3}{2}} (a+w)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{\partial w}{\partial \rho}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Поэтому
$$\rho^{\frac{3}{2}} w^{\frac{1}{3}} \le (a+w)^{\frac{1}{3}} \rho^{\frac{3}{2}} \le 2\nu_2 K t^{\frac{1}{6}} \left(\frac{\partial w}{\partial \rho}\right)^{\frac{1}{2}},$$

и, следовательно,
$$\rho^3 w^{\frac{2}{3}} \le K^* t^{\frac{1}{3}} \frac{\partial w}{\partial \rho}, \tag{45}$$

где $K^* = 4(\nu_2 K)^2$.

Интегрирование (45) по ρ от ρ_1 до ρ_0 дает
$$\frac{1}{4}(\rho_0^4 - \rho_1^4) \le 3K^* t^{\frac{1}{3}} (w^{\frac{1}{3}}(\rho_0, t) - w^{\frac{1}{3}}(\rho_1, t)).$$

Откуда имеем неравенство
$$\rho_1^4 - \rho_0^4 + 12K^* t^{\frac{1}{3}} w^{\frac{1}{3}}(\rho_0, t) \ge 12K^* t^{\frac{1}{3}} w^{\frac{1}{3}}(\rho_1, t). \tag{46}$$

Выбирая t таким образом, чтобы выполнялось равенство
$$\rho_1^4 = \rho_0^4 - 12K^* \, t^{\frac{1}{3}} \, w^{\frac{1}{3}}(\rho_0, t),$$

получим, что $w(\rho, t) = 0$ для всех $\rho \le \rho_1$, то есть $s(\xi, t) = 0$ почти всюду в $K_\rho(0)$ при $\rho \le \rho_1$ и
$$0 \le t \le min\left(\frac{1}{M^2}\left(\frac{\min(1,\nu_1)}{3\nu_3}\right)^2, \left(\frac{\rho_0^4 - \rho^4}{12K^*} w^{-\frac{1}{3}}(\rho_0, t)\right)^3\right).$$

□

Список литературы

1. Ахмерова И.Г., Папин А.А., Токарева М.А. Математические модели механики неоднородных сред. Учебное пособие. — Барнаул, 2012.

2. Terzaghi K. Theoretical Soil Mechanics. — New York : Jhon Wiley, 1943.

3. Scempton A.W. Effective stress in soils, concrete and ricks // Proceeding of the Conference on Pore Pressure and Suction in soils. — London : Butterworths, 1960. — P. 4–16.

4. Токарева М.А. Корректность начально-краевых задач для уравнений фильтрации в пороупругих средах : Дис.... канд. физ.-мат. наук / Токарева М.А. — Барнаул, 2018.

5. Papin A.A., Tokareva M.A. On Local solvability of the system of the equation of one dimensional motion of magma // Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics. — 2017. — Vol. 10, no. 3. — P. 385–395.

6. Papin A.A., Tokareva M.A. Correctness of the initial-boundary problem of the compressible fluid filtration in a viscous porous medium // IOP Conf.Series: Journal of Physics: Conf. Series. — 2017. — Vol. 894.

7. Tokareva M.A. Solvability of initial boundary value problem for the equations of filtration in poroelastic media // Journal of Physics: Conference Series. — 2016. — Vol. 722.

8. Tokareva M.A. Localization of solutions of the equations of filtration in poroelastic media // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. — 2015. — Vol. 8, no. 4. — P. 467–477.

9. Папин А.А. Существование решения "в целом"уравнений одномерного неизотермического движения двухфазной смеси. I. Постановка задачи и вспомогательные утверждения // Сибирский журнал индустриальной математики. — 2006. — Т. 9, № 2(26). — С. 116–136.

10. Папин А.А. Существование решения "в целом"уравнений одномерного неизотермического движения двухфазной смеси. II. Результаты о разрешимости // Сибирский журнал индустриальной математики. — 2006. — Т. 9, № 3(27). — С. 111–123.

11. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н., Солонников В.А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М., 1967.

12. Калашников А.С. Некоторые вопросы качественной теории нелинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка // Успехи математических наук. — 1987. — Т. 42, № 2(254). — С. 135–176.

13. Antontsev S.N., Diaz J.I., Shmarev S. Energy Methods for Free Boundary Problems. Applications to Nonlinear PDEs and Fluid Mechanics // Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications. — Washington D.C., 2002. — 331 p.

14. Favini, A., Marinoschi G. Degenerate Nonlinear Diffusion Equations. — Springer, 2012. — 143 p.

15. Соболев С.Л. Избранные вопросы теории функциональных пространств и обобщенных функций. — М., 1989.

16. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. — Новосибирск, 1988.