УДК 514.765

Конформно-киллинговы поля на симметрических лоренцевых многообразиях малой размерности

Андреева Т.А., Балащенко В.В., Оскорбин Д.Н.
Алтайский государственный университет, г. Барнаул
Белорусский государственный университет, г. Минск (Белоруссия)
andreeva08t@mail.ru, balashchenko@bsu.by, oskorbin@yandex.ru

Аннотация

Данная работа направлена на определение конформно-киллинговых векторных полей на неразложимом эйнштейновом симметрическом четырехмерном лоренцевом многообразии. Для вычисления конформно киллинговых полей используется система координат Бринкмана.

Ключевые слова: конформно-киллинговы векторные поля, лоренцевы многообразия, симметрические многообразия малой размерности

Симметрические лоренцевы многообразия порядка k являются обобщением симметрических многообразий, классифицированных Кахеном и Уоллахом в работе [1]. Симметрические лоренцевы многообразия порядков 2 и 3 изучены в работах Галаева, Алексеевского, Сеновиллы, см. подробнее в [2–4]. И в данной работе изучаются конформно-киллинговы поля на лоренцевых симметрических эйнштейновых многообразиях в размерности 4.

Лемма 1. *Существует система координат (V, X, Y, U), в которой метрику четырехмерного симметрического неразложимого лоренцева эйнштейнова многообразия M можно записать в виде [1]:*

$$ds^2 = dUdV + dX^2 + dY^2 + (a(X^2 - Y^2) + 2bXY)dU^2.$$

Доказательство. Известно, что для четырехмерных симметрических неразложимых лоренцевых многообразий существует система координат, в которой метрику можно записать в виде [1]:

$$ds^2 = dUdV + dX^2 + dY^2 + (aX^2 - 2bXY + cY^2)dU^2.$$

Зададим многообразие с такой метрикой и проверим для него условие Эйнштейна $r = \Lambda \cdot g$. Тензор Риччи будет иметь следующий вид:

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a-c \end{matrix}$$

Выполнение условия Эйнштейна $r = \Lambda \cdot g$ в данном случае возможно только при $\Lambda = 0$ и $c = -a$, а значит, метрика рассматриваемого многообразия должна иметь вид:

$$ds^2 = dUdV + dX^2 + dY^2 + (a(X^2 - Y^2) + 2bXY)dU^2.$$

□

Векторное поле K на многообразии M называется конформно-киллинговым, если $L_K g = f(\rho)g$, где $L_K g$ производная Ли метрического тензора вдоль поля K.

Рассматривая уравнение на конформно-киллингово поле в системе координат леммы 1, получаем теорему:

Теорема 1. *Если K – конформно киллингово векторное поле на неразложимом эйнштейновом симметрическом четырехмерном лоренцевом многообразии M, то есть выполняется условие $L_K g = f(\rho)g$, $f(\rho)$ – ограниченная гладкая функция на многообразии M, то функция $f(\rho)$ является константой.*

Доказательство. Посчитаем условие $L_K g = f(\rho)g$, приравняв каждый элемент $L_K g = f(\rho)g$ нулю. В результате получаем систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{d(l)}{dV} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d(j)}{dV} + \frac{1}{2}\frac{d(l)}{dX} = 0 \tag{2}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d(k)}{dV} + \frac{1}{2}\frac{d(l)}{dY} = 0 \tag{3}$$

$$XYb\frac{d(l)}{dV} + \frac{1}{2}\left(X^2\frac{d(l)}{dV} - Y^2\frac{d(l)}{dV}\right)a - f + \frac{1}{2}\frac{d(i)}{dV} + \frac{1}{2}\frac{d(l)}{dY} = 0 \tag{4}$$

$$-f + \frac{d(j)}{dX} = 0 \tag{5}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d(j)}{dY} + \frac{1}{2}\frac{d(k)}{dX} = 0 \tag{6}$$

$$-f + \frac{d(k)}{dY} = 0 \tag{7}$$

$$XYb\frac{d(l)}{dX} + \frac{1}{2}\left(X^2\frac{d(l)}{dX} - Y^2\frac{d(l)}{dX}\right)a + \frac{1}{2}\frac{d(i)}{dX} + \frac{1}{2}\frac{d(j)}{dU} = 0 \tag{8}$$

$$XYb\frac{d(l)}{dY} + \frac{1}{2}\left(X^2\frac{d(l)}{dY} - Y^2\frac{d(l)}{dY}\right)a + \frac{1}{2}\frac{d(i)}{dY} + \frac{1}{2}\frac{d(l)}{dU} = 0 \tag{9}$$

$$\begin{gathered}\left(X^2\frac{d(l)}{dU} - Y^2\frac{d(l)}{dU} + Xj(V,X,Y,U) - Yk(V,X,Y,U)\right) + \\ + \left(\left(2X\frac{d(l)}{dU} + j(V,X,Y,U)\right)Y + Xk(V,X,Y,U)\right)b - \\ - \big(2XYb + (X^2 - Y^2)a\big)f + \frac{d(i)}{dU} = 0\end{gathered} \tag{10}$$

