УДК 519.6

О перспективах методов дробления параметров в комплексных интервальных арифметиках

Дронов В.С.
Алтайский государственный университет, г. Барнаул
planeswalker@rambler.ru

Аннотация

Рассматриваются перспективы применения методов дробления параметров в различных комплексных интервальных арифметиках. Сравниваются прямоугольная, секторная и круговая арифметики в смысле удобства базового подхода к комплексному интервалу и соответствия их операций требованиям организаций методов дробления параметров.

Ключевые слова: интервальный анализ, комплексная интервальная арифметика, методы дробления параметров

1. Мотивации и определения

Основной идеей интервального анализа является рассмотрение промежутков данных, содержащих неопределённость, как отдельных объектов. Ничто не ограничивает эту идею только вещественной природой данных (хотя впервые применена она была именно к ним, и наибольшее развитие получила именно в действительном случае). Так, в [1] приводятся примеры, где комплексные интервальные задачи естественным образом возникают в физике твёрдого тела и термодинамике, в [2] и [3] — в робототехнике; существуют также многочисленные внутриматематические мотивации для постановки подобных задач, вроде вопросов устойчивости решений и так далее. Тем не менее, отсутствие порядка на поле комплексных чисел приводит к тому, что интервал в комплексном случае не вводится столь же естественно и безальтернативно, как «брус» в случае действительных данных.

Прямой аналогией с действительным случаем является прямоугольная комплексная арифметика IC_{rec}, где в качестве базового объекта рассматривается прямоугольник комплексной плоскости, а неопределённость естественно рассматривать как независимую неопределённость в мнимой и действительной части комплексного числа:

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \{x \in \mathbb{C} : Re(x) \in \mathbf{a}, Im(x) \in \mathbf{b}\}$$

(Здесь и далее жирным шрифтом выделяются интервалы, то есть $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ – набор двух действительных интервалов). Тем не менее, если рассматривать неопределённость как удалённость на комплексной плоскости от некоторой точки, то естественной становится круговая арифметика IC_{circ} с базовым объектом

$$\langle c, r\rangle = \{x \in \mathbb{C} : |c - x| < r\}$$

В круговой арифметике, в отличие от прямоугольной, неопределённость задаётся только одним параметром — радиусом — вместо двух, что положительно сказывается на сложности расчётов. Другой естественной постановкой является введение аналога прямоугольного интервала через полярную форму комплексного числа. Базовым объектом в арифметике IC_{sec} является секторный интервал:

$$\langle \mathbf{r}, [\alpha_1, \alpha_2]\rangle = \{x \in \mathbb{C} : x = re^{i\alpha}, r \in \mathbf{r}, \alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]\}$$

Конкретные правила по проведению арифметических операций над объектами в этих арифметиках можно посмотреть, например, в [4] и [1].

Арифметики IR_{rec}, IR_{sec} и IR_{circ} обладают существенно различными алгебраическими свойствами (что можно заметить уже по разному количеству интервальных параметров в базовых объектах). Точно так же, как прямой перенос действительных методов на интервальный случай обычно оказывается не самым продуктивным подходом, прямой перенос методов работы с действительными интервалами обычно оказывается не лучшим при переносе на комплексный случай. Основной проблемой всех комплексных интервальных арифметик является взаимосвязь действительной и комплексной части, из-за которой интервалы-результаты арифметических операций обычно не совпадают с точными множествами представителей, а представляют собой оболочки этих множеств (достаточно сложной структуры уже в случае простых арифметических действий), имеющие форму интервалов нужного типа. Так, например, в IC_{circ} точное множество представителей произведения двух интервалов представляет собой совокупность двух овалов Декарта, как показано в [5]:

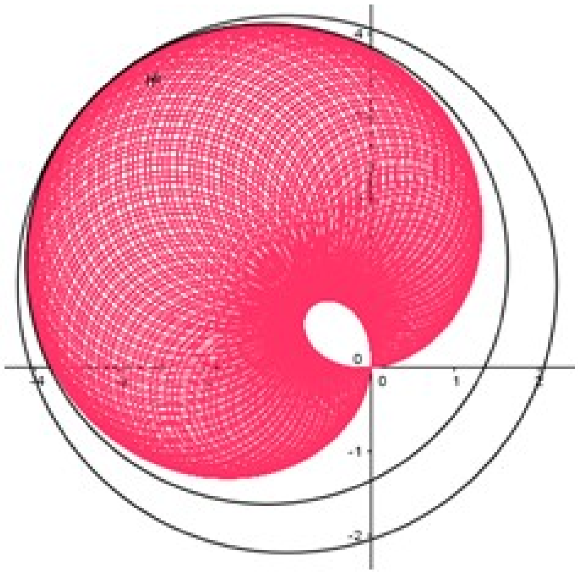

Рисунок 1. Точное множество представителей произведения для круговых интервалов <1,1> и <i-1,0,9> и его оболочки. Больший круг соответствует IC_{circ}, меньший – точной интервальной арифметике Гарганти (см. ниже)

