УДК 519

Применение универсальных математических систем к исследованию квадратичных форм поверхности

Калугина С.С. Хромова О.П.
Алтайский государственный университет, г. Барнаул
lana.kalugina.97@mail.ru, khromova.olesya@gmail.com

Аннотация

Среди свободно распространяемых универсальных математических систем особое место занимают Maxima и SageMath. В статье приводится авторская реализация компьютерных моделей в среде данных пакетов прикладных программ, позволяющая определять первую и вторую квадратичные формы поверхности.

Ключевые слова: квадратичная форма поверхности, Maxima, SageMath.

1. Общие сведения

Пусть регулярная поверхность $\Phi \in E^3$ задана уравнением $r = r(u, v)$. Положим $r_u = \frac{\partial r}{\partial u}$ и $r_v = \frac{\partial r}{\partial v}$. Аналогично производные единичного вектора нормали $n(u, v)$ обозначим как $n_u = \frac{\partial n}{\partial u}$ и $n_v = \frac{\partial n}{\partial v}$ (см., например, [1, 2]).

Определение 1. *Первой квадратичной формой поверхности Φ называется квадратичная форма вида*

$$I = (dr, dr) = g_{11}du^2 + 2g_{12}dudv + g_{22}dv^2, \tag{1}$$

где

$$g_{11} = |r_u|^2, \quad g_{12} = (r_u, r_v), \quad g_{22} = |r_v|^2. \tag{2}$$

Определение 2. *Второй квадратичной формой поверхности Φ называется квадратичная форма вида*

$$II = -(dr, dn) = b_{11}du^2 + 2b_{12}dudv + b_{22}dv^2, \tag{3}$$

где

$$\begin{aligned} b_{11} &= -(r_u, n_u) = (r_{uu}, n), \\ 2b_{12} &= -(r_u, n_v) - (r_v, n_u) = 2(r_{uv}, n), \\ b_{22} &= -(r_v, n_v) = (r_{vv}, n). \end{aligned} \tag{4}$$

Наряду с первой и второй квадратичными формами рассмотрим третью квадратичную форму поверхности III, про которую известно, что [3]

Теорема 1. *В каждой точке p регулярной поверхности Φ класса C^k, $(k \geq 2)$ выполняется равенство*

$$K \cdot I - 2H \cdot II + III = 0,$$

где $K(p)$ – гауссова кривизна поверхности, а $H(p)$ – средняя кривизна.

Отсюда, очевидно,

$$III = 2H \cdot II - K \cdot I. \tag{5}$$

Таким образом, для вычисления квадратичных форм поверхности необходимо реализовать следующую математическую модель.

1. Найти частные производные r_u и r_v вектор-функции $r = r(u, v)$.
2. Определить метрические коэффициенты g_{ij}, используя равенства (2).
3. Записать первую квадратичную форму, подставив найденные g_{ij} в (1).
4. Посчитать частные производные второго порядка r_{uu}, r_{uv} и r_{vv} вектор-функции $r = r(u, v)$.
5. Вычислить коэффициенты b_{ij} второй фундаментальной формы по формулам (4).
6. Записать вторую квадратичную форму, применив равенство (3).
7. Определить главные кривизны поверхности как корни характеристического уравнения $|bij - kg_{ij}| = 0$.
8. Вычислить гауссову и среднюю кривизны поверхности как произведение и полусумму главных кривизн соответственно.
9. Найти третью квадратичную форму поверхности по формуле (5).

На основании данной математической модели были разработаны соответствующие компьютерные модели и реализованы в средах пакетов прикладных программ Maxima и SageMath.

2. Определение фундаментальных форм поверхности в Maxima

Рассмотрим реализацию программ в пакете Maxima, позволяющую находить фундаментальные формы поверхности. Зададим радиус-вектор r поверхности в виде упорядоченного множества функций. Например, радиус-вектор сферы радиуса R в теле программы определяется так.

```
r:[R*cos(u)*cos(v), R*cos(u)*sin(v),R*sin(u)];
```

Посчитаем частные производные вектор-функции r с помощью функции diff (первый аргумент дифференцируемая функция, второй – переменная, по которой надо брать производную, а третий – порядок производной).

```
r_u:[diff(r[1],u,1), diff(r[2],u,1), diff(r[3],u,1)];
r_v:[diff(r[1],v,1), diff(r[2],v,1), diff(r[3],v,1)];
```

Затем вычислим коэффициенты матрицы первой квадратичной формы через скалярное произведение векторов r_u и r_v, при этом упростив тригонометрические функции с помощью команды trigsimp().

```
a: r_u.r_u;
b:r_v.r_v;
g12:r_u.r_v;
g11:trigsimp(a);
g22:trigsimp(b);
```

