УДК 517

О геометрическом и функционально-графическом содержании студенческого олимпиадного факультатива-практикума

Плотникова Е.А., Саженков А.Н., Саженкова Т.В.
Новосибирский государственный университет, г. Новосибирск
Алтайский государственный университет, г. Барнаул
pselena@gmail.com , sazhenkov_an@mail.ru

Аннотация

В работе представлен ряд математических задач олимпиадного характера, решение которых направлено на развитие аналитических качеств и способствующих самостоятельному продвижению студентов в исследовательской работе.

Ключевые слова: студенческие математические соревнования, геометрия, функционально-графические методы, фундаментальная подготовка.

Студенческие математические соревнования в России получили свое развитие ещё в конце XIX века: с1884 г. в “Журнале элементарной математики” Киевского университета ежегодно публиковали “задачи на премию”. Этот конкурс явился прообразом современных заочных математических олимпиад, ас 30-тых годов XX века стали регулярными математические олимпиады Ленинградского и Московского университетов. Уих истоков стояли великие российские математики: Б.Н. Делоне, П.С. Александров, А.Н. Колмогоров, С.Л. Соболев и др. [1]

Из зарубежных математических соревнований студентов одними из наиболее ранних считаются Путнамовские соревнования в Гарварде, которые ведут свой отсчёт от 1938 года. Итоги этих соревнований публикуются в журналах Математической ассоциации Америки. В разные годы в состав Путнамовского комитета входили такие выдающиеся математики, как Пойа, Келли, Беллман и др. В соревнованиях участвуют студенты колледжей и университетов бакалаврской ступени обучения. Успехи команд и отдельных студентов в этих соревнованиях – предмет гордости университетов и факультетов. В ряде университетов США и Канады специальные семинары по подготовке к этим соревнованиям включены в учебный план [2].

Хотя тематика задач студенческих математических олимпиад и конкурсов ограничена стандартными математическими курсами, их сложность весьма сильно варьируется. Для успешного участия в математических соревнованиях требуется определённая предварительная подготовка. Тем самым перед преподавателями, ведущими эту подготовку, встает вопрос о его содержании и тематических предпочтениях [3–6].

Основу подготовки составляет, как правило, работа над решением и обсуждением задач, в процессе которой происходит обращение к важным математическим идеям и теориям, то есть происходит фундаментальная подготовка участников олимпиадного студенческого движения.

Таким образом, комплектация задач и упражнений осуществляется, исходя из принципа их объединенности некоторой общей идеей или методом решения. Одними из важнейших в фундаментальной математической подготовке бакалавров являются геометрическо-топологические соображения и функционально-графические методы решения задач.

Геометрия – это большая игра по определённым аксиоматическим правилам. Решение задач в ней обычно объединяет в себе несколько соображений – очень редко задача решается "в один ход". Здесь просто необходима наработка некоторого практического навыка по решению задач на использование ряда классических теорем геометрии.

Функционально-графические методы позволяют достаточно лаконично и наглядно осуществлять решение задач, при аналитическом решении которых велика вероятность просмотра каких-то из возможных случаев. К тому же, например, для уравнений и неравенств с разнотипными функциями явное решение задачи может оказаться в принципе невозможным. Таким образом, остается графический метод или оценивание и анализ на монотонность функций, участвующих в составе выражения.

Приведём ряд задач, встречавшихся в студенческих олимпиадах разных лет.

1. Дан треугольник ABC. Последовательность C_n определена следующим образом: $C_1 = C$, C_{n+1} – центр вписанной окружности в треугольник ABC_n. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} C_n$.

Ответ: точка D, лежащая на стороне AB, при этом $AD : DB = \alpha : \beta$, где α и β радианная мера углов A и B треугольника ABC.

Решение. Поскольку длина диаметра вписанной окружности меньше любой высоты, имеет место неравенство $d\,(C_{n+1}, AB) < \frac{1}{2} d\,(C_n, AB)$, значит, расстояние от C_n до прямой AB стремится к нулю.

Из теоремы синусов и первого замечательного предела имеем:

$$\frac{AC_n}{C_nB} = \frac{\sin\alpha_n}{\sin\beta_n} = \frac{\frac{\sin\frac{\alpha}{2^n}}{\frac{\alpha}{2^n}}}{\frac{\sin\frac{\beta}{2^n}}{\frac{\beta}{2^n}}} \cdot \frac{\alpha}{\beta} \to \frac{\alpha}{\beta}$$

Отсюда, $\frac{AC_n}{AB} = \frac{\sin\alpha_n}{\sin(\alpha_n+\beta_n)} = \frac{1}{\cos\beta_n + \cos\alpha_n \cdot \frac{\sin\beta_n}{\sin\alpha_n}} \to \frac{\beta}{\alpha+\beta}$, ясно $\frac{C_nB}{AB} \to \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$.