Классическая интервальная арифметика IC_{circ} не обеспечивает минимальности оболочек по включению. Существуют другие подходы к операциям над круговыми интервалами, описанные в [4]. Интервальная круговая арифметика Н.Краера (так называемая минимальная круговая арифметика) обеспечивает минимальность оболочки, но ценой ухудшения алгебраических свойств: ни одна из интервальных арифметик выше не обладает дистрибутивностью, но IC_{circ} обладает субдистрибутивностью, которую минимальная арифметика утрачивает. Второй круг на рисунке 1 – оболочка в так называемой точной арифметике И. Гарганти, сохраняющей свойство субдистрибутивности при более узких интервалах, чем в случае IC_{circ}.

Все три приведённых выше подхода к комплексному интервалу не свободны от проблемы с оболочками. В IC_{rec} операция взятия оболочки необходима в случае произведения. В IC_{sec} множество представителей произведения интервалов – интервал, но поэлементная сумма интервалов требует оболочки. Комбинирование комплексных арифметик, являющееся довольно давней идеей (см., например, [6]) помимо усиления эффекта обёртывания порождает добавочные проблемы с монотонностью по включению (см. [7]).

2. Характеризация Оеттли-Прагера и PPS-методы

Понятие множества решения для системы интервальных уравнений определяется не столь однозначно, как для точечного случая. Предположим, что у нас есть интервальная матрица $\mathbf{A}$ и интервальный вектор правых частей $\mathbf{b}$; тогда под решением системы $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ можно понимать как множество $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ таких x, что при каком-то значении из $\mathbf{A}$ и $\mathbf{b}$ мы получаем верное равенство $Ax = b$ (объединённое множество решений), так и множество таких x, что при любом значении правой части из $\mathbf{b}$ найдётся какая-то матрица A, что $Ax = b$, множество таких x, что при любом значении из $\mathbf{A}$ для какого-то значения из $\mathbf{b}$ мы получаем верное равенство, и так далее. В тексте ниже объединённое множество решений для краткости будет называться просто множеством решений.

Задача внешнего оценивания для множества решений системы линейных интервальных уравнений $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ сводится к нахождению интервального вектора из IC^n (где n – размерность задачи), имеющего по возможности меньшую ширину и включающего $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$

Один из подходов к получению внешней оценки воплощается в так называемых PPS-методах (от *partitioning parameter set*) или методах дробления параметров. Основная идея этих методов (детальное описание подхода можно посмотреть в [8]) – организация итерационного процесса через дробление области и использование оптимизационных методов (нахождение нижних и верхних границ), опираясь на теорему Бека-Никеля:

Теорема 1 (Бек, Никель)**.** *Точные покоординатные оценки точек из* $\Xi_{uni}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ *для квадратной неособенной матрицы* $\boldsymbol{A}$*, то есть экстремальные значения этого множества, достигаются решениями крайних точечных систем уравнений* $Ax = b$*, т.е. таких, что матрица* A *и вектор* b *образованы элементами с границ интервалов* $\boldsymbol{A}$ *и* $\boldsymbol{b}$*.*

Теорема Бека-Никеля для целей PPS-методов в действительных случаях может быть усилена использованием теоремы Рона об экстремальных значениях ([9]) через использование характеризации Оеттли-Прагера для объединённого множества решений. Введём операторы mid и rad в IR, берущие, соответственно, среднюю точку интервала и его радиус (половину ширины), в случае размерности больше 1 применяемые покомпонентно. Справедлива

Теорема 2 (Оеттли, Прагер)**.** *Точка* $x \in R^n$ *принадлежит* $\Xi_{uni}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ *тогда и только тогда, когда* $|(mid\boldsymbol{A})x - mid\boldsymbol{b}| \leq rad\boldsymbol{A}|x| + rad\boldsymbol{b}$*.*

На основе характеризации Оеттли-Прагера и теоремы Рона об экстремальных значениях, сокращающей перебор и гарантирующей совпадение выпуклых оболочек точного множества решений и ограниченного набора граничных точек в действительном случае возможна организация PPS-метода на основе любого метода получения внешней оценки множества решений интервальной системы (метода Кравчика, интервального метода Гаусса, интервального метода Гаусса-Зейделя и т.д.).

