

Математические методы оценки эффективности производственных систем: метод обволакивающей поверхности (DEA)

Торопова Е.А.

*Алтайский государственный университет, г. Барнаул
evromix.22@mail.ru*

Аннотация

В данной статье рассмотрена задача оценки технологической эффективности производственных систем и ее решение в рамках граничного подхода Дебрэ-Фаррелла. Рассмотрен метод обволакивающей поверхности (Data Envelopment Analysis), позволяющий получить количественные интегральные оценки технологической эффективности множества производственных объектов. Приводятся результаты программной реализации метода для основных моделей DEA в среде R.

Ключевые слова: эффективность, производственные системы, граничный подход, Data Envelopment Analysis

1. Введение

Производство, как процесс, представляет собой преобразование ресурсов в продукт. Повышение эффективности управления такой системой связано с вопросами повышения эффективности производства и распределения ресурсов, возможностями максимизации прибыли, что связано с выявлением ключевых параметров производства и их целевых значений. В российской теории и практике анализа эффективности преобладает использование традиционных показателей – прибыль, фондоотдача, рентабельность, себестоимость и т.д. Такой подход не учитывает множество аспектов, в частности разнородность производственных факторов, различие масштабов производства и эффекта убывающей отдачи. Множество частных показателей эффективности является несогласованным, что приводит к субъективному толкованию результатов, возникновению противоречивых выводов, а попытка предложить единый интегральный показатель эффективности приводит к необходимости использования разного рода методик или использованию линейных сверток, что не является оправданным. Одним из подходов к решению данной методологической проблемы является граничный подход к измерению эффективности, предложенный Жераром Дебрэ и Майклом Фарреллом [1–6], который активно развивается в трудах зарубежных ученых. В рамках данного подхода предполагается, что все производственные системы одного класса, имеющие одинаковый набор входов и выходов в зависимости от масштаба деятельности имеют предел (границу) производственной эффективности. При этом общая эффективность производственного объекта может быть декомпозирована на две составляющие: технологическую (*Technical Efficiency - TE*) и аллокативную (*Allocative Efficiency - AE*). В работе рассматривается общая задача оценки технологической эффективности производственной системы, метод количественной оценки TE и результаты программной реализации метода в среде R.

2. Постановка задачи оценки технологической эффективности производственной системы

Производственная система – это совокупность всех технологических систем и систем обеспечения их функционирования, использующая ресурсы (входы) для выпуска продукции (выходы) [2].

В качестве выходов (*Outputs*), как правило, рассматриваются объемы выпуска продукции или итоговые финансовые показатели предприятия. В качестве входов (*Inputs*) могут выступать затраты ресурсов в натуральном или в стоимостном выражении в расчете на единицу продукции или в целом на производство за рассматриваемый период времени.

Пусть предприятие, используя n входов (x_1, \dots, x_n) производит m видов продукции (y_1, \dots, y_m) . Граничный подход предполагает существование предела – границы эффективности Z^* (*Efficiency Frontier*) в пространстве производственных возможностей $Z = \{(x, y) \in \mathbb{R} : x \text{ производит } y\}$, которая описывается совокупностью вариантов расхода минимального количества ресурсов x^* и производства максимального объема продукции y^* - $Z^* = \{(x^*, y^*) \in \mathbb{R} : x^* \text{ производит } y^*\}$. Очевидно, что $Z^* \in Z$.

Граница эффективности, “покрывает” или “обволакивает” все неэффективные производственные единицы. Неэффективность производственного объекта i оценивается величиной отклонения входов (превышения расхода ресурсов) x_i и/или отклонения выходов y_i (недопроизводство продукции) от ближайшего граничного значения (x^*, y^*) .

Идея измерения ТЕ, предложенная М. Фарреллом [1–3] заключается в вычислении радиальной меры отклонения наблюдаемого состояния объекта от граничного или эффективного (x^*, y^*) и выражается в виде индекса эффективности (*Index Efficiency*) – IE .

Поскольку проекция на границу эффективности может осуществляться по двум направлениям, различают оценку эффективности по входу и эффективность по выходу.

