УДК 517.947

Асимптотика решения первой начально-краевой задачи для системы малых колебаний вращающейся жидкости

Янов С.И.
Алтайский государственный педагогический университет, г. Барнаул
ifmo-mapm@uni-altai.ru

Аннотация

В работе изучается асимптотика при $t \to \infty$ решения первой начально-краевой задачи для системы малых колебаний вращающейся жидкости.

Ключевые слова: асимптотика решения, первая начально-краевая задача, система малых колебаний вращающейся жидкости.

Исследуется асимптотика решения первой начально-краевой задачи для системы С.Л. Соболева [1]:

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{V_t} - [\overrightarrow{V} \times \overrightarrow{\omega}] = 0,\\
&div\,\overrightarrow{V} = 0,\\
&\overrightarrow{V}|_{t=0} = 0, P|_{z=0} = g(t, y'), y' \in \mathbb{R}^2, \overrightarrow{\omega} = (0, 0, 1).
\end{aligned} \tag{1}$$

Согласно закону Блеза Паскаля (1623-1662): Давление, производимое на жидкость или газ, передается в любую точку без изменений во всех направлениях. Поэтому, естественно предположить, что функция

$$g(t, x, y) = P|_{z=0}$$

обладает свойством

$$\frac{\partial g(t, x + \rho\cos\varphi, y + \rho\sin\varphi)}{\partial\rho} = 0$$

при всех t и $(x + \rho\cos\varphi, y + \rho\sin\varphi) \in \sup pg \subset \langle x' : |x'| < R\rangle$.

Ранее асимптотика решений различных задач для системы (1) исследовалась в работах С.Л. Соболева [1], В.Н. Масленниковой [2], С.В. Успенского, Г.В. Демиденко [3], С.В. Успенского, Е.Н. Васильевой [4,5], С.И. Янова [5].

Асимптотика решения первой краевой задачи для уравнения Соболева в работах [6,7], там было доказано, что решение существует и единственно [6] §3.2 теорема 3.3, и при условии $g(t, x') = O(1/t^{2+\alpha})$, $g_x(t, x') = O(1/t^{\alpha+2})$, $g_y(t, x') = O(1/t^{\alpha+2})$ когда $t \to \infty$, $0 \le \alpha$, что $P = O(1/t^{2/5})$, [7] §1.5 Теорема 2.1. В работе [8] было приближенно описано поведение решения задачи (1). Настоящая работа уточняет результаты работы [8] для случая, когда функция $g(t, x')$ финитна по времени $supp\, g \subset (t', t'')$. Доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $g(t, x') \in C_0^\infty(R^2)$ при каждом фиксированном t, трижды непрерывно дифференцируемая функция по времени t с носителем в интервале (t', t''), $0 < t' < t''$. Обозначим $\bar{x} = (x, y, z)$. Тогда имеют место асимптотические выражения при фиксированном $z > 0$ и $t \to \infty$:*

$$\begin{aligned}
V_1(t, \bar{x}) &= O(t^{-2/5}),\\
V_2(t, \bar{x}) &= O(t^{-2/5}),\\
V_3(t, \bar{x}) &= O(t^{-2/5}),\\
P(t, \bar{x}) &= O(t^{-2/5}).
\end{aligned} \tag{2}$$

Доказательство. С.Л. Соболевым доказано, что компонента давления P решения задачи (1) удовлетворяет уравнению

$$\Delta P_{tt} + P_{zz} = 0. \tag{3}$$

Кроме этого $P|_{z=0} = g(t, x')$.

Также хорошо известно, [6] §3.2, что решение задачи (3) существует и единственно, причем получено представление P, [6] §3.2 стр. 52

$$P = \frac{1}{4\sqrt{n}\Gamma(3.2)}(D_t^2 \int\limits_{R^2} \frac{z}{r^3} \int\limits_0^t (t-\tau)J_0(\frac{\rho}{r}(t-\tau))g(\tau, y')d\tau dy' + \int\limits_{R^2} \frac{z}{r^3} \int\limits_0^t (t-\tau)J_0(\frac{\rho}{r}(t-\tau))g(\tau, y')d\tau dy'), \tag{4}$$

где r $= \sqrt{z^2 + |x' - y'|^2}$, $\rho = |x' - y'|$,

$\Gamma(3.2)$ – значение гамма функции в точке 3.2 ,

$J_0(\nu)$ – функция Бесселя нулевого порядка.