3. Обобщения на комплексный случай

Как видно, двумя основными требованиями к прямому переносу PPS-методов является выполнение для вариантов IC^n аналога теоремы Бека-Никеля и выполнение для них характеризации Оеттли-Прагера. Также, естественно, желательно наличие работоспособных методов получения внешних оценок для множества решений системы (это может вызывать трудности при попытке прямого переноса их с действительного случая; примеры возникающих проблем для IC_{circ}, см. например в [10]).

Доказательство теоремы Бека-Никеля ([11]) для IC^n может быть произведено на основе метода Крамера решения систем линейных уравнений (как известно, работающего и в комплексном случае) с использованием монотонности линейного выражения, которое верно для любой из трёх рассматриваемых арифметик. Перенос на комплексный случай более полезен для IC_{rec} и IC_{sec}, чем для IC_{circ} из-за более явных граничных точек в этом случае, но в целом совершается одинаково.

Наиболее естественной характеризация Оеттли-Прагера выглядит для случая IC_{circ}, так как эта арифметика является «одноинтервальной» в смысле базового объекта, и для кругов понятным образом вводятся операторы mid и rad. Расплатой за это служит наименее естественное дробление для круговых интервалов.

Предложение 1. *Для круговых интервалов выполняется прямой аналог характеризации Оеттли-Прагера.*

Доказательство. Необходимым и достаточным условием включения кругового интервала $\langle c, r\rangle$ в круговой интервал $\langle d, R\rangle$ является выполнение условия $|d - c| \leq R - r$; в случае вектора из IC^n_{circ} оно должно выполняться покомпонентно.
$\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{x \in \mathbb{C}^n : \exists A \in \mathbf{A}, \exists b \in \mathbf{b}, Ax = b\}$, последнее равенство эквивалентно условию $Ax - b = 0$, т.е. $0 \in \mathbf{A}x - \mathbf{b}$. Рассматривая ноль как вырожденный интервал $\langle 0, 0\rangle$ и применяя условие включения, получаем требуемый аналог: $|mid(\mathbf{A}x - \mathbf{b}) - 0| \leq rad(\mathbf{A}x - \mathbf{b}) - 0 \Leftrightarrow |mid(\mathbf{A})x - mid(\mathbf{b})| \leq rad(\mathbf{A})x + rad(\mathbf{b})$ □

Аналогичный прямой геометрический перенос характеризации Оеттли-Прагера в IC_{rec} и IC_{sec} невозможен, однако условие включения интервалов в этом случае может быть выписано в виде покомпонентых условий для действительной и мнимой части. (Соответствующие операторы обозначим mid_{Re}, mid_{Im}, rad_{Re} и rad_{Im} для IC_{rec} и mid_R и mid_α, rad_R и rad_α для IC_{sec}). В этом случае условия включения превращаются в пары условий. Альтернативой может быть использование геометрических свойств интервалов IC_{rec} и IC_{sec} с получением единого условия (это возможно за счёт того, что геометрически ситуация в IC_{sec} облегчается пересечением сторон секторов в одной точке, а в IC_{rec} стороны прямоугольников параллельны. Тем не менее, условия включения тут заметно менее удобны. Например, для секторных интервалов получаем:

$$\langle \mathbf{a}, [\alpha_1, \alpha_2]\rangle \subset \langle \mathbf{b}, [\beta_1, \beta_2]\rangle \Leftrightarrow |mid_R(\mathbf{b}) - mid_R(\mathbf{a})| + 2\pi \cdot |mid_R(\mathbf{b}) - mid_R(\mathbf{a})| \cdot$$

$$\cdot (rad_\alpha([\beta_1, \beta_2]) - rad_\alpha([\alpha_1, \alpha_2])) < rad_\alpha([\beta_1, \beta_2]) + 2\pi \cdot rad_R(\mathbf{b}) \cdot (mid_R(\mathbf{b}) - rad_R(\mathbf{b})),$$

что, как видно, ощутимо сложнее условия для круговых интервалов). Тем не менее, польза от покомпонентных условий мала, так как справедливо