Так, эффективность по входу (*Input Efficiency* – E) измеряется как отношение радиального расстояния до точки x_i и радиального расстояния до точки x_i^* , лежащей на границе Z^* – $E = \frac{R(x_i)}{R(x_i^*)}$, где $E \leq 1$, $R(\cdot)$ – функция радиального расстояния. Величина E показывает потенциально возможную величину равно пропорционального сокращения производственных расходов предприятия.

Технологическая эффективность по выходу (*Output Efficiency* – F) измеряется как отношение радиального расстояния до точки y_i^* и радиального расстояния до точки y_i – $F = \frac{R(y_i^*)}{R(y_i)}$, где $F \geq 1$. F показывает величину потенциально возможного равно пропорционального наращивания объемов производства.

3. Метод обволакивающей поверхности (Data Envelopment Analysis)

Группа авторов – А. Чарнз, В. Купер и И. Родес [5, 6] предложили метод количественного оценивания величин E и F посредством решения множества задач линейного программирования (ЗЛП). Данный метод получил название Data Envelopment Analysis (DEA).

Задача оценки технологической эффективности по входу (CCR-input) в предположении о постоянном эффекте о расширении масштабов деятельности (Constant return to scale) для объекта o имеет вид:

$$E \rightarrow \min_{(E, \lambda)}, \quad o = 1, \dots, N \quad (1)$$

при ограничениях:

$$\begin{aligned} \sum_j \lambda_j x_{js} &\leq E x_{os}; \\ \sum_j \lambda_j y_{jr} &\geq y_{or}; \\ E &\geq 0; \\ \lambda_j &\geq 0; \\ s &= 1, \dots, S; \quad r = 1, \dots, R; \quad j = 1, \dots, N, \end{aligned}$$

где E – индикатор эффективности, характеризующий величину пропорционального уменьшения входов; x_{os} , y_{or} – наблюдаемые для o -го объекта выходы и входы; λ_j – весовые параметры модели.

Задача (1) является прямой задачей линейного программирования в стандартной форме и решается, например, симплекс методом.

Для каждого объекта выборки ($o = 1, \dots, N$) решается задача (1). Из оптимального решения находят оценки потенциальной экономии ресурсов $\Delta x_{os} = \left(\sum_j \lambda_j^* x_{js} - E x_{os} \right)$ и $\Delta y_{or} = \left(\sum_j \lambda_j^* y_{jr} - y_{or} \right)$ – величина резервов наращивания объемов производства за счет повышения эффективности использования ресурсов.

Задача оценки технологической эффективности по выходу (CCR-output) в предположении о постоянном эффекте о расширении масштабов деятельности для каждого объекта o имеет вид:

$$F \rightarrow \max_{(F, \lambda)} \quad (2)$$

при ограничениях:

$$\begin{aligned} \sum_j \lambda_j x_{js} &\leq x_{os}; \\ \sum_j \lambda_j y_{jr} &\geq F y_{or}; \\ s &= 1, \dots, S; \quad r = 1, \dots, R, \end{aligned}$$

где F – индикатор эффективности, характеризующий величину пропорционального увеличения выходов, при действующих входах; x_{js} , y_{jr} – наблюдаемые для j -го объекта выходы и входы; λ_j – весовые параметры модели.

Для каждого объекта выборки ($o = 1, \dots, N$) решается задача (2). Оптимальное решение задачи описывает оценки потенциальной экономии ресурсов $\Delta x_{os} = \left(\sum_j \lambda_j^* x_{js} - x_{os} \right)$ и $\Delta y_{or} = \left(\sum_j \lambda_j^* y_{jr} - F y_{or} \right)$ – величина равно пропорционального увеличения объемов производства по каждому виду продукции, обеспечивающих достижение эффективного состояния.

Оценки эффективности, получаемые по методу DEA, в зависимости от специфики производственных систем (постоянный эффект от расширения масштабов деятельности – CRS; переменный эффект от расширения масштабов деятельности – VRS), либо в зависимости от направленности достижения границы эффективности (ориентация на вход или на выход) выполняются для различных модификаций базовых моделей (1),(2). В целом классификация моделей DEA представлена в таблице.