Поведение полученных интегралов при $t \to \infty$ устанавливается после замены $y' - x' = u'$, $(|u'| = \rho)$, перехода в полярную систему координат и интегрирования по частям по ρ, с помощью следующей леммы.

Лемма 1. *Если выполнены условия теоремы, то при* $t \to \infty$

$$I = -\frac{1}{2n} \int\limits_{K^2} \frac{1}{r} \int\limits_0^t J_0(\frac{\rho}{r}(t-\tau))g(\tau, x' + w')d\tau dw' = O(t^{-2/5}).$$

Доказательство.

$$I = (\text{при больших } t > t'') = -\frac{1}{2n} \int\limits_{R^2} \frac{1}{r} \int\limits_{t'}^{t''} J_0(\frac{\rho}{r}(t-\tau))g(\tau, x' + w')d\tau dw' =$$

переходя в полярную систему координат, будем иметь

$$= -\frac{1}{2n} \int\limits_0^{2n} \int\limits_0^{(t-t'')^{-1/5}} \frac{\rho}{r} \int\limits_{t'}^{t''} J_0(\frac{\rho}{r}(t-\tau))g d\tau d\rho d\varphi - \frac{1}{2n} \int\limits_0^{2n} \int\limits_{(t-t'')^{-1/5}}^{R} \frac{\rho}{r} \int\limits_{t'}^{t''} J_0(\frac{\rho}{r}(t-\tau))g d\tau d\rho d\varphi = I_1 + I_2.$$

Имеем, $|I_1| \le C_1(t - t'')^{-2/5}$, в силу ограниченности функций g и J_0 .

Оценим I_2. При больших $t > t''$, $t' < \tau < t''$ выполняется

$$\frac{\rho}{r}(t-\tau) \geqslant \frac{1}{r}(t-t'')(t-t'')^{-1/5} \ge (t-t'')^{4/5}/(z^2+R^2)^{1/2}.$$

Поэтому из асимптотического выражения $J_0(x)$:

$$J_0(x) = \sqrt{\frac{2}{nx}}\cos(x - \frac{n}{4}) + O(x^{-3/2}) \qquad \text{при} \qquad x \to \infty,$$

[9] §23 стр. 352 формула (23), получим

$$|I_2| \le C_2(t-t'')^{-2/5} \qquad \text{при} \qquad t \to \infty.$$

Лемма доказана. □

Асимптотические выражения для компонент скорости получаются из представления [7] §2.6 , см. (2.37) . Теорема доказана. □

Список литературы

1. Соболев С.Л. Об одной новой задаче математической физики // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1954. — Т. 18, № 1. — С. 3–50.

2. Масленникова В.Н. Оценки в L_p и асимптотика при $t \to \infty$ решения задачи Коши для системы Соболева // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1968. — Т. 103. — С. 117–141.

3. Успенский С.В., Демиденко Г.В. О поведении на бесконечности решений одной задачи С.Л. Соболева // Сиб. мат. журн. — 1983. — Т. 24, № 5. — С. 199–210.

4. Успенский С.В., Васильева Е.Н. Качественное исследование решения одной задачи С.Л. Соболева при $t \to \infty$ // Тр. МИАН. — 1995. — Т. 210. — С. 274–283.

5. Успенский С.В., Васильева Е.Н., Янов С.И. О дифференциальных свойствах решения первой смешанной краевой задачи для системы Соболева // Тр. МИАН. — 1999. — Т. 227. — С. 311–319.

6. Янов С.И. Пространства типа Соболева-Винера и асимптотические свойства их функций. — Барнаул : изд-во БГПУ, 2007.

7. Янов С.И. Приложения пространств типа Соболева- Винера. — Барнаул : изд-во АлтГПА, 2012.

8. Янов С.И. О скоростях вращающейся жидкости при малых колебаниях на дне // Вестник АлтГПУ. Серия: естественные и точные науки. — 2015. — № 25. — С. 36–39.

9. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. — М. : Наука, 1981.