I. f не зависит от V, X и Y. Заметим, из (5) и (7) что

$$f = \frac{d(j)}{dX} = \frac{d(k)}{dY} \tag{11}$$

и с учетом (6) j и k – сопряженные гармонические по X и Y функции. Запишем $\frac{d^2(f)}{dX^2} + \frac{d^2(f)}{dY^2}$ в виде

$$\frac{d^3(j)}{dX^3} + \frac{d^3(j)}{dXdY^2} = \frac{d}{dX}\left(\frac{d^2(j)}{dX^2} + \frac{d^2(j)}{dY^2}\right) = 0.$$

Значит, f гармоническая по X и Y функция, а так как она ограничена, то это значит, что она не зависит от X и Y.

Теперь выразим f из (4) и (10):

$$f = XYb\frac{d(l)}{dV} + \frac{1}{2}\left(X^2\frac{d(l)}{dV} - Y^2\frac{d(l)}{dV}\right)a + \frac{1}{2}\frac{d(i)}{dV} + \frac{1}{2}\frac{d(l)}{dY} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} f = \frac{d(l)}{dU} + \frac{Xaj(V,X,Y,U) - Yak(V,X,Y,U) + Ybj(V,X,Y,U) + Xbk(V,X,Y,U)}{2XYb + X^2a - Y^2a} + \\ + \frac{1}{2XYb + X^2a - Y^2a}\frac{d(i)}{dU} \end{aligned} \tag{13}$$

Из (1) заметим, что l не зависит от V из этого и (12) следует

$$f = \frac{1}{2}\frac{d(i)}{dV} + \frac{1}{2}\frac{d(l)}{dU} \tag{14}$$

А так как f не зависит от X и Y, то сумма всех зависящих от них слагаемых в (13) должна быть равна константе:

$$f = \frac{d(l)}{dU} + c \tag{15}$$

Поэтому так как l не зависит от V, то f не зависит от V.

II. f не зависит от U.

Из (2) и (3) и того, что l не зависит от V, получаем:

$$j(V,X,Y,U) = -V\frac{d(l)}{dX} + J_1(X,Y,U) \tag{16}$$

$$k(V,X,Y,U) = -V\frac{d(l)}{dY} + K_1(X,Y,U), \tag{17}$$

где $J_1(X,Y,U)$ и $K_1(X,Y,U)$ некоторые функции.

Подставим эти значения в (6) и получим:

$$2V\frac{d^2(l(X,Y,U))}{dXdY} = \frac{d(J_1(X,Y,U))}{dY} + \frac{d(K_1(X,Y,U))}{dX}$$

Дифференцируем по V и получаем $2\dfrac{d^2(l(X,Y,U))}{dXdY} = 0$, что означает

$$\frac{d(l)}{dY} = L_1(Y,U), \quad \frac{d(l)}{dX} = L_2(X,U),$$

где $L_1(Y,U)$ и $L_2(X,U)$ некоторые функции.

Т.е. производная l по Y не зависит от X и производная l по X не зависит от Y, значит

$$l = L_1(Y,U) + L_2(X,U),$$

где $L_1(Y,U)$ и $L_2(X,U)$ некоторые функции.

Из (11) и (15) выводим $\dfrac{d(j)}{dX} = \dfrac{d(k)}{dY} = \dfrac{d(l)}{dU} + c$, распишем равенство $\dfrac{d(l)}{dU} + c = \dfrac{d(j)}{dX}$:

$$\frac{d(L_1(X,U))}{dU} + \frac{d(L_2(Y,U))}{dU} + c = -V\frac{d^2(L_1)}{dX^2} + \frac{d(J(X,Y,U))}{dX}$$

Дифференцируем по V и получаем, что $0 = -\dfrac{d^2(L_1)}{dX^2}$.

Аналогичным образом рассматриваем $\dfrac{d(l)}{dU} + c = \dfrac{d(k)}{dY}$ и получаем

$$l = XL_{11}(U) + YL_{21}(U) + L(U),$$

где $L_{1i}(U)$ и $L(U)$ некоторые функции.

