УДК 517

Об элементах математического моделирования в курсах высшей математики

Плотникова Е.А., Саженкова Е.В.
Новосибирский государственный университет, г. Новосибирск
Новосибирский государственный университет экономики и управления, г. Новосибирск
pselena@gmail.com , sazhenkovs@yandex.ru

Аннотация

В работе обсуждается иллюстрирование теоретических математических курсов приложениями изучаемых математических понятий к решению практических задач экономики и социологии. Приводятся конкретные примеры (из различных источников) математического моделирования реальных процессов, базирующихся на достаточно простых математических понятиях, изучаемых на младших курсах бакалавриатов.

Ключевые слова: высшая математика, учебный процесс, прикладные задачи, математическое моделирование.

Успешность в освоении математических дисциплин студентами различных направлений подготовки в большой степени зависит от их заинтересованности материалами предмета, от видения перспектив использования получаемых при изучении дисциплины знаний в последующей практической деятельности. Как следствие, логично сопровождать изложение теоретического материала математических разделов демонстрацией посильных для понимания на достигнутом уровне изучения приложений теории разделов в технической и социально-экономической сферах.

Существенное значение в успешном обучении математике играет акцентирование на доходчивость изложения материала и его иллюстративность [1–4].

Математический язык - язык пределов, производных и интегралов позволяет единообразно описывать процессы, происходящие в различных естественнонаучных и гуманитарных сферах человеческой деятельности. Британский физик и социолог науки Джон Десмонд Бернал (1901-1971) говорил о приложениях дифференциального и интегрального исчисления: “Как это ни парадоксально ... наиболее непосредственное влияние идеи Ньютона оказали в области экономики и политики”.

Пример 1 (минимизация средних издержек производства) [5].

Уровнем наиболее экономичного производства является такой, при котором средние издержки по производству товара минимальны. Средние издержки определяют как

$$AC = \frac{C(x)}{x},$$

то есть издержки по производству товара общего объёма x, делённые на произведённый их объём.

По теореме Ферма в точке минимума функции $\frac{C(x)}{x}$ производная этой функции равна нулю. Таким образом, $\left(\frac{C(x)}{x}\right) = \frac{C'(x)x - C(x)}{x^2} = 0$, откуда $C'(x)x - C(x) = 0$, $C'(x) = \frac{C(x)}{x}$. То есть при наиболее экономичном производстве достигается равенство средних AC и предельных $C'(x)$ издержек.

Пример 2 (оптимизация налогообложения предприятий) [6].

Пусть функция дохода от количества реализованного товара x выражается формулой $R(x) = 16x - x^2$, а функция затрат на производство – формулой $C(x) = x^2 + 1$. Необходимо определить оптимальный уровень налога с единицы реализованного товара и прибыль предприятия, которая при этом достигается.

Пусть t – налог с единицы выпускаемой продукции. Тогда общий налог с x единиц продукции составит $T(x) = tx$. Таким образом функция прибыли приобретает вид $\Pi(x) = R(x) - C(x) - tx$. Определим величину налога t, при которой величина суммарного налога T со всей продукции будет наибольшей.

Поскольку $\Pi(x) = 16x - 2x^2 - tx - 1$, то условие максимума прибыли $\Pi'(x) = 0$ даёт $16 - 4x - t = 0$, $x = 4 - \frac{t}{4}$.

Подставляем полученное значение объёма продукции в величину суммарного налога $T(x) = tx$ и находим условия, при которых величина T максимальна:

$$T = t\left(4 - \frac{t}{4}\right), \quad T'(t) = 0, \quad t = 8.$$

Далее имеем при этом значении t значение , то есть $\Pi_{max} = \Pi(2) = 7$, а оптимальный (с точки зрения налоговой службы) сбор налога $T = 8\left(4 - \frac{8}{4}\right) = 16$.

Пример 3 (определение величины работы двигателя) [7].

Необходимо определить величину работы при запуске ракеты весом P с поверхности Земли вертикально вверх на высоту h, не учитывая движение самой Земли.

Пусть F – величина силы притяжения ракеты Землёй, m_p – масса ракеты, m_3 – масса Земли. Согласно закону всемирного тяготения (закону Ньютона) $F = k\dfrac{m_p m_3}{x^2}$, где x – расстояние от ракеты до центра Земли. Обозначая числитель правой части через K, R – радиус Земли, получаем:

$$F(R) = P = \frac{K}{R^2}, \quad K = PR^2, \quad F(x) = \frac{PR^2}{x^2}.$$

Таким образом, дифференциал работы есть

$$dA = F(x)\,dx = \frac{PR^2}{x^2}dx.$$

Интегрируя, получаем

$$A = \int\limits_R^{R+h} F(x)\,dx = \int\limits_R^{R+h} \frac{PR^2}{x^2}\,dx = \frac{PRh}{R+h}.$$

Следующий предел

$$\lim_{h\to\infty} A(h) = \frac{\lim\limits_{h\to\infty} PRh}{R+h} = PR$$

равен работе, которую должен совершить двигатель, чтобы полностью освободить ракету от земного притяжения.

Список литературы

1. Плотникова Е.А., Саженкова Е.В. О введении в математические дисциплины в техническом и экономическом вузах // Сборник трудов семнадцатой региональной конференции по математике МАК 2011. — Барнаул : Изд-во Алт. ун-та, 2011.

2. Плотникова Е.А. О некоторых вопросах методики преподавания математики на гуманитарных направлениях // Сборник научных статей международной школы-семинара “Ломоносовские чтения на Алтае”. — Барнаул : Изд-во Алт. ун-та, 20151.

3. Плотникова Е.А. О формировании банка задач по курсу “Высшая математика” для гуманитарных направлений // Сборник трудов всероссийской конференции по математике МАК 2015. — Барнаул : Изд-во Алт. ун-та, 2015.

4. Плотникова Е.А., Саженкова Е.В. О синтезе аналитических и информационно-технологических методов в обучении математике на гуманитарных специальностях // Сборник трудов всероссийской конференции по математике МАК 2016. — Барнаул : Изд-во Алт. ун-та, 2016.

5. Ахтямов А.М. Математика для социологов и экономистов: учеб. пособие. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 464 с.

6. Красс М.С. Математика для экономических специальностей: учебник. — СПб. : Питер, 2005. — 464 с.

7. Марон И.А. Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах: учебник. — М. : Лань, 2008. — 400 с.