Таблица 1

Перечень базовых моделей DEA [2, 4, 5]

Частично – линейная модель				Частично – нелинейная модель	
CRS		VRS		CRS	VRS
Ориентация на вход	Ориентация на выход	Ориентация на вход	Ориентация на выход	VAR – MULT	INV – MULT
CCR – Input (Charnes, Cooper, Rhodes, 1978)	CCR – Output (Charnes, Cooper, Rhodes, 1978)	BCC – Input (Banker, Charnes, Cooper, 1984)	BCC – Output (Banker, Charnes, Cooper, 1984)	(вариантная мультипликативная модель) (Charnes, Cooper, Seiford, Sturz, 1982)	(невариантная мультипликативная модель)

4. Программная реализация метода DEA в R

Нахождение решения задачи (1) на реальных данных сталкивается с рядом проблем: во-первых, размером выборки, во-вторых, скоростью решения множества ЗЛП в пакетах прикладных программ. В связи с этим выполнена реализация моделей DEA CCR-input и CCR-output. Общий алгоритм программы представлен на рисунке. Программа реализует загрузку исходных данных из файла *.csv, сгруппированных по правилу – “сначала входы, затем выходы”, формирование матриц для решения задачи (1) или (2) и последовательного решения ЗЛП с выводом результатов в отдельный файл.

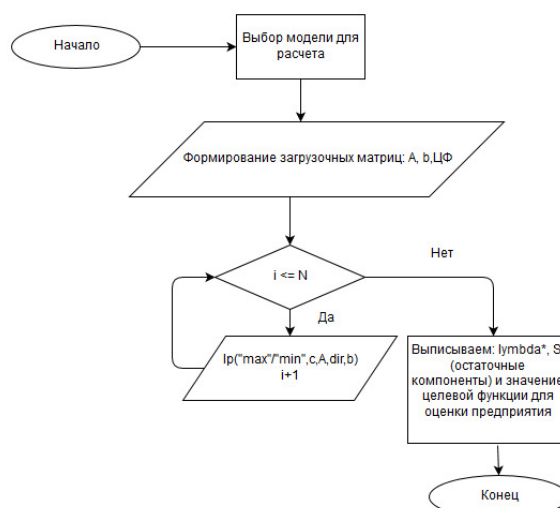


Рисунок 1. Алгоритм решения задач (1) и (2) оценки ТЕ по выборке предприятий

Тестирование программы проводилось на основе данных ряда сельскохозяйственных предприятий Алтайского края для пяти входов и двух выходов. Сравнение результатов

осуществлялось с известными оценками, опубликованными ранее [3]. Преимущество использования разработанной программы заключается в возможности решения задач большой размерности (более 1 тыс. предприятий), в удобстве и автоматизме использования.

Развитие работы предполагает модернизацию модуля для оценки ТЕ при переменном эффекте от расширения масштабов деятельности, оценки эффективности по масштабу, эффективности распределения ресурсов и суперэффективности.

Список литературы

1. Понькина Е.В., Курочкин Д.В. Оценка технологической эффективности производства зерновых культур и подсолнечника в условиях Кулундинской степи Алтайского края. Подход Data Envelopment Analysis // Региональная экономика: теория и практика. — М. : ООО Финансы и кредит, 2012. — Т. 15. — Вып.5. — С. 914–927.
2. Лобова С.В., Понькина Е.В. Практические аспекты измерения эффективности производства зерна на основе методологии DEA // Финансовая аналитика: проблемы и решения. — 2013. — № 44(182). — С. 2–10.
3. Боговиз А.В., Понькина Е.В., Лобова С.В. Использование эконометрического подхода к измерению эффективности сельхозорганизаций // АПК: экономика и управление. — 2016. — № 10. — С. 23–34.
4. Лисситса А., Бабичева Т. Анализ оболочки данных (DEA) – современная методика определения эффективности производства // DISCUSSION PAPER. — 2003. — № 50. — С. 38.
5. Bogetoft P., Otto L. Benchmarking with DEA, SFA and R: International Series in Operations Research & Management Science // Springer New York Dordrecht Heidelberg London. — 2011. — Vol. 157. — P. 352.
6. Charnes A., Cooper W., Rhodes E. Measuring the Efficiency of Decision – Making Units // European Journal of Operational Research. — 1978. — Vol. 2. — P. 429–444.