Из (15) и (14) получаем $\dfrac{d(i)}{dV} = \dfrac{d(l)}{dU} + 2c$ и делаем вывод, что

$$i = V\left(\frac{d(l)}{dU} + 2c\right) + I(X,Y,U),$$

где $I(X,Y,U)$ некоторая функция.

Теперь распишем (8)

$$\big(2XYb + \left(X^2 - Y^2\right)a\big)\, L_{11}(U) + \frac{d(I(X,Y,U)}{dX} - V\frac{d(L_{11}(U)}{dU} + \frac{d(J_1(X,Y,U)}{dU} = 0$$

Дифференцируем по V и получаем, что $-\dfrac{d(L_{11}(U)}{dU} = 0$, следовательно L_{11} равно константе.

Аналогичным образом получаем из (9), что L_{21} также равно константе.

Из (16), (17), (11) и (15) получаем

$$J = X\left(\frac{d(L(U))}{dU} + c\right) + J_x(Y,U); \quad K = Y\left(\frac{d(L(U))}{dU} + c\right) + K_y(X,U),$$

где $J_x(Y,U)$ и $K_y(X,U)$ некоторые функции.

Теперь воспользуемся тем, что сумма всех зависящих от X и Y слагаемых в (13) должна быть ровна нулю и подставим в них выведенные значения i, j, k и l и получаем:

$$\begin{aligned}
&- VXac_1 - VYbc_1 + X^2a\frac{d(L(U))}{dU} + XYb\frac{d(L(U))}{dU} + X^2ac + XYbc + XaJ_x(Y,U) + \\
&+ YbJ_x(Y,U) - VXbc_2 + VYac_2 + XYb\frac{d(L(U))}{dU} - Y^2a\frac{d(L(U))}{dU} + XYbc - Y^2ac + \\
&+ XbK_y(X,U) - YaK_y(X,U) + V\frac{d^2(L(U))}{dU^2} + \frac{d(I(X,Y,U))}{dU} = 0
\end{aligned}$$

Дифференцируем по V

$$V\frac{d^2(L(U))}{dU^2} - VXac_1 + VYac_2 - VYbc_1 - VXbc_2 = 0$$

Заметим, что $ac_1 = -bc_2$, $ac_2 = bc_1$ и $\dfrac{d^2(L(U))}{dU^2} = 0$ из чего следует:

$$c_1 = -\frac{bc_2}{a} = \frac{ac_2}{b} = 0 \text{ и } L(U) = c_3U + c_4$$

Т.к. $f(U) = \dfrac{d(l)}{dU} + c$, то $f(U) = c_3 + c = C$. □

Теорема 2. *Векторное поле*

$$K = (2Vf + c_1)\frac{d}{dV} + Xf\frac{d}{dX} + Yf\frac{d}{dY} + c_2\frac{d}{dU}$$

на неразложимом эйнштейновом симметрическом четырехмерном лоренцевом многообразии M с метрикой

$$ds^2 = dUdV + dX^2 + dY^2 + (a(X^2 - Y^2) + 2bXY)dU^2$$

удовлетворяет условию $L_K g = f(\rho)g$, где $L_k g$ производная Ли метрического тензора вдоль поля K, $f(\rho)$ – функция на многообразии M, и является его частным решением.

Доказательство. Перепишем равенство $L_K g = f(\rho)g$ в координатах, приравняв каждый элемент $L_K g - f(\rho)g = 0$ нулю. Получаем систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{d(l)}{dV} = 0 \tag{18}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d(j)}{dV} + \frac{1}{2}\frac{d(l)}{dX} = 0 \tag{19}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d(k)}{dV} + \frac{1}{2}\frac{d(l)}{dY} = 0 \tag{20}$$

$$XYb\frac{d(l)}{dV} + \frac{1}{2}\left(X^2\frac{d(l)}{dV} - Y^2\frac{d(l)}{dV}\right)a - f + \frac{1}{2}\frac{d(i)}{dV} + \frac{1}{2}\frac{d(l)}{dU} = 0 \tag{21}$$

$$-f + \frac{d(j)}{dX} = 0 \tag{22}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d(j)}{dY} + \frac{1}{2}\frac{d(k)}{dX} = 0 \tag{23}$$

$$-f + \frac{d(k)}{dY} = 0 \tag{24}$$

$$XYb\frac{d(l)}{dX} + \frac{1}{2}\left(X^2\frac{d(l)}{dX} - Y^2\frac{d(l)}{dX}\right)a + \frac{1}{2}\frac{d(i)}{dX} + \frac{1}{2}\frac{d(j)}{dU} = 0 \tag{25}$$