Пусть точка D, лежащая на стороне AB, так, что $AD : DB = \alpha : \beta$, тогда $\frac{AD}{AB} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}$ и решение завершается теоремой Стюарта: $DC_n \to 0$

2. Пусть вокруг параболы описан треугольник ABC (т.е. парабола касается прямых AB, BC, CA). Докажите, что фокус этой параболы лежит на окружности, описанной около треугольника ABC.

Решение. В случае параболы $y^2 = 2px$, $p > 0$ фокус находится в точке $(p/2, 0)$, уравнение директрисы $x = -p/2$, при этом по определению расстояния от точек параболы до фокуса и директрисы равны.

Сначала докажем, что проекции фокуса параболы F на её касательные лежат на прямой, касающейся параболы в её вершине. Действительно, пусть прямая l касается параболы в точке P. Проекцию P на директрису обозначим через P_1. Так как треугольник FPP_1 равнобедренный и l – биссектриса угла P (из оптического свойства параболы), l является осью симметрии треугольника. Значит, точка F при симметрии относительно l переходит в точку P_1, лежащую на директрисе.

Докажем теперь, что фокус параболы F лежит на окружности, описанной около треугольника ABC. Пусть F_a, F_b, F_c – проекции точки F на стороны BC, CA, AB, соответственно. В силу выше сказанного они лежат на одной прямой (эта прямая параллельна директрисе и лежит в два раза ближе к фокусу, чем директриса). Четырёхугольники FCF_bF_a и FF_b и AF_c – вписанные. Отсюда и следует, что фокус F лежит на окружности, описанной около треугольника ABC.

3. Изобразите множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют соотношению: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^{2n} - |y|^n}{x^{2n} + |y|^n} < 0$.

Решение. Точки на прямой $y = 0$ не принадлежат искомому множеству, так как

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^{2n}}{x^{2n}} = 1$. Пусть $y = 0$. Обозначив $z = \frac{x^2}{|y|}$, получим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{z^n - 1}{z^n + 1} = \begin{cases} 1\,, & \text{если} \quad z > 1, \\ 0\,, & \text{если} \quad z = 1, \\ -1, & \text{если} \;\; 0 \leqslant z < 1. \end{cases}$$

Условию удовлетворяют точки, для которых выполнено неравенство

$$z = \frac{x^2}{|y|} < 1 \Leftrightarrow x^2 < |y| \Leftrightarrow \begin{cases} y > x^2 & (y > 0)\,, \\ y < -x^2 & (y < 0)\,. \end{cases}$$

Таким образом, точки находятся внутри парабол.

4. На графике многочлена с целыми коэффициентами отмечены две точки с целыми координатами. Докажите, что если расстояние между ними – целое число, то соединяющий их отрезок параллелен оси абсцисс.

Решение. Пусть отмечены точки $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$. По теореме Безу для целочисленных многочленов $f(b) - f(a) = k \cdot (b - a)$, где число k – целое. Квадрат расстояния между точками A и B равен $(b-a)^2 + (f(b) - f(a))^2 = (b-a)^2(1+k^2)$. По условию это – полный квадрат. Но тогда и $1 + k^2$ – полный квадрат, что возможно только при $k = 0$.

Список литературы

1. Садовничий В.А., Подколзин А.С. Задачи студенческих олимпиад по математике. — М. : Наука, 1978.

2. Бронштейн Е.М. Математические соревнования имени Уильяма Лоуэлла Путнама // Математическое просвещение. Третья серия, вып. 5. — М. : МЦНМО, 1978. — С. 192–205.

3. Саженков А.Н., Саженкова Т.В., Плотникова Е.А. Математический анализ в задачах студенческих олимпиад. Практикум. Часть 1. — Барнаул : Изд-во АлтГУ, 2011.

4. Саженков А.Н., Саженкова Т.В. О математическом содержании студенческого олимпиадного факультатива // Материалы четырнадцатой региональной конференции по математике МАК-2011. — Барнаул : Изд-во АлтГУ, 2011. — С. 132–133.

5. Саженков А.Н. Геометрия и анализ в задачах математических олимпиад // Труды семинара по геометрии и математическому моделированию. — Барнаул : Изд-во АлтГУ, 2013.

6. Саженков А.Н., Саженкова Т.В., Плотникова Е.А. Геометрический факультатив-практикум в научно-исследовательской работе старшеклассников и студентов младших курсов // Труды семинара по геометрии и математическому моделированию. — Барнаул : Изд-во АлтГУ, 2017.