Предложение 2. *Для IC_{rec} невозможно записать аналог характеризации Оеттли-Прагера в виде покомпонентных условий на действительную и мнимую часть.*

Доказательство. Выражение для $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ в теоретико-множественном виде не зависит от вида интервала, потому условие $0 \in \mathbf{A}x - \mathbf{b}$ справедливо и для других интервальных арифметик. Тем не менее, в IC_{rec} $mid_{Re}(\mathbf{A}x) \neq mid_{Re}(\mathbf{A}) \cdot Re(x)$ в силу свойств комплексных операций. Более того, $mid_{Re}(\mathbf{A}x)$ заведомо зависит от $mid_{Im}(\mathbf{A}x)$. □

Для IC_{sec} ситуация более удобна за счёт свойств умножения в секторной арифметике. В этом случае $mid_R(\mathbf{A}x) = mid_R(\mathbf{A})mid_R(x)$, однако $rad_R(\mathbf{A}x - \mathbf{b}) \neq rad_R(\mathbf{A})|x| + rad_R(\mathbf{b})$. Учитывая, что в приведённом выше условии включения rad_R от большего интервала (в наших обозначениях – $\mathbf{b}$) встречается только в правой части, возможна оценка, однако в этом случае легко проверяется только достаточность включения, но не необходимость.

Таким образом, несмотря на естественную простоту переноса характеризаций IC_{circ}, наиболее перспективной для методов дробления параметров из трёх рассмотренных неожиданно оказывается IC_{sec}, сочетающая как явные граничные точки для теорем Бека-Никеля и Рона, так и возможность переноса характеризации Оеттли-Прагера, пусть и в ограниченном виде, без существенного увеличения вычислительной сложности. В этом смысле IC_{rec}, хотя и лучше развитая, оказывается менее удачной. Можно считать этот факт пополняющим копилку иллюстраций к тому, что прямой перенос интервальных методов без адаптации на новую область обычно проигрывает в эффективности интеральным методам, изначально ориентированным на соответствующую область.

Список литературы

1. Candau Y., Raissi T., Ramdani N., Ibos L. Complex interval arithmetic using polar form // Reliable Computing. — 2006. — no. 1. — P. 1–20.

2. Farouki R., Hass J. Evaluating the boundary and covering degree of planar Minkowski sums and other geometrical convolutions // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 2007. — Vol. 209, no. 2. — P. 246–266.

3. Жолен Л., Кифер М., Дидри О., Вальтер Э. Прикладной интервальный анализ. — М., Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2007. — 468 с.

4. Petkovic M., Petkovic L. Complex interval arithmetic and its applications // Mathematical Research, Vol. 105. — Berlin : VILEY-VCH, 1998. — 133 p.

5. Дронов В.С., Кузнецов Н.А. Об эффекте обёртывания для круговых интервалов // Ломоносовские чтения на Алтае: фундаментальные проблемы науки и образования. Сборник научных статей международной конференции (Барнаул, 14–17 ноября 2017 г.). — Барнаул : Изд-во Алт. ун-та, 2017. — С. 265–270.

6. Klatte R., Ulrich Ch. Complex Sector Arithmetic // Computing. — 1980. — no. 24. — P. 139–148.

7. Дронов В.С. Исправленные секторно-круговые оценки Клатте-Ульриха, монотонные по включению // Ломоносовские чтения на Алтае: фундаментальные проблемы науки и техники. Сборник научных ст. международной конференции (Барнаул, 13–16 ноября 2018 г.). — Барнаул : Изд-во Алт. ун-та, 2018. — С. 300–302.

8. Людвин Д.Ю., Шарый С.П. Сравнительный анализ реализаций модификации Рона в методах дробления параметров // Вычислительные технологии. — 2012. — Т. 17, № 1. — С. 69–89.

9. Фидлер М.and Недома Й., Рамик Я., Рон И., Циммерман К. Задачи линейной оптимизации с неточными данными / Пер. С.И. Кумков. — Ижевск : РХД, 2008. — 288 с.

10. Дронов В.С. О методе Гаусса-Зейделя в случае комплексных круговых интервалов // Известия Алтайского Государственрнр университета. — 2011. — № 1(69). — С. 13–16.

11. Beeck H. Uber die Struktur und Abschatzungen der Losungsmenge von linearen Gleichungssystemen mit Intervallkoeffizienten // Computing. — 1972. — Vol. 10. — P. 231–244.