Найдем первую квадратичную форму

```
I: g11*du*du+2g12*du*dv+g22*dv*dv;
```

Так же с помощью функции diff определим производные второго порядка.

```
r_uu:[diff(r[1],u,2), diff(r[2],u,2), diff(r[3],u,2)];
r_vv:[diff(r[1],v,2), diff(r[2],v,2), diff(r[3],v,2)];
r_uv:[diff(r_u[1],v,1), diff(r_u[2],v,1), diff(r_u[3],v,1)];
```

Далее используя функцию determinant (нахождение определителя матрицы) и формулы (4), найдем коэффициенты второй фундаментальной формы. Упростим выражения с помощью команды trigsimp().

```
assume (cos(u)>0);
root: sqrt (g11*g22 - (g12)^2);
l: matrix ([r_uu[1], r_uu[2], r_uu[3]], [r_u[1], r_u[2], r_u[3]],
[r_v[1], r_v[2], r_v[3]]);
l1:determinant (l);
l2:trigsimp(l1);
L: l2/root;
m: matrix ([r_uv[1], r_uv[2], r_uv[3]], [r_u[1], r_u[2], r_u[3]],
[r_v[1], r_v[2], r_v[3]]);
m1:determinant(m);
M: m1/root;
n: matrix ([r_vv[1], r_vv[2], r_vv[3]], [r_u[1], r_u[2], r_u[3]],
[r_v[1], r_v[2], r_v[3]]);
n1: determinant(n);
n2:n1/root;
N: trigsimp(n2);
```

Наконец запишем вторую квадратичную форму.

```
II: L*du^2+2*M*du*dv+N*dv^2;
```

Вычислим главные кривизны.

```
kr: matrix([L,M],[M,N])-k*matrix([g11,g12],[g12,g22]);
kr1: determinant(kr);
kr2: trigsimp(kr1);
y:solve([kr2=0],[k]);
k12: ev(k,y[1]);
```

Найдем гауссову и среднюю кривизны поверхности

```
K: k12*k12;
H:1/2*(k12+k12);
```

Определим третью квадратичную форму поверхности.

```
d3r:2*H*II-K*I;
III: trigsimp(d3r);
```

3. Расчет основных форм поверхности в SageMath

Осуществим поиск квадратичных форм поверхности в системе компьютерной математики SageMath на примере сферы радиуса R.

Зададим внутренние координаты поверхности (u, v), радиус сферы – R и дифференциалы криволинейных координат на поверхности du, dv.

```
sage: u, v = var('u, v', domain='real')
sage: R = var('R', domain='real')
sage: du, dv = var('du, dv', domain='real')
sage: assume(cos(u) > 0)
```

Далее с помощью команды ParametrizedSurface3D (три набора функций, задающих параметрическое представление поверхности, 2 кортежа внутренних координат, название поверхности) определим уравнение сферы радиуса R.

```
sage: sphere = ParametrizedSurface3D((R*cos(u)*cos(v), R*cos(u)*sin(v),
R*sin(u)),  (u,v), 'sphere')
```

Затем, используя функцию first_fundamental_form_coefficient(индекс), найдем первую квадратичную форму поверхности и ее коэффициенты.

```
sage: p = sphere.first_fundamental_form_coefficient((1,1))*du*du+
2*sphere.first_fundamental_form_coefficient((1,2))*du*dv +
sphere.first_fundamental_form_coefficient((2,2))*dv*dv
```

Аналогично при помощи команды second_fundamental_form_coefficient(индекс) вычислим вторую квадратичную форму поверхности и ее коэффициенты.

```
sage:w =sphere.second_fundamental_form_coefficient((1,1))*du*du+
2*sphere.second_fundamental_form_coefficient((1,2))*du*dv+
sphere.second_fundamental_form_coefficient((2,2))*dv*dv
```

Далее с помощью функций mean_curvature() и gauss_curvature() определим среднюю кривизну и гауссову кривизну поверхности, соответственно.

```
sage: H = sphere.mean_curvature();
sage: K = sphere.gauss_curvature();
```

Затем вычислим третью квадратичную форму поверхности.

```
sage: t = 2*H*w-K*p; t
sage: t.simplify_trig();
```

4. Заключение

В работе приводится математическая модель, позволяющая вычислять первую, вторую и третью квадратичные формы регулярной поверхности $\Phi \in E^3$. На основе данной модели в средах свободно распространяемых универсальных математических систем Maxima и SageMath разработаны соответствующие компьютерные модели, осуществляющие поиск квадратичных форм по предложенной вектор-функции – векторному параметрическому уравнению поверхности. Апробация указанных моделей осуществлена на примере сферы радиуса R.

Список литературы

1. Игнатьев Ю.Г. Дифференциальная геометрия кривых и поверхностей в Евклидовом пространстве. Учебное пособие, IV семестр. — Казань : Казанский университет, 2013. — 204 с.

2. Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия. Учебное пособие / Под ред. А.Ф. Лапко. — М. : Наука, 1974. — 176 с.

3. Топоногов В.А. Дифференциальная геометрия кривых и поверхностей: учебное пособие для вузов. — М. : Физматкнига, 2012. — 224 с.