$$XYb\frac{d(l)}{dY} + \frac{1}{2}\left(X^2\frac{d(l)}{dY} - Y^2\frac{d(l)}{dY}\right)a + \frac{1}{2}\frac{d(i)}{dY} + \frac{1}{2}\frac{d(k)}{dU} = 0 \tag{26}$$

$$\begin{gathered}\left(X^2\frac{d(l)}{dU} - Y^2\frac{d(l)}{dU} + Xj(V,X,Y,U) - Yk(V,X,Y,U)\right)a+\\ +\left(\left(2X\frac{d(l)}{dU} + j(V,X,Y,U)\right)Y + Xk(V,X,Y,U)\right)b-\\ -\left(2XYb + (X^2 - Y^2)a\right)f + \frac{d(i)}{dU} = 0\end{gathered} \tag{27}$$

Подставим в нее значения, задающие векторное поле $i = 2Vf + c_1$, $j = Xf$, $k = Yf$, $l = c_2$:

(18) примет вид $\dfrac{d}{dV}c_2 = 0$, что верно.

(19) примет вид $\dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dV}Xf + \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dX}c_2 = 0$, что верно.

(20) примет вид $\dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dV}Yf + \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dY}c_2 = 0$, что верно.

(21) примет вид

$$XYb\frac{d}{dV}c_2+\frac{1}{2}\left(X^2\frac{d}{dV}c_2-Y^2\frac{d}{dV}c_2\right)a-f+\frac{1}{2}\frac{d}{dV}(2Vf+c_1)+\frac{1}{2}\frac{d(l)}{dU}c_2=-f+f=0,$$

что верно.

(22) примет вид $-f+\frac{d}{dX}Xf=0$, что верно.

(23) примет вид $\frac{1}{2}\frac{d}{dY}Xf+\frac{1}{2}\frac{d}{dX}Yf=0$, что верно.

(24) примет вид $-f+\frac{d}{dY}Yf=0$, что верно.

(25) примет вид

$$XYb\frac{d}{dX}c_2+\frac{1}{2}\left(X^2\frac{d}{dX}c_2-Y^2\frac{d}{dX}c_2\right)a+\frac{1}{2}\frac{d}{dX}(2Vf+c_1)+\frac{1}{2}\frac{d}{dU}Xf=0,$$

что верно.

(26) примет вид

$$XYb\frac{d}{dY}c_2+\frac{1}{2}\left(X^2\frac{d}{dY}c_2-Y^2\frac{d}{dY}c_2\right)a+\frac{1}{2}\frac{d}{dY}(2Vf+c_1)+\frac{1}{2}\frac{d}{dU}Yf=0,$$

что верно.

(27) примет вид

$$\begin{aligned}&\left(X^2\frac{d}{dU}c_2-Y^2\frac{d}{dU}c_2+X^2f-Y^2f\right)a+\left(\left(2X\frac{d}{dU}c_2+Xf\right)Y+XYf\right)b-\\&-(2XYb+(X^2-Y^2)a)f+\frac{d}{dU}(2Vf+c_1)=\\&=X^2fa-Y^2fa+2XYfb-2XYfb-X^2fa+Y^2fa=0,\end{aligned}$$

что верно.

Таким образом мы доказали, что векторное поле

$$K=(2Vf+c_1)\frac{d}{dV}+Xf\frac{d}{dX}+Yf\frac{d}{dY}+c_2\frac{d}{dU}$$

удовлетворяет условию $L_Kg=f(\rho)g$. □

Поскольку киллинговы поля на рассматриваемых многообразиях хорошо известны, с помощью теоремы 2 нетрудно получить полное описание конформно киллинговых полей на таких многообразиях.

Список литературы

1. Cahen M., Wallach N. Lorentzian symmetric spaces // Bull. Amer. Math. Soc. — 1970. — Vol. 76. — P. 585–591.

2. Galaev A.S., Alexeevskii D.V. Two-symmetric Lorentzian mani-folds // J. Geom. Phys. — 2011. — Vol. 61, no. 12. — P. 2331–2340.

3. Blanco O.F., Sanchez M., Senovolla J.M. Structure of second-order symmetric Lorentzian manifolds // J. Eur. Math. Soc. — 2013. — Vol. 15. — P. 595–634.

4. Оскорбин Д.Н., Родионов Е.Д., Эрнст И.В. О размерностях пространства полей Киллинга на 2-симетрических лоренцевых многообразиях // Математические заметки СВФУ. — 2019. — Т. 26. — С. 47–56.